

Analyse et Probabilités 2

Contrôle continu du vendredi 13 mars 2026

Durée : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables et autres objets connectés ne sont pas autorisés.

Les trois exercices sont totalement indépendants. Le barème est indicatif.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Questions de cours (6 points)

- 1) Soit Ω un ensemble (univers) fini. Qu'appelle-t-on mesure de **probabilité** sur Ω ? (Donner la définition.)
- 2) Énoncer la formule des probabilités totales.
- 3) Quand dit-on que deux variables aléatoires X et Y , définies sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, sont indépendantes? (Donner la définition.)
- 4) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. Soit $b \in \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle non vide du type $]a, b[$. Quand dit-on que $+\infty$ est limite à gauche de f en b ? (Donner la définition avec les quantificateurs.)

Exercice n°1 (7 points)

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont totalement indépendantes

- 1) On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on observe leurs couleurs.
 - a) Donner, en le justifiant, un univers fini Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ qui modélisent cette expérience.
 - b) Calculer la probabilité de l'évènement A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
 - c) On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - d) On répète dix fois l'expérience en remettant dans l'urne, après chaque tirage, les deux boules tirées. Soit Y le nombre de fois où l'évènement A est réalisé au cours de ces dix répétitions. Déterminer la loi de probabilité de Y .
- 2) On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :

si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.

 - a) Calculer la probabilité des deux évènements suivants :
 B : « seule la première boule tirée est verte », C : « une seule des deux boules tirées est verte ».
 - b) Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

Tourner la page

Exercice n°2 (3,5 points)

Un code d'entrée dans une résidence est composé de cinq chiffres, ordonnés et pouvant se répéter. (Pour rappel, les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.)

- 1) Combien y a-t-il de codes possibles ?
- 2) Combien de tels codes comportent au plus un « 6 » ? (On justifiera soigneusement le résultat.)

Exercice n°3 (3,5 points)

- 1) Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \quad \left| \frac{x+3}{x} \right| \leq \frac{11}{3}$.
- 2) En déduire que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \quad \left| \left(\frac{6}{x} - x \right) - 1 \right| \leq \frac{11}{3} |x - 2|$.
- 3) Montrer alors, en utilisant la définition de la limite, que $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x} - x \right) = 1$.

Fin du contrôle