Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Contrôle continu du vendredi 15 mars 2024

Durée : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables et autres objets connectés ne sont pas autorisés.
Les quatre exercices sont totalement indépendants. Le barème est indicatif.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Questions de cours (*5 points*)

1) Énoncer la formule du binôme de Newton.

2) Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_X : \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ E & \longmapsto & \mathbb{P}([X \in E]) \end{array}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$.

3) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle non vide du type $]b, a[$. Quand dit-on que $-\infty$ est limite à gauche de f en a ? (Donner la définition.)

Exercice n°1 (*4 points*)

Dans cet exercice, on donnera les réponses sous forme de produits d'entiers (ou sous forme de différences de produits d'entiers). **Tous les résultats devront être dûment justifiés.**
On considère les « mains » de 4 cartes que l'on peut extraire d'un jeu classique de 32 cartes.

1) Combien y a-t-il de mains différentes ?

2) Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un trèfle ?

3) Combien y a-t-il de mains comprenant au moins une dame ?

Exercice n°2 (*4 points*)

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules du sac et on note leurs numéros respectivement x et y.

1) Donner, en le justifiant, un univers fini Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ qui modélisent cette expérience.

2) À chaque tirage on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal, le point M de coordonnées (x, y).

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui, à chaque tirage associe la somme $x^2 + y^2$.

b) Montrer que $\mathbb{P}([X \leqslant 1,7^2]) = \dfrac{4}{9}$. *(On pourra remarquer que $1,7^2 = 2,89$.)*

c) On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y qui donne le nombre de points appartenant au disque D centré en l'origine et de rayon 1,7 ?

Tourner la page

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ (*4 points*)

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la (ou les) boule(s) tirée(s).
On définit les évènements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 » $\quad$ D_2 : « le dé indique 2 » $\quad$ D_3 : « le dé indique 3 » $\quad$ G : « la partie est gagnée ».

1) Interpréter l'énoncé en donnant (sous forme de fractions irréductibles) les probabilités $\mathbb{P}(D_1)$, $\mathbb{P}(D_2)$ et $\mathbb{P}(D_3)$. Déterminer alors les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{G})$, $\mathbb{P}_{\mathrm{D}_2}(\mathrm{G})$, et $\mathbb{P}_{\mathrm{D}_3}(\mathrm{G})$.
Montrer enfin que $\mathbb{P}(G) = \dfrac{23}{180}$.

2) Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3) Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne au moins une.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ (*3 points*)

1) Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \quad \left|\dfrac{x-2}{x}\right| \leqslant 7$.

2) En déduire, <u>en utilisant la définition de la limite</u>, que $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{x} + x\right) = 3$.

`Fin du contrôle`