Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Devoir Maison à rendre au plus tard le 5 mai 2025

Exercice

1) Soit un réel $\alpha \in]-\frac{1}{e}, 0[$. On considère la fonction réelle de la variable réelle $f_\alpha : x \longmapsto \alpha x + \ell n\, x$.

a) Étudier les variations de f_α sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que f_α s'annule sur $]0, +\infty[$ en exactement deux réels a et b que l'on ne cherchera pas à déterminer.

2) Selon les statistiques du ministère de l'agriculture, les brebis laitières sont atteintes par une certaine maladie (non contagieuse) avec une probabilité $p = 0,2$. Pour dépister cette maladie dans son cheptel de n brebis ($n \in \mathbb{N}^*$), un éleveur procède à une analyse de lait.

Il effectue d'abord une analyse sur un échantillon provenant du mélange des laits de ses n brebis. Dans le cas où cela révèle la présence de la maladie, il effectue alors de nouvelles analyses : une pour chacune de ses n brebis.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre total d'analyses réalisées par cette méthode.

a) Déterminer la loi de X_n et montrer que son espérance est : $\mathbb{E}(X_n) = n + 1 - n(0.8)^n$

b) Montrer que $\mathbb{E}(X_n) < n$ si et seulement si $f_\alpha(n) > 0$ où $\alpha = \ell n\,(0,8)$.

c) La méthode utilisée par cet éleveur utilise-t-elle en moyenne moins d'analyses que celle consistant à tester directement chacune de ses brebis ? (On pourra discuter suivant la valeur de n).

Licence 1 - Mathématiques 2024-2025

Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Devoir Maison à rendre au plus tard le 5 mai 2025

Exercice

1) Soit un réel $\alpha \in]-\frac{1}{e}, 0[$. On considère la fonction réelle de la variable réelle $f_\alpha : x \longmapsto \alpha x + \ell n\, x$.

a) Étudier les variations de f_α sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que f_α s'annule sur $]0, +\infty[$ en exactement deux réels a et b que l'on ne cherchera pas à déterminer.

2) Selon les statistiques du ministère de l'agriculture, les brebis laitières sont atteintes par une certaine maladie (non contagieuse) avec une probabilité $p = 0,2$. Pour dépister cette maladie dans son cheptel de n brebis ($n \in \mathbb{N}^*$), un éleveur procède à une analyse de lait.

Il effectue d'abord une analyse sur un échantillon provenant du mélange des laits de ses n brebis. Dans le cas où cela révèle la présence de la maladie, il effectue alors de nouvelles analyses : une pour chacune de ses n brebis.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre total d'analyses réalisées par cette méthode.

a) Déterminer la loi de X_n et montrer que son espérance est : $\mathbb{E}(X_n) = n + 1 - n(0.8)^n$

b) Montrer que $\mathbb{E}(X_n) < n$ si et seulement si $f_\alpha(n) > 0$ où $\alpha = \ell n\,(0,8)$.

c) La méthode utilisée par cet éleveur utilise-t-elle en moyenne moins d'analyses que celle consistant à tester directement chacune de ses brebis ? (On pourra discuter suivant la valeur de n).