

Analyse et Probabilités 2

Devoir Maison à rendre pour le 19 avril 2024

Durée : 2 heures

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit a un réel. On suppose que :

- f est continue sur $[a, +\infty[$
- f est dérivable sur $]a, +\infty[$
- $f(a) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

On considère alors :

$$F :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f\left(\frac{1}{x} + a - 1\right)$$

- 1) Justifier que F est bien définie sur $]0, 1]$.
- 2) Montrer que F est continue sur $]0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
- 3) Montrer que F est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.
On note encore F la fonction ainsi prolongée.
- 4) Montrer que F' s'annule en au moins un point de $]0, 1[$.
- 5) En déduire que f' s'annule en au moins un point de $]a, +\infty[$.