

**NOM :**
**PRÉNOM :**
**Question de cours 1** (3 points)

Énoncer le théorème donnant le cardinal d'une réunion.

 Réponse : Si  $A$  et  $B$  sont deux parties finies d'un même ensemble  $E$  alors  $A \cup B$  est un ensemble fini et on a :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

**Question de cours 2** (4 points)

 Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $B$  un évènement tel que  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ . On rappelle que la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$  (que l'on note  $\mathbb{P}_B(A)$ ) est le réel  $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ .

Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \mathbb{P}_B(A) \end{aligned}$$

 est une probabilité sur  $\Omega$ .

Réponse :

- Il est clair que  $\forall A \subset \Omega, \mathbb{P}_B(A) \geq 0$ ,
- On a bien  $\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$ ,
- Soit alors  $(A, A') \in \mathcal{P}(\Omega)^2$  avec  $A \cap A' = \emptyset$ .

$$\mathbb{P}_B(A \cup A') = \frac{\mathbb{P}((A \cup A') \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A' \cap B))}{\mathbb{P}(B)}.$$

 Comme  $A \cap B$  et  $A' \cap B$  sont disjoints, on en déduit

$$\mathbb{P}_B(A \cup A') = \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A' \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A').$$

 Les trois axiome étant vérifiés,  $\mathbb{P}_B$  est bien une probabilité sur  $\Omega$ .

**Question de cours 3** (3 points)

 Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$ .

 Quand dit-on que  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, 1]$ ) ?

 Réponse :  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  si

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

 Alternative :  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  si  $X$  est la variable aléatoire donnant le nombre de succès à l'issue de la répétition indépendante de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques de paramètre  $p$ .