

Analyse et Probabilités 2

Corrigé rapide du contrôle du 20 mai 2025

Questions de cours (5 points)

- 1) On appelle **probabilité**, ou mesure de probabilité, sur l'univers fini Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois axiomes :

$$(1) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \mathbb{P}(A) \geq 0$$

$$(2) \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$(3) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 \quad (A \cap B = \emptyset \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)).$$

- 2) $+\infty$ est limite à droite de f en a si : $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (a < x \leq a + \delta \implies f(x) \geq A)$

- 3) Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle I . Soit $a < b$ deux éléments de l'intervalle I . Soit ℓ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe c dans le segment $[a, b]$ tel que $f(c) = \ell$.

- 4) On a $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$ et $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On a donc $\mathbb{E}(X) =$

$$\sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ soit}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$\text{ou encore } \mathbb{E}(X) = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np(p + (1-p))^{n-1}.$$

Autre méthode : On peut voir une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ comme une somme de variables aléatoires (indépendantes) de même loi de Bernoulli de paramètre p :

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

La linéarité de l'espérance entraîne immédiatement $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) = np$.

Exercice n°1 (2,5 points)

- 1) • $x \mapsto x \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc (continuité d'une composée) f est continue sur $]0, +\infty[$.

• On sait que $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Comme la fonction exponentielle est continue en 0, on en déduit par composition $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \exp(0) = 1$. f a donc une limite finie à droite en 0.

La fonction f est finalement prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$ en posant $f(0) = 1$.

- 2) Pour $x > 0$ on a alors $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\exp(x \ln x) - 1}{x} = \frac{\exp(x \ln x) - 1}{x \ln x} \cdot \ln x$. Or, $X = x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\frac{e^X - 1}{X} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. On déduit alors $\frac{\exp(x \ln x) - 1}{x \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ (composition de limites) et donc finalement $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$: le prolongement n'est pas dérivable en 0.

Exercice n°2 (7 points)

- 1) f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 > 0$ (car $\Delta = 4 - 24 < 0$). f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, f est continue et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. C'est donc une bijection de $[\frac{1}{2}, 1]$ dans $f([\frac{1}{2}, 1]) = [f(\frac{1}{2}), f(1)]$. Or, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} < 0$ et $f(1) = 1 > 0$ donc $0 \in f([\frac{1}{2}, 1])$. Il existe donc bien un unique réel $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

- 2) a) g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{2x(2+x^2) - 2x(1+x^2)}{(2+x^2)^2} = \frac{2x}{(2+x^2)^2}$.
- g est donc continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. C'est par suite une bijection de $[0, +\infty[$ dans $g([0, +\infty[) = [g(0), \lim_{+\infty} g[$. Comme $\lim_{+\infty} g = 1$, on a donc bien $g(\mathbb{R}) = [\frac{1}{2}, 1[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. $g(x) = x \Leftrightarrow 1+x^2 = x(2+x^2)$ soit $g(x) = x \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$. La question 1) montre donc que $g(\ell) = \ell$.
- b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $g(x) - g(y) = \frac{1+x^2}{2+x^2} - \frac{1+y^2}{2+y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(2+x^2)(2+y^2)}$.
- Pour $(x, y) \in [\frac{1}{2}, 1]^2$ on a donc $|g(x) - g(y)| = |x - y| \frac{|x+y|}{(2+x^2)(2+y^2)} \leq |x - y| \frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2} |x - y|$.
- (On pouvait aussi, bien sûr, utiliser l'inégalité des accroissements finis.)
- c) D'après a), $u_1 = g(u_0) \in [\frac{1}{2}, 1]$. Une récurrence immédiate montre alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en appliquant la question précédente avec $b = u_n$ et $a = \ell$, on a $|g(u_n) - g(\ell)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$ soit $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$.
- Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, notons alors $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |u_1 - \ell|$. »
- (initialisation) On a $|u_1 - \ell| \leq \frac{1}{2^0} |u_1 - \ell|$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
 - (hérédité) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
D'après ce qui précède, on a $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$ et donc, par hypothèse de récurrence, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n-1}} |u_1 - \ell| = \frac{1}{2^n} |u_1 - \ell|$. On a bien montré $\mathcal{P}_{n+1}$.
 - (conclusion) D'après le théorème de récurrence on a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |u_1 - \ell|$.
- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers ℓ .

Exercice n°3 (4,5 points)

- 1) Un résultat de l'expérience (tirage) est une partie à trois éléments de l'ensemble des 12 boules. Quitte à numéroter chacune de ces 12 boules, on peut munir l'ensemble Ω des tirages de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ (car les boules sont indiscernables au toucher). On a alors $\text{Card}(\Omega) = \binom{12}{3} = 220$.
- 2) Soit la variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ comptant le nombre de boules vertes obtenues.
On a donc $X : \omega \longmapsto \text{Card}(\omega \cap V)$ où V désigne l'ensemble des boules vertes.
La loi de X est alors donnée par $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et le tableau des $\mathbb{P}([X = k])$:

k	0	1	2	3	Somme
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{14}{44}$	$\frac{2}{44}$	1
$k\mathbb{P}([X = k])$	0	$\frac{21}{44}$	$\frac{28}{44}$	$\frac{6}{44}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{55}{44} = \frac{5}{4}$
$k^2\mathbb{P}([X = k])$	0	$\frac{21}{44}$	$\frac{56}{44}$	$\frac{18}{44}$	$\mathbb{E}(X^2) = \frac{95}{44}$

Éléments d'explications : $[X = 3]$ est l'ensemble des 3-combinaisons de l'ensemble des cinq boules vertes. Son cardinal est donc $\binom{5}{3} = 10$. De même $\text{Card}([X = 0]) = \binom{7}{3} = 35$.
Les éléments de $[X = 2]$ sont les parties constituées d'un élément de l'ensemble B des boules bleues et de deux éléments de l'ensemble V des boules vertes. $[X = 2]$ est donc en bijection avec $\mathcal{C}_1(B) \times \mathcal{C}_2(V)$ et donc $\text{Card}([X = 2]) = \binom{7}{1} \cdot \binom{5}{2} = 70$.

- 3) L'espérance de X est $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}([X = k])$ et le tableau donne bien $\mathbb{E}(X) = \frac{55}{44} = \frac{5}{4}$.
- De même, $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2\mathbb{P}([X = k]) = \frac{95}{44}$ et comme la variance de X est $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
on a finalement $V(X) = \frac{95}{44} - \frac{25}{16} = \frac{115}{48}$.