Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Contrôle continu du jeudi 6 mars 2025

Durée : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables et autres objets connectés ne sont pas autorisés.
Les trois exercices sont totalement indépendants. Le barème est indicatif.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Questions de cours (*6 points*)

1) Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

a) Qu'appelle-t-on probabilité conditionnelle de A sachant B (que l'on note $\mathbb{P}_B(A)$) ?

b) Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_B : & \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}_B(A) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω.

2) On considère deux évènements A et B d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

a) Quand dit-on que A et B sont incompatibles (ou disjoints) ?

b) Quand dit-on que A et B sont indépendants ?

c) À quelle condition deux évènements A et B incompatibles sont-ils indépendants ?

3) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle non vide du type $]a, b[$. Quand dit-on que le réel ℓ est limite à droite de f en a ? (Donner la définition avec les quantificateurs.)

Exercice n°1 (*3 points*)

Un code d'entrée dans une résidence est composé de cinq chiffres, ordonnés et pouvant se répéter. (Pour rappel, les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.)
Combien de tels codes comportent au moins un « 0 » ? (On justifiera soigneusement le résultat.)

Exercice n°2 (*5 points*)

On lance deux dés classiques parfaitement équilibrés et on observe les chiffres apparents.

1) Donner, en le justifiant, un univers fini Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ qui modélisent cette expérience.

2) Calculer la probabilité d'obtenir deux chiffres différents.

3) Sachant que les deux chiffres obtenus sont différents, calculer la probabilité pour que :

a) la somme obtenue soit huit.

b) le produit des deux chiffres obtenus soit supérieur ou égal à 4.

Tourner la page

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ (*6 points*)

Un urne contient cinq boules numérotées « -1 », trois boules numérotées « 0 » et deux boules numérotées « 1 », indiscernables au toucher. On tire, au hasard et simultanément, deux boules de l'urne et on observe leurs numéros.

1) Donner, en le justifiant, un univers fini Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ qui modélisent cette expérience.

2) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules numérotées « 0 » ?

3) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des numéros obtenus. Donner, en le justifiant soigneusement, la loi de X.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On renouvelle n fois de suite l'expérience en remettant dans l'urne, après chaque tirage, les boules obtenues. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y qui donne le nombre de fois où l'on obtient un produit nul ?

`Fin du contrôle`