Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Contrôle continu du mardi 20 mai 2025

Durée : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables et autres objets connectés ne sont pas autorisés.
Les trois exercices sont totalement indépendants. Le barème est indicatif.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Questions de cours (*6 points*)

1) Donner la définition d'une probabilité sur un univers fini Ω.

2) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle non vide du type $]a, b[$.
Quand dit-on que $+\infty$ est limite à droite de f en a ? (Donner la définition.)

3) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction réelle de la variable réelle f.

4) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.
On suppose que X suit la loi binomiale de paramètres n et p (où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$).
Démontrer que l'espérance de X est $\mathbb{E}(X) = np$.

Exercice n°1 (*2,5 points*)

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^x = \exp(x\ell n\, x) \end{array}$$

1) Démontrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

2) Cette fonction prolongée est-elle dérivable sur $[0, +\infty[$?

Exercice n°2 (*7 points*)

1) Soit f la fonction réelle définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$.
Montrer qu'il existe un unique réel $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

2) Soit g la fonction réelle définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \dfrac{1 + x^2}{2 + x^2}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que $g(\mathbb{R}) = [\frac{1}{2}, 1[$ puis vérifier que $g(\ell) = \ell$.

b) Montrer que : $\forall (x, y) \in [\frac{1}{2}, 1]^2 \quad |g(x) - g(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|x - y|$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Tourner la page

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ (*4,5 points*)

Une urne contient sept boules bleues et cinq boules vertes toutes indiscernables au toucher.
On tire simultanément trois boules de cette urne et on observe leurs couleurs.

1) Proposer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.

2) Déterminer la loi de la variable aléatoire X qui associe, à chaque tirage de trois boules, le nombre de boules vertes obtenues.

3) Montrer que l'espérance de X est $\mathbb{E}(X) = \dfrac{5}{4}$ puis calculer la variance de X.

`Fin du contrôle`