Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Corrigé du contrôle du 6 mars 2025

Questions de cours (*6 points*)

1) Sous ces conditions, on appelle ***probabilité conditionnelle*** de A sachant B, notée $\mathbb{P}_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A|B)$, le réel

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Il est clair que $\forall A \subset \Omega$, $\mathbb{P}_B(A) \geqslant 0$,
- On a bien $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$,
- Soit alors $(A, A') \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ avec $A \cap A' = \emptyset$.

$$\mathbb{P}_B(A \cup A') = \frac{\mathbb{P}((A \cup A') \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A' \cap B))}{\mathbb{P}(B)}.$$

Comme $A \cap B$ et $A' \cap B$ sont disjoints, on en déduit

$$\mathbb{P}_B(A \cup A') = \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A' \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A').$$

$\mathbb{P}_B$ est donc une probabilité sur Ω.

2) A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$. Ils sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$.
En supposant A et B incompatibles, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ donc A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$.

3) ℓ est limite à droite de f en a si : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (a < x \leqslant a + \delta) \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.

Remarques après correction :
• *Attention à la confusion entre condition nécessaire, condition suffisante et condition nécessaire et suffisante. Démarrer une rédaction par « Il faut vérifier que… » ne conduit pas à prouver une équivalence.*
• *La probabilité d'un événement est un nombre ; 0 aussi. Un événement est un ensemble, $\emptyset$ aussi. Écrire $\mathbb{P}(A) = \emptyset$ est donc un non-sens, écrire $A \cap B = 0$ aussi.*

Exercice n°1 (*3 points*)

Les chiffres étant ordonnés et pouvant se répéter, on peut voir un code d'entrée comme une 5-liste de l'ensemble des dix chiffres (le code 5404 étant vu comme (5,4,0,4)). L'ensemble des codes est alors $\mathscr{C} = [\![0, 9]\!]^5$ et il y a donc $\mathrm{Card}(\mathscr{C}) = 10^5$ codes possibles. Pour calculer le cardinal de l'ensemble Z des codes contenant au moins un « 0 », on remarque que le complémentaire $\overline{Z}$ n'est autre que l'ensemble des codes ne comprenant pas le chiffre « 0 », c'est-à-dire l'ensemble des 5-listes de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. On a donc $\mathrm{Card}(\overline{Z}) = 9^5$.
Comme $\mathrm{Card}(Z) = \mathrm{Card}(\mathscr{C}) - \mathrm{Card}(\overline{Z})$, on a finalement $\mathrm{Card}(Z) = 10^5 - 9^5 = 40\,951$.

Remarques après correction :
• *Il est important d'expliquer le modèle choisi. Choisir un modèle d'urne était possible mais il fallait alors bien préciser ce qu'étaient les boules.*
• *On attendait une justification précise, en lien avec les résultats établis en cours, des calculs effectués (multiplication (pourquoi ?) des choix puis soustraction (pourquoi ?)…*
• *Plus d'un étudiant sur quatre a réussi à parler de probabilité dans cet exercice. J'ai beau relire l'énoncé…*

Exercice n°2 (*5 points*)

1) Afin de munir notre univers de la probabilité uniforme, on imagine les dés colorés (l'un rouge, l'autre bleu) et on voit un résultat de l'expérience comme un couple (résultat du dé bleu, résultat du dé rouge). L'ensemble $\Omega = \{1, \cdots, 6\}^2$ des résultats est alors muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ (car les dés sont équilibrés). On remarque que $\text{Card}(\Omega) = 6^2 = 36$.

2) Si D est l'évènement « on obtient deux chiffres différents » alors $\overline{D}$ est l'évènement « on obtient deux chiffres identiques » donc $\overline{D} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$.
Par suite $\text{Card}(D) = 36 - 6 = 30$ et $\mathbb{P}(D) = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$.

3) Notons H l'évènement « on obtient une somme égale à 8 » et Q l'évènement « on obtient un produit supérieur à 4 »

a) $\mathbb{P}_D(H) = \dfrac{\mathbb{P}(D \cap H)}{\mathbb{P}(D)}$ avec $D \cap H = \{(2,6), (3,5), (5,3), (6,2)\}$ donc $\mathbb{P}_D(H) = \dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15}$

b) De même $\mathbb{P}_D(Q) = \dfrac{\mathbb{P}(D \cap Q)}{\mathbb{P}(D)}$ avec $\overline{D \cap Q} = \{(1,2), (2,1), (1,3), (2,3)\}$ donc $\mathbb{P}_D(Q) = \dfrac{26}{30}$.

Remarques après correction :
- *Certains étudiants ont choisi un univers ou l'ordre ne comptait pas. Attention, sur cet univers la probabilité n'est pas uniforme...*
- *Plus de la moitié des étudiants ont confondu $\mathbb{P}(Q)$ et $\mathbb{P}_D(Q)$ ou $\mathbb{P}_D(Q)$ et $\mathbb{P}(D \cap Q)$.*

Exercice n°3 (*6 points*)

1) Un résultat est une partie à deux éléments de l'ensemble des dix boules. Les boules étant indiscernables au toucher, on munit l'ensemble Ω des tirages de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
On remarque que $\text{Card}(\Omega) = \binom{10}{2} = 45$.

2) L'évènement « on obtient deux boules numérotées « 0 » » est alors l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des trois boules numérotées « 0 ». Sa probabilité est donc $\dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{1}{15}$.

3) La variable aléatoire X prend les valeurs 0 (lorsque l'une des boules tirées est numérotée « 0 »), -1 (lorsque l'une des boules est numérotée « -1 » et l'autre « 1 ») et 1 (lorsque les deux boules portent le numéro « -1 » ou les deux boules portent le numéro « 1 »).
$[X = 1]$ est donc la réunion disjointe de l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des cinq boules numérotées « -1 » et de l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des deux boules numérotées « 1 ». On a donc $\text{Card}([X = 1]) = \binom{5}{2} + \binom{2}{2} = 11$ et $\mathbb{P}([X = 1]) = \dfrac{11}{45}$.
$\overline{[X = 0]}$ est l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des sept boules qui ne sont pas numérotées « 0 » donc $\text{Card}(\overline{[X = 0]}) = \binom{7}{2} = 21$ et $\mathbb{P}([X = 0]) = \dfrac{45 - 21}{45} = \dfrac{24}{45}$.
Enfin, $\mathbb{P}([X = -1]) = 1 - \mathbb{P}([X = 0]) - \mathbb{P}([X = 1]) = \dfrac{10}{45}$.
(On pouvait aussi constater que $[X = -1]$ est en bijection avec le produit cartésien de l'ensemble des cinq boules numérotées « -1 » avec l'ensemble des deux boules portant le numéro « 1 ».)

4) En appelant succès l'évènement $[X = 0]$ (de probabilité $\dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$), la variable aléatoire Y compte le nombre de succès lors de la répétition indépendante (car les boules sont remises dans l'urne après chaque tirage) de n épreuves de Bernoulli de paramètre $\dfrac{8}{15}$. Y suit donc la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{8}{15}$:

$$Y(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n]\!] \quad \mathbb{P}([Y = k]) = \binom{n}{k} \left(\frac{8}{15}\right)^k \left(\frac{7}{15}\right)^{n-k}$$