Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Corrigé rapide du contrôle du 21 mai 2024

Questions de cours (*5 points*)

1) On appelle ***probabilité***, ou mesure de probabilité, sur l'univers fini Ω toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois axiomes :

(1) $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega) \qquad \mathbb{P}(A) \geqslant 0$

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(3) $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2 \qquad (A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B))$.

2) $-\infty$ est limite à gauche de f en a si : $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (a - \delta \leqslant x < a \Longrightarrow f(x) \leqslant A)$

3) Soit f une fonction réelle définie et continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ (avec $a < b$). Si $f(a) = f(b)$, alors il existe c appartenant à $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

4) $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2)$ donc, par linéarité de l'espérance (en tenant compte que $\mathbb{E}(X)$ est une constante donc est égale à son espérance),

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Exercice n°1 (*5 points*)

1) Un résultat de l'expérience (tirage) est une partie à trois éléments de l'ensemble des 10 boules. Quitte à numéroter chacune de ces dix boules, on peut munir l'ensemble Ω des tirages de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ (puisque les boules sont indiscernables). On remarque alors que $\text{Card}(\Omega) = \binom{10}{3} = 120$.

2) Les éléments de A sont les parties constituées d'un élément de l'ensemble V des boules vertes et de deux éléments de l'ensemble R des boules rouges. A est donc en bijection avec $\mathscr{C}_1(V) \times \mathscr{C}_2(R)$ et donc $\text{Card}(A) = \binom{3}{1}.\binom{7}{2} = 63$. On a donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{63}{120}$.

3) On introduit alors la variable aléatoire X donnant le nombre de points gagnés. On a donc : $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\omega \longmapsto 5\text{Card}(\omega \cap V) - 2\text{Card}(\omega \cap R)$.

a) La loi de X est donnée par $X(\Omega) = \{-6, 1, 8, 15\}$ et le tableau des $\mathbb{P}([X = k])$:

k	-6	1	8	15	Somme
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$	1
$k\mathbb{P}([X = k])$	$-\frac{210}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{168}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{36}{120}$

Éléments d'explications : $[X = 15]$ est l'ensemble des 3-combinaisons de l'ensemble des trois boules vertes. Son cardinal est donc $\binom{3}{3} = 1$. De même $\text{Card}([X = -6]) = \binom{7}{3} = 35$.
$[X = 8] = A$ donc $\text{Card}([X = 8]) = 63$. De même, on trouve $\text{Card}([X = 1]) = \binom{3}{2}\binom{7}{1} = 21$.

b) On a donc $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}([X = x]) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

Exercice n°2 (*10 points*)

1)a) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de telles fonctions (la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur ce domaine). De plus, $\dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \exp'(0) = \dfrac{1}{1} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$.
f est finalement continue sur $\mathbb{R}$.

b) f est un quotient de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur ce domaine). f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c) $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{(e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. On a $u(0) = v(0) = 0$. De plus, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{u'(x)}{v'(x)} = \dfrac{-xe^x}{2e^x(e^x-1)} = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{x}{e^x-1} \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{2}$. La règle de l'Hospital assure alors que $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$. Le théorème de la limite de la dérivée permet finalement d'affirmer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$).

2)a) u est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$. u est donc strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $u(0) = 0$, on a en particulier $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ u(x) < 0$.
D'autre part $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{u(x)}{(e^x-1)^2}$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. On a donc bien $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

b) Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x}{e^x}.\dfrac{1}{1-e^{-x}}$ et donc, par croissances comparées entre les fonctions puissances et exponentielle, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{-\infty} f[$.
On a donc bien $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = x \iff \dfrac{1}{e^x-1} = 1$ (car 0 n'est clairement pas solution) d'où $f(x) = x \iff 1 = e^x - 1$.
f a donc bien un unique point fixe : $\alpha = \ell n\, 2$.

3)a) Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction exponentielle est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. Le théorème des accroissements finis assure alors l'existence d'un $c \in]0, x[$ tel que $e^x - e^0 = (x-0)\exp'(c)$. Comme $\exp'(c) = e^c \geqslant e^0 = 1$ (la fonction exponentielle est croissante), on a bien (en multipliant par $x \geqslant 0$) $e^x - 1 \geqslant x$.
$\varphi : x \longmapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $\forall x \geqslant 0,\ \varphi'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x$ soit $\varphi'(x) = 2e^x[e^x - 1 - x]$. L'inégalité précédente montre alors que $\forall x \geqslant 0,\ \varphi'(x) \geqslant 0$. φ est donc croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $\varphi(0) = 0$, on a donc bien finalement $\forall x \in [0, +\infty[\quad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $f'(x) + \frac{1}{2} = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2e^x - 2 - 2xe^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x-1)^2}$ soit après simplifications : $f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x-1)^2}$. La question précédente donne alors $f'(x) + \frac{1}{2} \geqslant 0$.
Finalement, d'après 2)a), $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

c) On sait que f est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Pour a et b positifs, l'inégalité des accroissements finis assure alors que $|f(b) - f(a)| \leqslant \dfrac{1}{2}|b-a|$.

4)a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Une récurrence immédiate assurant que $u_n > 0$ (car $f(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$), on peut appliquer 3)c) avec $b = u_n$ et $a = \alpha$. Cela donne $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$ soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1-\alpha|$. »

- *(initialisation)* On a $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^0}|1-\alpha|$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. D'après a), $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. donc, par hypothèse de récurrence, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2^n}|1-\alpha| = \dfrac{1}{2^{n+1}}|1-\alpha|$.
On a bien montré $\mathscr{P}_{n+1}$.
- *(conclusion)* D'après le théorème de récurrence on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1-\alpha|$.

c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge finalement vers α.