Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Corrigé du test n°1

Questions de cours

Un ensemble non vide E est dit ***fini*** s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection de E dans $\{1, \cdots, n\}$.

Si un tel entier n existe, il est alors unique et est appelé ***cardinal*** de l'ensemble E.

1 Le nombre d'anagrammes du mot *BEAULIEU* est :

A. $8!$ **B.** $\boxed{\frac{8!}{4}}$ **C.** $8! - 2!2!$ **D.** $\boxed{\binom{8}{2}\binom{6}{2}4!}$

En effet, on peut utiliser la « formule » donnant le nombre d'anagrammes en fonction de la longueur du mot et des lettres répétées ce qui donne $\dfrac{8!}{2!2!} = \dfrac{8!}{4}$ ou noter $\mathscr{A}$ l'ensemble des anagrammes du mot BEAULIEU (en voyant un mot de huit lettres comme un 8-uplet de lettres). On a alors : $\mathscr{A} = \bigcup\limits_{I\subset[\![1,8]\!],\,\mathrm{Card}(I)=2} \mathscr{A}_I$ où, pour $I = \{i,j\} \subset [\![1,8]\!]$, $\mathscr{A}_I = \{(a_1, \cdots, a_8) \in \mathscr{A},\, a_i = a_j = E\}$. La réunion étant clairement disjointe, $\mathrm{Card}(\mathscr{A}) = \sum\limits_{I\subset[\![1,8]\!],\,\mathrm{Card}(I)=2} \mathrm{Card}(\mathscr{A}_I) = \binom{8}{2}\mathrm{Card}(\mathscr{A}_{\{1,2\}})$ car tous les $\mathscr{A}_I$ ont même cardinal. Or $\mathscr{A}_{\{1,2\}} = \{(E, E, a_3, a_4, \cdots, a_8) \in \mathscr{A}\}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathscr{A}'$ des anagrammes de BAULIU. Le même raisonnement montre que $\mathrm{Card}(\mathscr{A}') = \binom{6}{2}\mathrm{Card}(\mathscr{A}'_{\{1,2\}})$ où $\mathscr{A}'_{\{1,2\}} = \{(U, U, a_3, \cdots, a_6) \in \mathscr{A}'\}$ est en bijection avec l'ensemble des anagrammes de BALI.

Au final, $\mathrm{Card}(\mathscr{A}) = \binom{8}{2}\binom{6}{2}4! = \dfrac{8!}{2!2!}$.

2 On appelle *mot* toute liste de dix chiffres. (Pour rappel, les chiffres sont 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9.) Combien de mots comportent à la fois cinq « 0 » et cinq « 1 » ?

A. $\boxed{\binom{10}{5}}$ **Exact.** En effet l'ensemble des tels mots est en bijection avec l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des dix positions : choisir un tel mot c'est choisir la place des cinq « 0 » dans ce mot (les autres places étant alors occupées par des « 1 »).

B. Faux : $2^{10} \neq \dfrac{10!}{5!5!}$. **C. Faux** : $A_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!} \neq \dfrac{10!}{5!5!}$. **D. Faux** : $2.5!5! \neq \dfrac{10!}{5!5!}$.

3 A, B et C désignent trois évènements correspondants à une même expérience aléatoire. Dire que exactement deux évènements parmi A, B et C sont réalisés signifie que le résultat de l'expérience est dans :

A. **Faux** : $(A \cup B) \cup (B \cup C) \cup (C \cup A) = A \cup B \cup C$ correspond à « au moins l'un des trois est réalisé ».

B. **Faux** : $\overline{A \cap B \cap C}$ correspond à « les trois ne sont pas tous réalisés ».

C. **Faux** : $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ correspond à « aucun des trois n'est réalisé ».

D. $\boxed{(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (B \cap C \cap \overline{A}) \cup (C \cap A \cap \overline{B})}$ **Exact !**

E. **Faux** : voir B. car $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = \overline{A \cap B \cap C}$

$\boxed{4}$ On se place dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Si A, B et C sont trois évènements tels que

$$\mathbb{P}(A) = 0,3 \qquad \mathbb{P}(B) = 0,6 \qquad \mathbb{P}(C) = 0,7$$

alors on est sûr que :

A. $\overline{A} = C$. **Faux.** En effet, si on a bien $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(C)$, rien ne garantit que $\overline{A} = C$.

B. $\mathbb{P}(A \cup C) = 1$. **Faux.** En effet, $\mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(c) - \mathbb{P}(A \cap C) = 1 - \mathbb{P}(A \cap C)$ mais rien ne garantit que $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$.

$\boxed{\textbf{C.} \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 0,7.}$ **Exact.** En effet $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

$\boxed{\textbf{D.} \quad \mathbb{P}(A \cup B) \leqslant 0,9.}$ **Exact.** En effet, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

$\boxed{5}$ Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant. La probabilité de tirer trois boules noires est :

A. $\dfrac{\dbinom{4}{3}}{\dbinom{8}{3}}$ **B.** $\dfrac{9}{8}$ $\boxed{\textbf{C.} \quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^3}$ **D.** $\dfrac{4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6}$

En effet, on peut voir un résultat comme une 3-liste de l'ensemble des huit boules (que l'on peut si besoin numéroter). Les boules étant indiscernables au toucher et le tirage ayant lieu au hasard, on munit l'univers Ω correspondant de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

L'évènement B : « on obtient trois boules noires » est alors l'ensemble des 3-listes de l'ensemble des quatre boules noires et on a : $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{4^3}{8^3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$.

A. et **D.** sont fausses puisque $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6} \neq \dfrac{1}{8}$. Ce résultat correspondrait à un tirage simultané ou encore à un tirage successif <u>sans</u> remise. **B.** est fausse puisque $\dfrac{9}{8} > 1$!

$\boxed{6}$ Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher.

On extrait simultanément trois boules de l'urne. La probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge est :

A. $\dfrac{75}{512}$ **B.** $\dfrac{13}{56}$ **C.** $\dfrac{15}{64}$ $\boxed{\textbf{D.} \quad \dfrac{15}{28}}$

En munissant de même l'ensemble des parties à trois éléments de l'ensemble des huit boules de la probabilité uniforme, l'évènement B : « on obtient deux boules noires et une boule rouge » s'écrit $B = \{B_1 \cup B_2,\ B_1 \in \mathscr{C}_2(N) \text{ et } B_2 \in \mathscr{C}_1(R)\}$ où $\mathscr{C}_2(N)$ (respectivement $\mathscr{C}_1(R)$) désigne l'ensemble des parties à deux (resp. un) éléments de l'ensemble N (resp. R) des boules noires (resp. rouges). On en déduit $|B| = \dbinom{5}{2}\dbinom{3}{1}$ et donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{5.4.3}{2} \cdot \dfrac{3.2.1}{8.7.6} = \dfrac{15}{18}$.

<u>Remarque :</u> B est en bijection avec $\mathscr{C}_2(N) \times \mathscr{C}_1(R)$ par l'application $B_1 \cup B_2 \longmapsto (B_1, B_2)$ et on a donc bien $|B| = |\mathscr{C}_2(N) \times \mathscr{C}_1(R)| = \dbinom{5}{2}\dbinom{3}{1}$. Ce degré de formalisation n'est toutefois pas exigible lors des contrôles.