Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Corrigé rapide du contrôle du 19 mai 2026

Questions de cours (*5 points*)

1) $-\infty$ est limite à gauche de f en b si : $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (b - \delta \leqslant x < b \Longrightarrow f(x) \leqslant A)$

2) Théorème des bornes atteintes : Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur le segment $[a, b]$. Alors la fonction f est bornée sur $[a, b]$ et elle atteint ses bornes sur $[a, b]$: il existe c et d dans $[a, b]$ tels que $f(c)$ et $f(d)$ soient respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des $f(x)$, pour x dans $[a, b]$.

3) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}([|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Exercice n°1 (*4 points*)

1) La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est continue et ne s'annule pas sur $]-1; +\infty[\setminus\{0\}$ donc (théorème du quotient) $x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ est continue sur $]-1; +\infty[\setminus\{0\}$. On en déduit que f est continue sur $]-1; +\infty[\setminus\{0\}$.
D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1+1 = f(0)$ et f est finalement continue sur $]-1; +\infty[$.

2) On a $1 + x \xrightarrow[x\to(-1)^+]{} 0^+$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to(-1)^+]{} 1$ et on peut donc prolonger f par continuité sur $[-1; +\infty[$ en posant $f(-1) = 1$.

3) Soit $x \in]-1; +\infty[\setminus\{0\}$. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x}{\ln(1+x)} - 1\right) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$. Posons $u(x) = x - \ln(1+x)$ et $v(x) = x\ln(1+x)$. Alors u et v sont dérivables et on a, pour $x \in]-1; +\infty[\setminus\{0\}$,

$$\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{1 - \dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}} = \frac{1}{\dfrac{\ln(1+x)}{x}.(1+x) + 1} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Comme $u(0) = v(0) = 0$, la régle de l'Hospital entraîne alors $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$: f est dérivable en 0 (et on a $f'(0) = \dfrac{1}{2}$).

Exercice n°2 (*4,5 points*)

1) Un résultat de l'expérience (tirage) est une partie à trois éléments de l'ensemble des onze boules. Quitte à numéroter chacune de ces onze boules, on peut munir l'ensemble Ω des tirages de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ (car les boules sont indiscernables au toucher). On a alors $\text{Card}(\Omega) = \binom{11}{3} = 165$.

2) Notons $\mathscr{B}$ (respectivement $\mathscr{R}$ et $\mathscr{V}$) l'ensemble des boules bleues (respectivement rouges et vertes).
L'application $(b, r, v) \mapsto \{b, r, v\}$ est une bijection de $\mathscr{B} \times \mathscr{R} \times \mathscr{V}$ dans E_1 donc $\text{Card}(E_1) = 6 \times 3 \times 2$ et $\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{36}{165} = \dfrac{12}{55}$.
Comme il est impossible d'obtenir trois boules vertes, E_2 est la réunion disjointe des événements B : « Les boules sont toutes bleues. » et R : « Les boules sont toutes rouges. ». B est l'ensemble des 3-combinaisons de l'ensemble des six boules bleues. Son cardinal est donc $\binom{6}{3} = 20$. De même R est l'ensemble des 3-combinaisons de l'ensemble des trois boules rouges. Son cardinal est donc $\binom{3}{3} = 1$.
Finalement $\text{Card}(E_2) = \text{Card}(B) + \text{Card}(R) = 21$ et $\mathbb{P}(E_2) = \dfrac{21}{165} = \dfrac{7}{55}$.

3) Soit la variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ comptant le nombre de boules bleues obtenues.
On a donc $X : \omega \longmapsto \text{Card}(\omega \cap \mathscr{B})$.
La loi de X est alors donnée par $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et le tableau des $\mathbb{P}([X = k])$:

k	0	1	2	3	Somme
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{2}{33}$	$\frac{12}{33}$	$\frac{15}{33}$	$\frac{4}{33}$	1
$k\mathbb{P}([X = k])$	0	$\frac{12}{33}$	$\frac{30}{33}$	$\frac{12}{33}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{54}{33} = \frac{18}{11}$
$k^2\mathbb{P}([X = k])$	0	$\frac{12}{33}$	$\frac{60}{33}$	$\frac{36}{33}$	$\mathbb{E}(X^2) = \frac{108}{33} = \frac{36}{11}$

Éléments d'explications : $[X = 3] = B$ donc $\mathbb{P}([X = 3]) = \dfrac{20}{165} = \dfrac{4}{33}$. De même $\text{Card}([X = 0]) = \binom{5}{3} = 10$.
Les éléments de $[X = 2]$ sont les parties constituées d'un élément de l'ensemble $\mathscr{A}$ des boules non bleues et de deux éléments de l'ensemble $\mathscr{B}$ des boules bleues. $[X = 2]$ est donc en bijection avec $\mathscr{C}_1(\mathscr{A}) \times \mathscr{C}_2(\mathscr{B})$ et donc $\text{Card}([X = 2]) = \binom{5}{1}.\binom{6}{2} = 75$: $\mathbb{P}([X = 2]) = \dfrac{75}{165} = \dfrac{15}{33}$.

4) L'espérance de X est $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}([X = k])$ et le tableau donne donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{54}{33} = \dfrac{18}{11}$.
De même, $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} k^2\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{36}{11}$ et comme la variance de X est $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ on a finalement $V(X) = \dfrac{36}{11} - \dfrac{324}{121} = \dfrac{72}{121}$.

Exercice n°3 (*7 points*)

1) f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$: c'est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ (puisque $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$). En particulier, $0 \in \mathbb{R}$ a un unique antécédent par f dans $]0, +\infty[$.
Comme $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \ell n\, 2 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$.

2)
a) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée a le signe de $4x - 1$. g est donc continue et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et on a $g\left(\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[\dfrac{2 + \ell n\, 2}{5}, \dfrac{4}{5}\right] \subset \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ (car $2 + \ln 2 \geqslant 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$).
Comme de plus $g(x) = x \iff f(x) = 0$, on a bien $g(\ell) = \ell$.

b) On a $\forall x > 0,\ g'(x) = \dfrac{1}{5}\left(4 - \dfrac{1}{x}\right)$ donc $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $|g'(x)| = g'(x) \leqslant \dfrac{1}{5}(4 - 1) = \dfrac{3}{5}$. L'inégalité des accroissements finis entraîne alors : $\forall (x, y) \in [\frac{1}{2}, 1]^2 \quad |g(x) - g(y)| \leqslant \dfrac{3}{5}|x - y|$.

c) Comme $u_0 = 1 \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $g\left([\frac{1}{2}, 1]\right) \subset [\frac{1}{2}, 1]$, une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, en appliquant la question précédente avec $x = u_n$ et $y = \ell$, on a $|g(u_n) - g(\ell)| \leqslant \dfrac{3}{5}|u_n - \ell|$ soit $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{3}{5}|u_n - \alpha|$. Notons alors $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $|u_n - \ell| \leqslant \left(\dfrac{3}{5}\right)^n |u_0 - \ell|$ »

- *(initialisation)* On a $|u_0 - \ell| \leqslant \left(\dfrac{3}{5}\right)^0 |u_0 - \ell|$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
  D'après ce qui précède, on a $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{3}{5}|u_n - \ell|$ et donc, par hypothèse de récurrence, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n |u_0 - \ell| = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1} |u_0 - \ell|$. On a bien montré $\mathscr{P}_{n+1}$.
- *(conclusion)* D'après le théorème de récurrence on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \left(\dfrac{3}{5}\right)^n |u_0 - \ell|$.

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers ℓ.