Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Corrigé du devoir maison 2024

Exercice

1) La fonction $\varphi : x \longmapsto \frac{1}{x}+a-1$ est strictement décroissante sur $]0,1]$ (car la fonction inverse l'est). Comme $\varphi(1) = a$, on a donc $\forall x \in]0,1]$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(1) = a$: $\varphi(]0,1]) \subseteq [a,+\infty[$. f étant définie sur $[a,+\infty[$, la fonction composée F est bien définie sur $]0,1]$.

2) $\varphi : x \longmapsto \frac{1}{x}+a-1$ est continue sur $]0,1]$, $\varphi(]0,1]) \subseteq [a,+\infty[$ et f est continue sur $[a,+\infty[$ donc $F = f\circ\varphi$ est continue sur $]0,1]$ (théorème de composition des fonctions continues).
De même, $\varphi : x \longmapsto \frac{1}{x}+a-1$ est dérivable sur $]0,1[$, $\varphi(]0,1[) \subseteq]a,+\infty[$ (car $\forall x \in]0,1[$, $\varphi(x) > \varphi(1) = a$ par stricte décroissance de φ) et f est dérivable sur $]a,+\infty[$ donc $F = f\circ\varphi$ est dérivable sur $]0,1[$ (théorème de composition des fonctions dérivables).

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+a-1\right) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} f(X) = 0$ donc (théorème de composition des limites) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$.
f se prolonge donc par continuité en 0 en posant $F(0) = 0$.
Comme f était déjà continue sur $]0,1]$, elle l'est finalement sur $[0,1]$.

4) F est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et on a $F(0) = F(1) = 0$ (car $f(a) = 0$) donc le théorème de Rolle assure l'existence d'un α de $]0,1[$ tel que $F'(\alpha) = 0$.

5) La dérivation des fonctions composées montre que $\forall x \in]0,1[$, $F'(x) = \dfrac{-1}{x^2} f'\left(\dfrac{1}{x}+a-1\right)$. En posant $c = \dfrac{1}{\alpha}+a-1$ on a alors $c \in]a,+\infty[$ et $f'(c) = 0$.
f' s'annule donc bien en au moins un point de $]a,+\infty[$.

On a ainsi démontré une généralisation du théorème de Rolle...