Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Contrôle continu du mardi 21 mai 2024

Durée : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables et autres objets connectés ne sont pas autorisés.
Les deux exercices sont totalement indépendants. Le barème est indicatif.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Questions de cours (*5 points*)

1) Donner la définition d'une probabilité sur un univers fini Ω.

2) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle non vide du type $]b, a[$.
Quand dit-on que $-\infty$ est limite à gauche de f en a ? (Donner la définition.)

3) Énoncer le théorème de Rolle pour une fonction réelle de la variable réelle f.

4) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. On rappelle que la variance de X est $V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.
Démontrer que : $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ *(Formule de König-Huygens)*.

Exercice n°1 (*5 points*)

Une urne contient sept boules rouges et trois boules vertes toutes indiscernables au toucher. On extrait simultanément trois boules de l'urne et on observe leurs couleurs.

1) Donner un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.

2) On désigne par A l'évènement « Exactement une des trois boules tirées est verte ». Expliciter A à l'aide du modèle choisi et montrer alors que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{63}{120}$.

3) On suppose que chaque boule verte tirée rapporte cinq points et que chaque boule rouge tirée fait perdre deux points.
Soit X la variable aléatoire qui à tout tirage de trois boules fait correspondre le nombre de points gagnés.

a) Trouver la loi de la variable aléatoire X.

b) Montrer que l'espérance mathématique de X est $\mathbb{E}(X) = \dfrac{3}{10}$.

Tourner la page

$\boxed{\textbf{Exercice n°2}}$ (*10 points*)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Régularité de f.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}^*$.

c) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

2) Variations et point fixe de f.

a) Étudier les variations de la fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $u(x) = (1-x)e^x - 1$.
En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire (en le justifiant) que $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$. On trouvera une unique solution que l'on nommera α.

3) Une inégalité vérifiée par f.

a) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[\quad e^x - 1 \geqslant x$.
Établir alors que : $\forall x \in]0, +\infty[\quad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.
En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

c) On considère deux réels positifs a et b. Montrer que $|f(b) - f(a)| \leqslant \dfrac{1}{2}|b - a|$.

4) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1 - \alpha|$.

c) Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

`Fin du contrôle`