Simulation numérique pour l'aéronautique

Eric Darrigrand

UNIVERSITÉ DE RENNES 1
UFR Mathématiques

IRMAR

Amphis des lycéens

Introduction

- **La simulation numérique**
  - motivée par des applications nombreuses et variées : médecine, construction d'ouvrages, véhicules, phénomènes de transport (mécanique des fluides, dispersion d'un polluant, ...), ...
  - objectifs : reproduire de manière virtuelle et donc à moindre coût des phénomènes compliqués
  - outils : modélisation (écrire des formules mathématiques pour décrire la physique, chimie, biologie, ...) ; méthodes numériques (analyses mathématiques, développements algorithmiques) ; informatique (super-calculateurs, langages de programmation), ...
- **Aéronautique – des sciences de l'extrême**
  - des vitesses exceptionnelles : aérodynamisme, résistance des matériaux
  - exigences hors normes en terme de fiabilité
  - des coûts de réalisation gigantesques

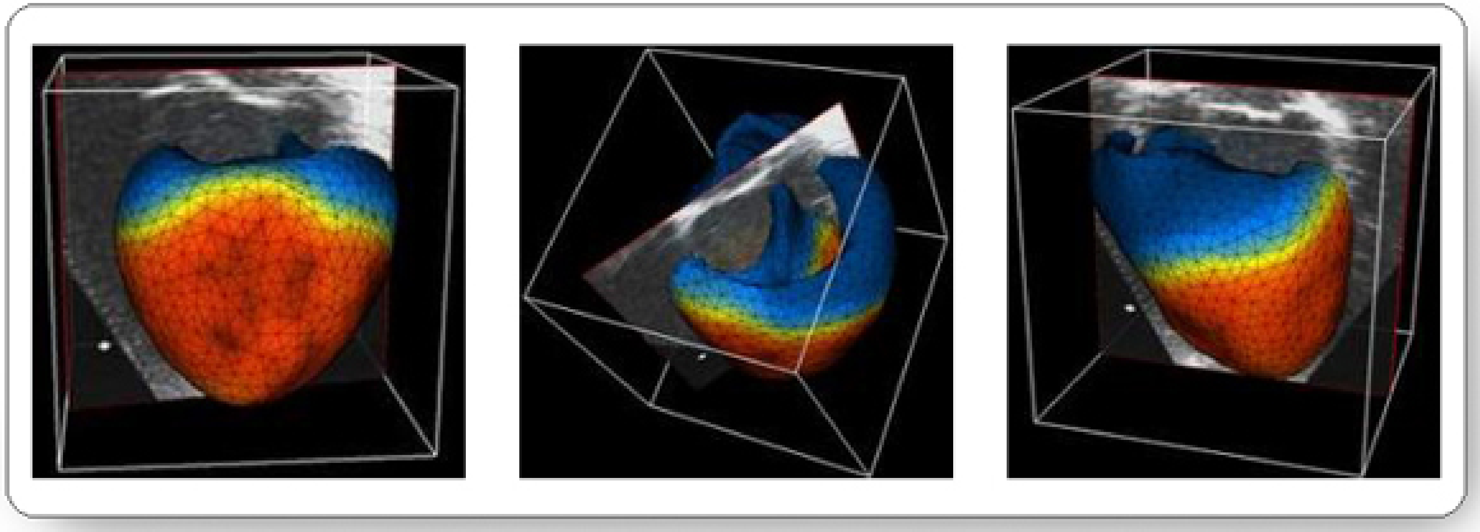
Plan

- **Exemples d'applications de la simulation numérique**

- **Un outil de la simulation numérique : les éléments finis**
  - concept de "formulation variationnelle"
  - "discrétisation", "maillages"
  - un système linéaire difficile à résoudre

- **Onde radar et aéronautique**
  - problème physique et équation mathématique
  - maillages et résultats numériques
  - "problème inverse"

Electrocardiogrammes



(source : http://www-sop.inria.fr/CardioSense3D/)

- des mathématiques pour une meilleure analyse de l'activité électrique du cœur
- objectifs : vers des électrocardiogrammes permettant de déceler davantage de maladies cardiaques

Viaduc de Millau

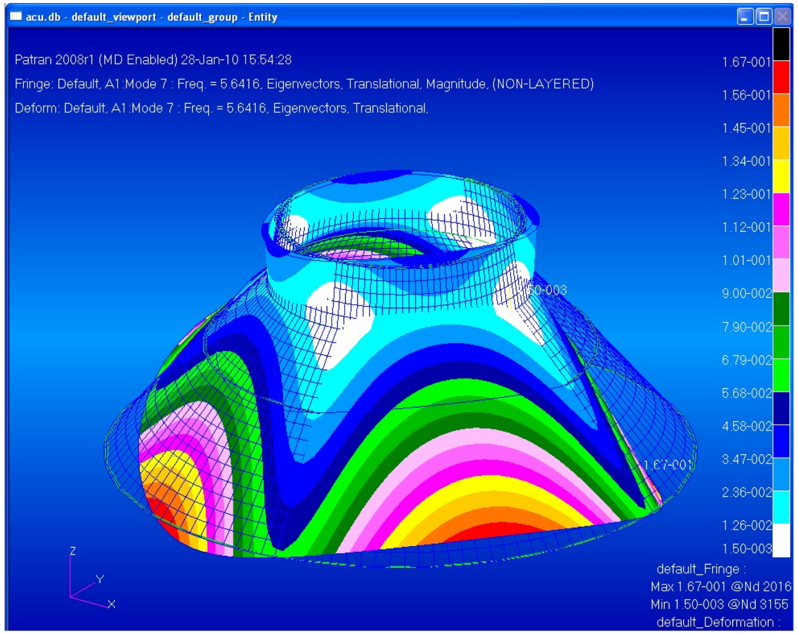
“Des calculs avancés

pour un ouvrage exceptionnel”

technique d’éléments finis

- résistance et résonance des matériaux
- objectif : faire face aux sollicitations des vents ; supporter les charges

Ariane 5



- résistance des matériaux (ici, l'adaptateur charge utile
  source : http://antoinelegay.free.fr/acu/sujet_tp_acu.html)
- objectifs : résistance de chaque élément au décollage

Exemples d’applications de la simulation numérique

Avions

- résistance, aérodynamisme, discrétion acoustique et électromagnétique
- objectif : maximiser la fiabilité ; minimiser les nuisances ; ...
- (source des images : thèse de Guillaume Sylvand)

“Formulation variationnelle” – cas $f = m\,a$

L’équation s’écrit $m\dfrac{d^2u}{dx^2} = f$ où

- f est un ensemble de forces connues
- m désigne une masse
- u est l’inconnue et désigne une position

et équivaut à chercher u telle que “pour tout v” :

$$(m\frac{d^2u}{dx^2}, v) = (f, v)$$

- cette relation est une formulation variationnelle
- v est désignée fonction test
- “pour tout v” signifie que l’on choisit un cadre fonctionnel ...
- “(., .)” est un produit scalaire dans ce cadre fonctionnel ...

“Discrétisation” de l’inconnue u

- choix d’un espace de fonctions de dimension finie dont on connaît une base v_1, v_2, ..., v_n ;
- expression approchée de u dans cet espace

$$u \approx \sum_{j=1}^{n} U_j v_j$$

où U_j est un nombre inconnu réel pour tout $j = 1, ..., n$;

- considération des v_i, $i = 1, ..., n$, en place de la fonction test v
- “formulation variationnelle discrète” : pour tout $i = 1, ..., n$

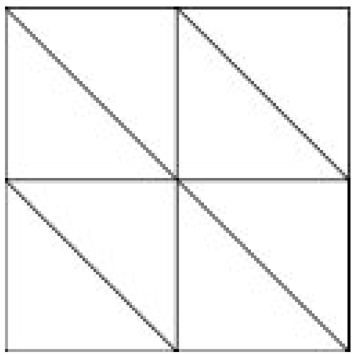
$$\sum_{j=1}^{n} (m \frac{d^2 v_j}{dx^2}, v_i) U_j = (f, v_i)$$

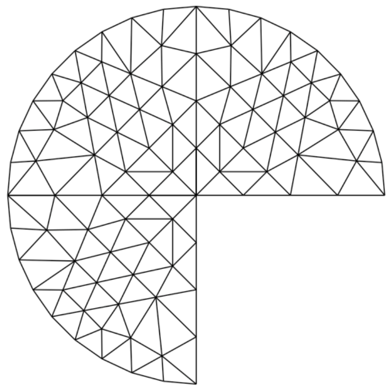
$\longrightarrow$ **on se ramène à la résolution d’un système linéaire**

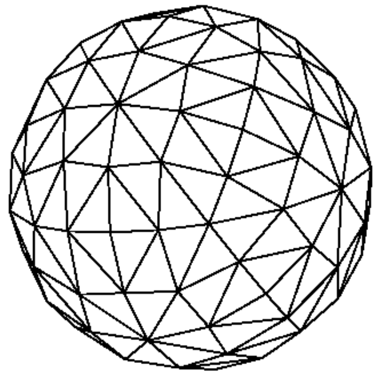
Un outil de la simulation numérique : les éléments finis

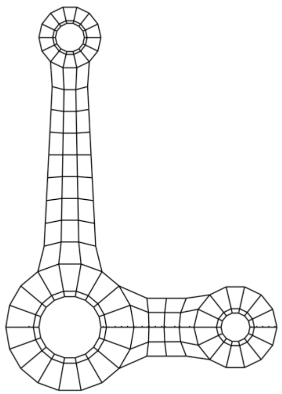
"Discrétisation" de la géométrie : les maillages

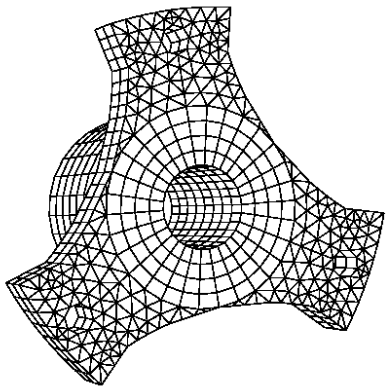
- un nuage de points organisé
- défini par des segments en 1D, des triangles ou "quadrangles" en 2D, des prismes ou des tétraèdres en 3D généralement ...





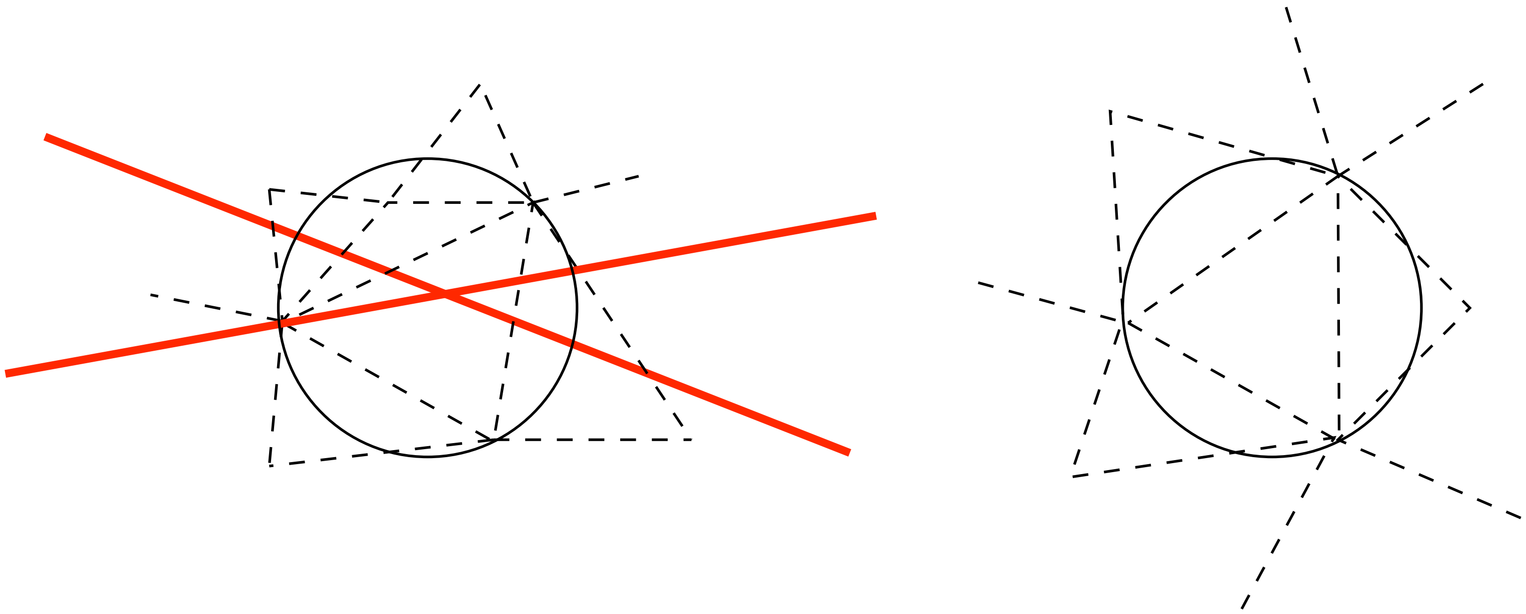






Un critère de qualité d'un maillage

- un bon maillage évite des triangles trop aplatis ;
- critère de Delaunay : l'intérieur du disque circonscrit à un triangle du maillage ne contient aucun sommet du maillage.



Des triangles trop aplatis peuvent nuire à la précision des calculs éléments-finis.

Un système linéaire difficile à résoudre ... pour l'ordinateur

$$(1)\ \left\{\begin{array}{ll} \varepsilon x + y & = \dfrac{1}{2} \\ x + y & = 1 \end{array}\right. \quad , \quad (2)\ \left\{\begin{array}{ll} x + y & = 1 \\ \varepsilon x + y & = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad , \quad (3)\ \left\{\begin{array}{ll} x + \dfrac{1}{\varepsilon} y & = \dfrac{1}{2\varepsilon} \\ x + y & = 1 \end{array}\right.$$

Un système linéaire difficile à résoudre ... pour l'ordinateur

$$(1)\left\{\begin{array}{ll}\varepsilon x + y & = \dfrac{1}{2}\\ x + y & = 1\end{array}\right. \quad , \quad (2)\left\{\begin{array}{ll}x + y & = 1\\ \varepsilon x + y & = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \quad , \quad (3)\left\{\begin{array}{ll}x + \dfrac{1}{\varepsilon} y & = \dfrac{1}{2\varepsilon}\\ x + y & = 1\end{array}\right.$$

Solution exacte pour les trois systèmes : $(1/(2-2\varepsilon)) \times (1\ ;\ 1-2\varepsilon)$

Un système linéaire difficile à résoudre ... pour l'ordinateur

$$(1)\ \begin{cases} \varepsilon x + y & = \dfrac{1}{2} \\ x + y & = 1 \end{cases} \quad , \quad (2)\ \begin{cases} x + y & = 1 \\ \varepsilon x + y & = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad , \quad (3)\ \begin{cases} x + \dfrac{1}{\varepsilon} y & = \dfrac{1}{2\varepsilon} \\ x + y & = 1 \end{cases}$$

Solution exacte pour les trois systèmes : $(1/(2-2\varepsilon)) \times (1\ ;\ 1-2\varepsilon)$

Solution exacte pour $\varepsilon = 0$ (cas (1) et (2)) : $(x; y) = (1/2\ ;\ 1/2)$

Un système linéaire difficile à résoudre ... pour l'ordinateur

$$(1)\ \left\{\begin{array}{ll} \varepsilon x + y & = \dfrac{1}{2} \\ x + y & = 1 \end{array}\right. \quad , \quad (2)\ \left\{\begin{array}{ll} x + y & = 1 \\ \varepsilon x + y & = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad , \quad (3)\ \left\{\begin{array}{ll} x + \dfrac{1}{\varepsilon} y & = \dfrac{1}{2\varepsilon} \\ x + y & = 1 \end{array}\right.$$

Solution exacte pour les trois systèmes : $(1/(2-2\varepsilon)) \times (1\ ;\ 1-2\varepsilon)$

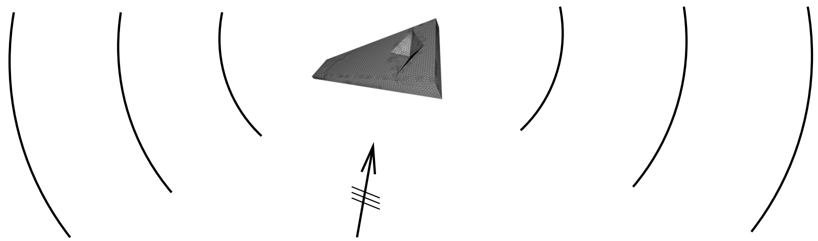
Solution exacte pour $\varepsilon = 0$ (cas (1) et (2)) : $(x; y) = (1/2\ ;\ 1/2)$

Solutions par la "méthode de Gauss" pour $\varepsilon > 0$ plus petit que la précision machine (c'est-à-dire que pour l'ordinateur, $1 \pm \varepsilon = 1$) :

$$(1) \text{ et } (3)\ :\ (x\ ;\ y) = (1\ ;\ 1/2\ -\ \varepsilon) \quad , \quad (2)\ :\ (x\ ;\ y) = (1/2\ +\ \varepsilon\ ;\ 1/2\ -\ \varepsilon)$$

Onde radar et aéronautique

Le problème physique : propagation d'une onde radar autour d'un objet volant



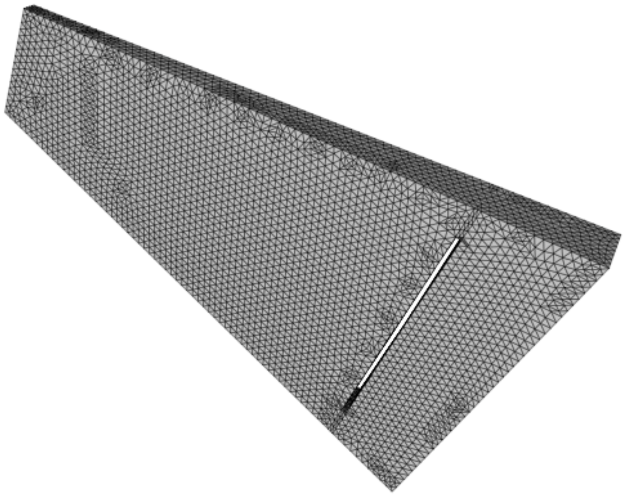
- caractéristiques de la géométrie, le CETAF : des failles, des "creux" (concavités).
- un objectif de cette géométrie : mettre les logiciels à rude épreuve.

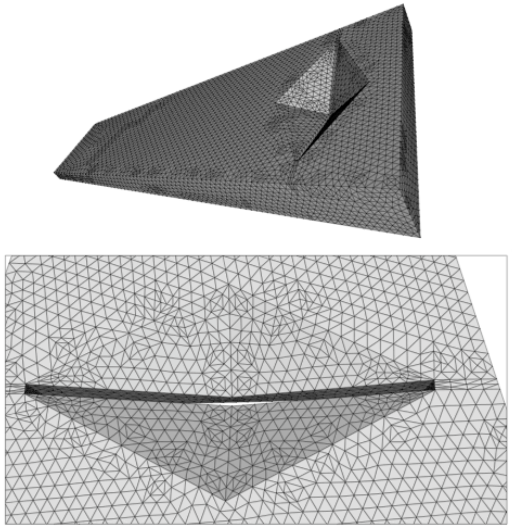
Le modèle mathématique - équations

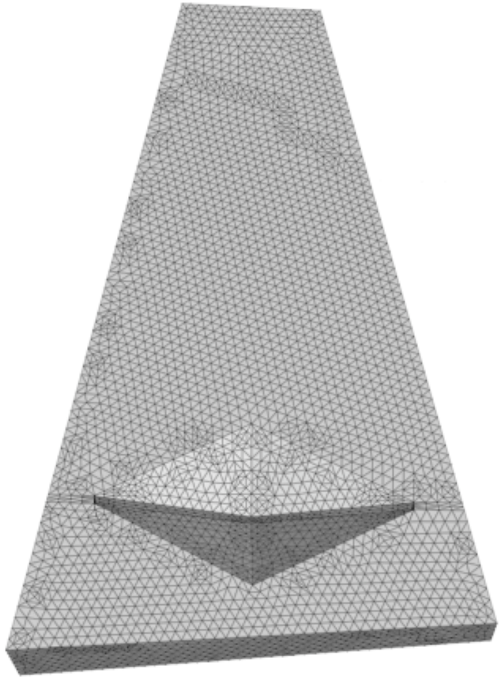
"Equations aux dérivées partielles" :

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta u + \kappa^2 u = 0 \ , & \text{à l'extérieur du domaine,} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}_{/\Gamma} + \imath\kappa u_{/\Gamma} = g \ , & \text{sur la surface de l'objet,} \\ \lim\limits_{r \to +\infty} r\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - \imath\kappa u\right) = 0 \ , & \text{condition à l'infini.} \end{array}\right.$$

Discrétisation



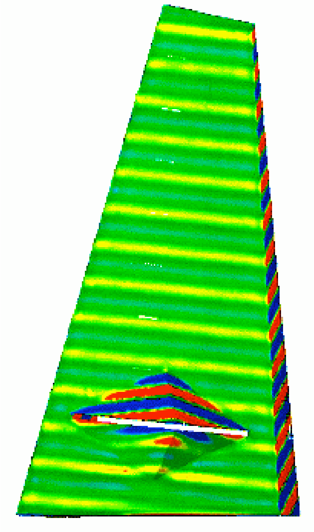


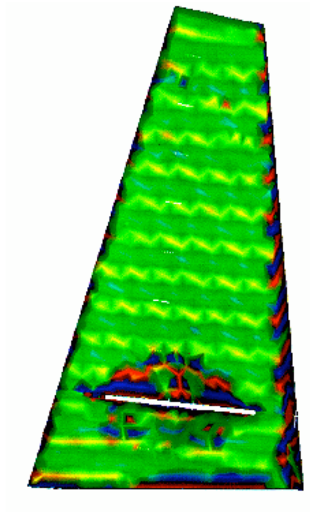


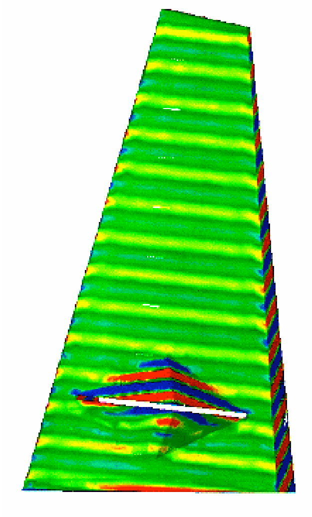
- création d'un maillage
- définition d'une base éléments-finis
- ... un système linéaire de plusieurs milliers ou millions d'inconnues

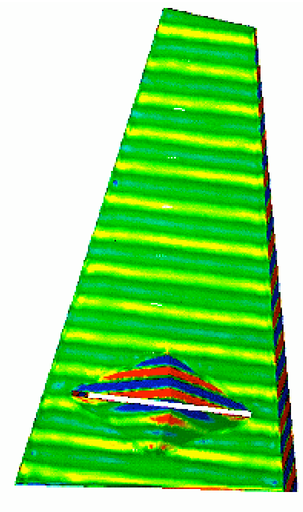
Onde radar et aéronautique

Résultats numériques en images



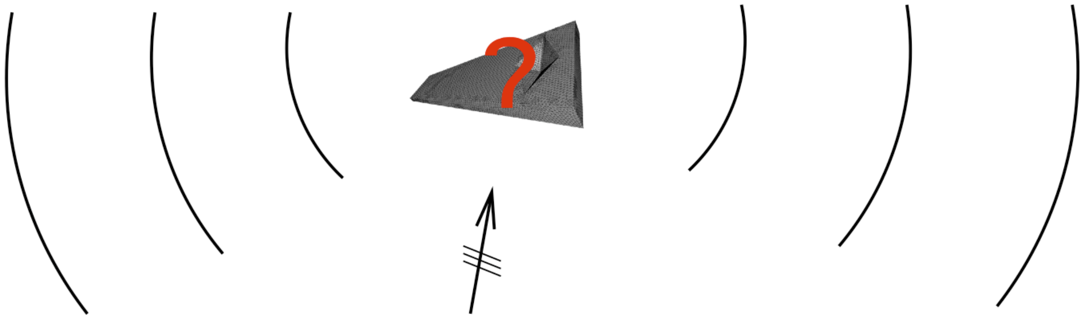






- Image 1 : méthode FMM – maillage fin – 7 itérations – 1 semaine ;
- Image 2 : méthode FMM – maillage grossier – 7 itérations – quelques minutes ;
- Image 3 : méthode FMD – maillages grossier (inconnues) et fin (géométrie) – 7 itérations – une journée ;
- Image 4 : méthode FMD + 2 itérations de la méthode FMM – 3 jours.

Problème inverse



Autre problématique : celle de l'OVNI

- on connaît la réponse radar
- on veut retrouver la forme de l'objet