



Des pavages particuliers : Les maillages éléments finis



Qu'est ce qu'un maillage ?

A quoi ça sert ?
Exemple d'utilisation des maillages

Un maillage est une structure polyédrique :



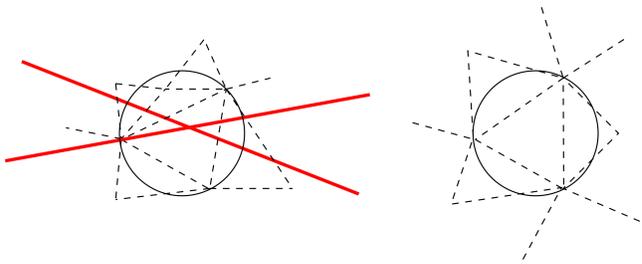
- dont les faces sont des triangles \triangle ou des quadrangles \square ,
- facile à manipuler pour les mathématiciens,
- facile à interpréter pour les ordinateurs.

Les maillages permettent d'approcher des objets géométriques en vue de simulations numériques :

- aérodynamisme d'un véhicule,
- onde électromagnétique autour d'une antenne,
- résistance d'une pièce de moteur,
- élasticité d'une membrane biologique ou de synthèse,
- écoulement de l'eau autour de la coque d'un bateau, ...

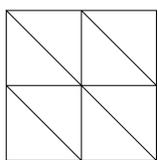
Un bon maillage doit éviter des triangles trop aplatis :

Un bon critère en dimension 2 : l'intérieur du disque circonscrit à un triangle du maillage ne contient aucun sommet du maillage (critère de Delaunay).

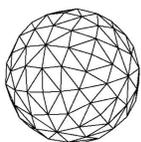


La présence de triangles trop aplatis peut nuire à la précision des calculs éléments finis faits sur de tels maillages.

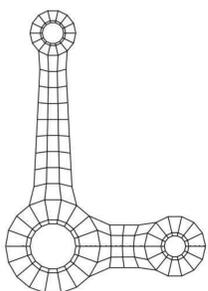
Quelques maillages simples et d'autres plus compliqués :



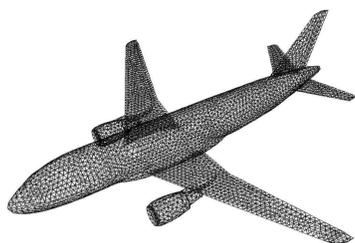
Maillage exact d'un carré



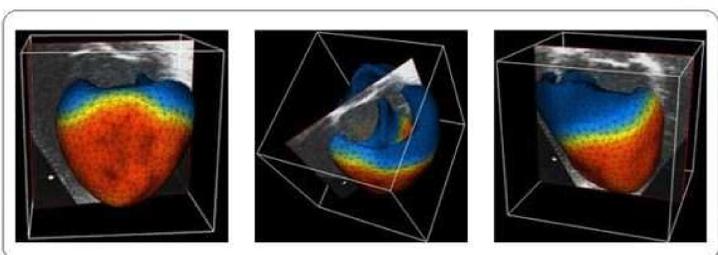
Maillage approchant une sphère



Maillage d'un levier



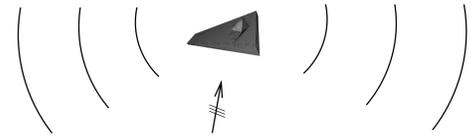
Airbus A318 - 15 784 triangles
(thèse de G. Sylvand)



Simulation de l'activité cardiaque (<http://www-sop.inria.fr/CardioSense3D/>)

Le problème physique :

Propagation d'une onde radar autour d'une aile d'avion :



La géométrie d'une aile d'avion est complexe : elle peut présenter des failles, des "creux" (concavités) qui influencent fortement la propagation de l'onde. Leur prise en compte dans les simulations est primordiale. On considère ici le CETAF, un objet modèle qui présente de tels détails.

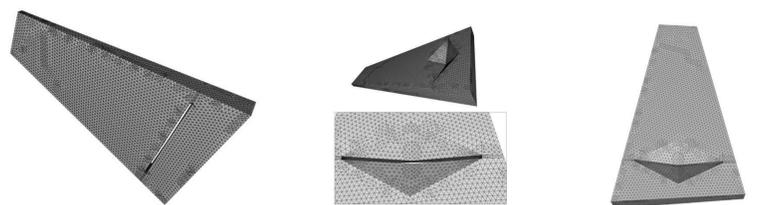
Le modèle mathématique - équations :

La propagation d'onde autour du domaine est décrite par un système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \Delta u + \kappa^2 u = 0, & \text{à l'extérieur du domaine,} \\ \frac{\partial u}{\partial n} / \Gamma + i\kappa u / \Gamma = g, & \text{sur la surface de l'objet,} \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i\kappa u \right) = 0, & \text{condition à l'infini.} \end{cases}$$

La résolution :

Par des formulations dites intégrales, nous nous ramenons à des équations définies sur la surface de l'objet. Leur résolution explicite étant impossible, nous en cherchons une solution approchée en utilisant l'outil informatique. La méthode des éléments finis permet de définir le problème sur une approximation de la géométrie du domaine, son maillage :

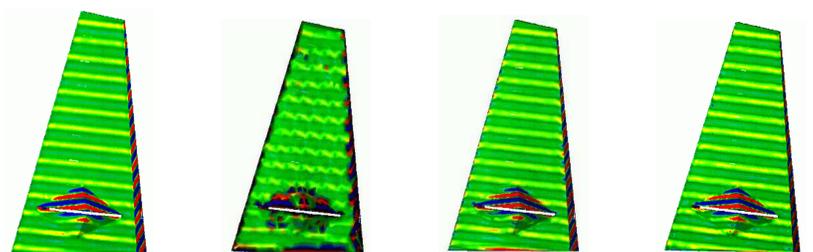


Maillage du CETAF - Objet présentant de multiples difficultés

L'inconnue du nouveau problème est la valeur d'un potentiel sur les points du maillage. De jolis efforts mathématiques ramènent la recherche de cette inconnue à la résolution d'un gros système linéaire (jusqu'à plusieurs millions d'inconnues) que l'ordinateur pourra résoudre selon différentes méthodes.

Les résultats :

Selon la méthode utilisée et le réglage de ses paramètres, les résultats approchent plus ou moins bien la solution exacte :



Propagation d'ondes sur le CETAF - de gauche à droite :

a) IE+FMM ($\lambda/7$) ; b) IE+FMM ($\lambda/1.7$) ; c) IE+FMM+MD ($\lambda/1.7$) ; d) IE+FMM ($\lambda/7$) init. par (c) .

Ces paramètres doivent être choisis en considérant les caractéristiques physiques du problème. Ainsi, une mauvaise paramétrisation (ici, la finesse du maillage) amènera à un mauvais résultat (figure b)), à moins de compenser par une correction judicieuse (figure c)).