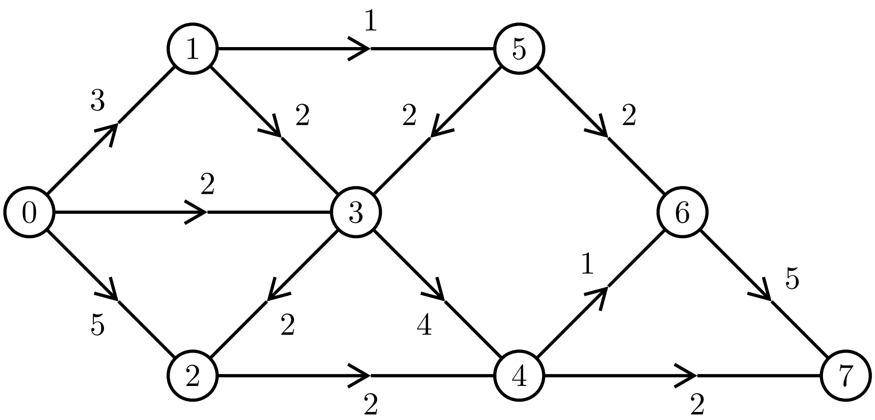
**Université de Rennes 1**
**UFR Mathématiques**

Master 1 – 2012-2013
Optimisation recherche opérationnelle

**Examen du 18 décembre 2012**

*Durée : 2h - Documents autorisés*
*Le sujet comporte quatre exercices sur deux pages*

**Exercice 1.** **Réseaux**
Nous considérons le réseau ci-dessous où les nombres en face des arcs représentent leur coût unitaire d'utilisation.




1) Définir le graphe selon les listes de successeurs de ses différents sommets.

2) Déterminer l'ensemble des sommets atteignables depuis 0 par l'algorithme d'exploration BFS ("First In - First Out"). Puis, déterminer l'ensemble des sommets atteignables depuis 2 par l'algorithme d'exploration DFS ("Last In - First Out").

3) Par application de l'algorithme de Dijkstra, déterminer les longueurs des plus courts chemins de $a$ à chaque sommet atteignable depuis 0.

4) Nous considérons dans cette question le concept de graphe pour représenter un réseau informatique. Les valeurs numériques associées aux arcs représentent alors une vitesse de transmission de la connection correspondante et les arcs ne sont plus orientés. La vitesse d'une chaîne est la valeur minimale des vitesses de transmission des arcs constituant la chaîne. Modifier l'algorithme de Dijkstra de sorte qu'il détermine les chaînes de vitesse maximale entre le sommet 0 et tous les autres sommets du graphe.

**Exercice 2.** **Programmation linéaire**

Un commerçant souhaite réaliser deux types d'assortiments avec les bonbons au chocolat dont il dispose, dont des truffes et des pralinés fins. Il prévoit deux compositions : la première composition conduit à des boîtes qui contiennent majoritairement des chocolats noirs et qu'il vendra 20 euros l'unité. Les paquets issus de la seconde composition seront vendus 15 euros l'unité et contiendront essentiellement des chocolats au lait.
Parmi les bonbons dont il dispose, il sait que les truffes et les pralinés fins sont les seuls qu'il possède en quantité non renouvelable avant la mise en vente. Il possède 240 truffes et 300 pralinés fins. Mais il tient absolument à mettre exactement 6 truffes et 3 pralinés fins (resp. 3 truffes et 5 pralinés fins) dans chaque boîte de la première composition (resp. de la deuxième composition).
Enfin, en ce mois de décembre, avec les tarifs prévus, il sait que sa production sera achetée intégralement. Il souhaite maximiser les recettes réalisées à la vente de ces assortiments.

1) Ecrire le problème sous forme d'un problème de programmation linéaire.

2) Résoudre le problème graphiquement (quantités optimales d'assortiments de chaque composition, valeur de la recette optimale).

**Exercice 3.** **Simplexe**

On considère le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & z = 20x_1 + 15x_2 \\ s.c. & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & 4x_1 + 4x_2 \leq 5, \\ & x_1\ ,\ x_2 \geq 0. \end{array} \qquad (\mathscr{P}).$$

1) Ecrire le problème $(\mathscr{P})$ sous la forme standard.

2) Résoudre le problème $(\mathscr{P})$ par la méthode du simplexe sans chercher à réduire la taille du problème.

3) Ecrire le problème dual de $(\mathscr{P})$.

4) Résoudre le problème dual en exploitant les résultats obtenus pour le primal.

5) Résoudre le problème dual graphiquement.

**Exercice 4.** **Méthodes du gradient**

Soit $J$ la fonctionnelle quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $J(x, y) = ax^2 + by^2$ avec $a, b > 0$.

1) Quel est le minimum de $J$ ? En quel point est-il atteint ? Pour $(\overline{x}, \overline{y})$ donné dans $\mathbb{R}^2$, quelle est en $(\overline{x}, \overline{y})$ la direction de descente **globalement** optimale (c'est à dire la direction permettant de rencontrer directement le point minimisant $J$) ?

2) Dans le cas où la méthode est initialisée à $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, établir une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, x_0, y_0)$ pour que la méthode du gradient à pas optimal converge en une seule itération.

3) Etablir une condition suffisante de la convergence de la méthode du gradient à pas fixe, portant sur le pas de la méthode.