Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Contrôle continu du mardi 19 mai 2026

Durée : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables et autres objets connectés ne sont pas autorisés.

Les trois exercices sont totalement indépendants. Le barème est indicatif.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Questions de cours (*5 points*)

1) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. Soit $b \in \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle non vide du type $]a, b[$.
Quand dit-on que $-\infty$ est la limite à gauche de f en b ? (Donner la définition.)

2) Énoncer le théorème des bornes atteintes pour une fonction réelle de la variable réelle f.

3) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice n°1 (*3,5 points*)

On considère la fonction réelle de la variable réelle f définie sur $]-1; +\infty[$ par

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) Démontrer que f est continue sur $]-1; +\infty[$.

2) Peut-on prolonger f par continuité sur $[-1; +\infty[$?

3) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Tourner la page

$\boxed{\textbf{Exercice n°2}}$ *(4,5 points)*

On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient six boules bleues, trois boules rouges, et deux boules vertes, indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne et on en observe les couleurs.

1) Proposer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.

2) Calculer la probabilité des deux évènements E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. » et E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »

3) Déterminer la loi de la variable aléatoire X qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées. Calculer l'espérance et la variance de X.

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ *(7 points)*

On rappelle que $\dfrac{1}{2} < \ln(2) < \dfrac{3}{4}$.

1) Soit f la fonction sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée ℓ, dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
Vérifier que $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$.

2) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$.

a) Démontrer que $g\left([\frac{1}{2}, 1]\right) \subset [\frac{1}{2}, 1]$ puis vérifier que $g(\ell) = \ell$.

b) Montrer que : $\forall (x, y) \in [\frac{1}{2}, 1]^2 \quad |g(x) - g(y)| \leqslant \dfrac{3}{5}\,|x - y|$.

c) À l'aide des questions précédentes, vérifier que l'on définit bien une suite en posant $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

`Fin du contrôle`