Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Corrigé du contrôle du 15 mars 2024

Questions de cours (*6 points*)

1) Formule du binôme de Newton : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2) $\mathbb{P}_X$ est donc bien une application de $\mathscr{P}(X(\Omega))$ dans $[0,1]$. Montons que c'est une probabilité sur $X(\Omega)$.

- Il est clair que $\forall E \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, $\mathbb{P}_X(E) \geqslant 0$ (par positivité de $\mathbb{P}$).
- $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}([X \in X(\Omega)]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ (par totalité de $\mathbb{P}$).
- Soit (E,F) un couple de parties de $X(\Omega)$ avec $E \cap F = \emptyset$. Alors, $[X \in E]$ et $[X \in F]$ sont deux évènements disjoints (un élément de l'intersection aurait une image qui serait à la fois dans E et dans F). Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X(E \cup F) &= \mathbb{P}([X \in E \cup F]) \\
&= \mathbb{P}([X \in E] \cup [X \in F]) \\
&= \mathbb{P}([X \in E]) + \mathbb{P}([X \in F]) \quad \text{par } \sigma\text{-additivité de } \mathbb{P} \\
&= \mathbb{P}_X(E) + \mathbb{P}_X(F)
\end{aligned}$$

3) $-\infty$ est limite à gauche de f en a si : $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (a - \delta \leqslant x < a \Longrightarrow f(x) \leqslant A)$

Exercice n°1 (*5 points*)

1) Une main est une partie à 4 éléments (une 4-combinaison) de l'ensemble C des 32 cartes (ni répétition ni ordre). L'ensemble $\mathscr{M}$ des mains est donc de cardinal $\binom{32}{4} = \dfrac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 40 \times 31 \times 29 = 35\,960$.

2) Une main comportant exactement un trèfle peut être vue comme un couple formé d'un trèfle et d'une partie à trois éléments de l'ensemble des cartes qui ne sont pas des trèfles.
En notant $T = \{7T, 8T, 9T, 10T, VT, DT, RT, AT\}$ l'ensemble des trèfles, l'ensemble des telles mains est alors (avec les notations du cours) $T \times \mathscr{C}_3(C \backslash T)$. Il y a donc $\mathrm{Card}(T).\mathrm{Card}(\mathscr{C}_3(C \backslash T)) = 8 \times \binom{24}{3}$ soit $8 \times 4 \times 23 \times 22 = 16\,192$ telles mains.

3) *<u>Remarque :</u> Il peut être tentant de proposer une solution de la forme : « On choisit une dame parmi les 4 puis trois autres cartes (parmi les 31 qui restent). Il y a donc $\binom{4}{1} \times \binom{31}{3} = 17\,980$ telles mains.*
La formalisation insuffisante de cette réponse (qui est fausse !) cache une erreur classique : on compte plusieurs fois certaines mains...
Il est ici beaucoup plus facile de passer par le complémentaire. Si on note $\mathscr{D}$ l'ensemble des mains comportant au moins une dame, $\overline{\mathscr{D}}$ est l'ensemble des mains qui ne contiennent aucune dame donc l'ensemble des 4-combinaisons de l'ensemble des 28 cartes qui ne sont pas des dames.
On a donc $\mathrm{Card}(\mathscr{D}) = \mathrm{Card}(\mathscr{M}) - \mathrm{Card}(\overline{\mathscr{D}}) = \binom{32}{4} - \binom{28}{4}$ soit $8 \times 5 \times 29 \times 31 - 9 \times 7 \times 13 \times 25 = 15\,485$ telles mains.

Exercice n°2 (*4 points*)

1) Un résultat peut être vu comme une 2-liste (un couple) de $\{0,1,2\}$. Les boules étant indiscernables au toucher et le tirage ayant lieu au hasard, on munit l'ensemble Ω de ces 2-listes de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On remarque que $\mathrm{Card}(\Omega) = 3^2 = 9$.

2) On a $X(\Omega) = \{0,1,2,4,5,8\}$. De plus $[X = 0] = \{(0,0)\}$ donc $\mathbb{P}([X=0]) = \dfrac{1}{9}$. On trouve de même $\mathbb{P}([X=2]) = \mathbb{P}([X=8]) = \dfrac{1}{9}$. Comme $[X=1] = \{(0,1),(1,0)\}$, on a $\mathbb{P}([X=1]) = \dfrac{2}{9}$. De même, $\mathbb{P}([X=4]) = \mathbb{P}([X=5]) = \dfrac{2}{9}$.

3) Comme $[X \leqslant 1,7^2] = [X=0] \cup [X=1] \cup [X=2]$ (réunion disjointe), on a :

$$\mathbb{P}([X \leqslant 1,7^2]) = \mathbb{P}([X=0]) + \mathbb{P}([X=1]) + \mathbb{P}([X=2]) = \frac{4}{9}.$$

4) L'évènement « le point appartient à D » (succès) n'est autre que $[X \leqslant 1,7^2]$ (car D a pour équation $x^2+y^2 \leqslant 1,7^2$). La variable aléatoire Y compte donc le nombre de succès lors de la répétition indépendante de n épreuves de Bernoulli de paramètre $\frac{4}{9}$. Y suit donc la loi binomiale de paramètres n et $\frac{4}{9}$:
$Y(\Omega^n) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}([Y=k]) = \binom{n}{k}\left(\frac{4}{9}\right)^k\left(\frac{5}{9}\right)^{n-k}$.

Exercice n°3 (*4 points*)

1) Puisque le dé est équilibré, chacune des six faces a la même probabilité d'apparaître. Puisqu'une seule des faces porte le numéro 1, $\mathbb{P}(D_1) = \dfrac{1}{6}$. Deux faces portent le numéo 2 donc $\mathbb{P}(D_2) = \dfrac{2}{6}$. Enfin, $\mathbb{P}(D_3) = \dfrac{3}{6}$.
Si le dé indique 1, alors la probabilité de gagner est celle de tirer une des quatre voyelles parmi les dix lettres). On a donc : $\mathbb{P}_{D_1}(G) = \frac{4}{10}$.

Si le dé indique 2, alors la probabilité de gagner est celle de tirer deux voyelles (parmi quatre) en tirant deux lettres parmi dix. On a donc : $\mathbb{P}_{D_2}(G) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{4\times 3}{2\times 1} \div \dfrac{10\times 9}{2\times 1} = \dfrac{2}{15}$.

Si le dé indique 3, alors la probabilité de gagner est celle de tirer trois voyelles (parmi quatre) en tirant trois lettres parmi dix. On a donc : $\mathbb{P}_{D_3}(G) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{\cancel{4}\times 3\times \cancel{2}}{10\times 9\times \cancel{8}} = \dfrac{1}{30}$.

On a $G = G\cap(D_1\cup D_2\cup D_3) = (G\cap D_1)\cup(G\cap D_2)\cup(G\cap D_3)$ (réunion disjointe) donc

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(G\cap D_1) + \mathbb{P}(G\cap D_2) + \mathbb{P}(G\cap D_3) = \mathbb{P}(D_1)\times\mathbb{P}_{D_1}(G) + \mathbb{P}(D_2)\times\mathbb{P}_{D_2}(G) + \mathbb{P}(D_3)\times\mathbb{P}_{D_3}(G)$$

soit $\mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{6}.\dfrac{4}{10} + \dfrac{2}{6}.\dfrac{2}{15} + \dfrac{3}{6}.\dfrac{1}{30} = \dfrac{23}{180}$.

2) Un joueur a gagné la partie. Alors la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé est

$$\mathbb{P}_G(D_1) = \frac{\mathbb{P}(D_1\cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}_{D_1}(G).\mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(G)}$$

soit $\mathbb{P}_G(D_1) = \dfrac{\frac{4}{10}.\frac{1}{6}}{\frac{23}{180}} = \dfrac{12}{23}$.

3) Les boules tirées étant remises dans l'urne après chaque partie, les parties sont considérées comme indépendantes. Désignons par X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées sur six jouées. X compte le nombre de succès (gagner la partie) dans une répétition indépendante d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(G)$ donc X suit la loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{23}{180}$.

La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est alors

$$\mathbb{P}([X\geqslant 1]) = 1 - \mathbb{P}([X=0]) = 1 - \left(1 - \frac{23}{180}\right)^6$$

Exercice n°4 (*3 points*)

1) Pour $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ on a $|x-2| \leqslant |x|+2 \leqslant \dfrac{3}{2}+2$ soit $|x-2| \leqslant \dfrac{7}{2}$. D'autre part $|x| \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\left|\dfrac{x-2}{x}\right| \leqslant \dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = 7$.

2) Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] = \left[1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right]$. Alors $\left|\left(\dfrac{2}{x}+x\right)-3\right| = \left|\dfrac{2+x^2-3x}{x}\right|$ donc, d'après la question précédente, $\left|\left(\dfrac{2}{x}+x\right)-3\right| = \left|\dfrac{x-2}{x}.(x-1)\right| \leqslant 7\,|x-1|$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \inf(\frac{\varepsilon}{7}, \frac{1}{2})$. Pour tout réel x on a alors : $|x-1| \leqslant \delta \Longrightarrow \left|\left(\dfrac{2}{x}+x\right)-3\right| \leqslant \varepsilon$.

On a montré : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x}+x\right) = 3$.