



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*Mention : Physique*

**École doctorale Sciences de la Matière**

présentée par

**Merline Flore DJOUWE MEFFEJA**

préparée à l'unité de recherche IPR UMR CNRS 6251  
Institut de Physique de Rennes  
U.F.R Structure et Propriétés de la Matière

---

**Intitulé de la thèse :**

**Simulation et  
modélisation de  
milieux granulaires  
confinés**

**Thèse soutenue à Rennes  
le 20 Janvier 2012**

devant le jury composé de :

**James Thomas JENKINS**

Professeur - Cornell University / *Rapporteur*

**Jérôme JAFFRE**

Directeur de Recherche – INRIA Rocquencourt/  
*Rapporteur*

**Nicolas VANDEWALLE**

Professeur – GRASP - Université de Liège /  
*Examineur*

**Lydie STARON**

Chargé de Recherche CNRS - Institut Jean le Rond  
d'Alembert/ *Examineur*

**Patrick RICHARD**

Maitre de conférences – IPR - Université de  
Rennes 1 / *Directeur de thèse*

**Édouard CANOT**

Chargé de Recherche CNRS - IRISA / *Co-directeur  
de thèse*



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>Chapitre 1 Description d'écoulement de matériaux granulaires</b>	<b>11</b>
1.1 Régimes d'écoulement granulaire . . . . .	12
1.1.1 Régime dilué . . . . .	13
1.1.2 Régime quasi-statique . . . . .	13
1.1.3 Régime dense . . . . .	14
1.2 Différentes configurations . . . . .	15
1.2.1 Écoulements confinés . . . . .	15
1.2.2 Écoulements à fond rigide . . . . .	16
1.2.3 Écoulements sur fond meuble . . . . .	17
1.3 Enjeux propres à la géométrie "silo" . . . . .	17
<b>Chapitre 2 Simulation discrète de milieux granulaires</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	21
2.2 Cinétique d'un contact grain-grain . . . . .	22
2.3 Les méthodes "sphères dures" . . . . .	25
2.3.1 La méthode Event-driven . . . . .	26
2.3.2 La dynamique des contacts . . . . .	26
2.4 Dynamique moléculaire . . . . .	28
2.4.1 Principe . . . . .	28
2.4.2 Initialisation . . . . .	29

2.4.3	Le calcul des Forces . . . . .	29
2.4.4	À la recherche des contacts . . . . .	34
2.4.5	Schéma d'intégration . . . . .	37
2.4.6	Algorithme . . . . .	40
2.4.7	Conditions particulières à nos simulations . . . . .	40
<b>Chapitre 3 Simulation par éléments discrets</b>		<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	43
3.2	Pression, débit et profils de vitesses des grains au sein d'un silo . .	46
3.2.1	Distribution de contraintes dans un silo : modèle de Janssen	46
3.2.2	Relation entre le débit de vidange et la taille de l'orifice : la loi de Beverloo . . . . .	50
3.2.3	Modèle cinématique d'écoulement en silo . . . . .	51
3.3	Géométrie du système et paramètres d'étude . . . . .	53
3.4	Étude du débit . . . . .	55
3.4.1	Relation entre la hauteur de l'écoulement et le débit . . . .	55
3.4.2	Relation entre les dimensions de l'orifice et le débit . . . .	56
3.4.3	Relation entre le débit et le coefficient de frottement . . . .	58
3.4.4	Relation entre le débit et le coefficient de restitution . . . .	61
3.5	Étude du profil de vitesse . . . . .	63
3.5.1	Comparaison du profil de vitesses observé et le profil de vitesses obtenu par le modèle cinématique . . . . .	65
3.5.2	Effet de la hauteur d'écoulement sur le profil de vitesse . .	68
3.5.3	Effet de la largeur du silo sur le profil de vitesse . . . . .	70
3.5.4	Effet du coefficient de frottement sur le profil de vitesse . .	71
3.5.5	Effet du coefficient de restitution sur le profil de vitesse . .	73
Conclusion . . . . .		73
3.6	Conclusion . . . . .	73
<b>Chapitre 4 Simulation continue de milieux granulaires</b>		<b>77</b>
Introduction . . . . .		77
4.1	Introduction . . . . .	77

4.2	Rhéologie et loi de frottement $\mu(I)$ . . . . .	78
4.2.1	Loi de frottement locale . . . . .	78
4.2.2	Limites de la loi $\mu(I)$ . . . . .	79
4.3	Équations du mouvement . . . . .	80
4.3.1	Principe . . . . .	80
4.3.2	Formulation adimensionnée . . . . .	82
4.4	Méthode des grilles décalées . . . . .	83
4.4.1	Approche numérique . . . . .	83
4.4.2	Discretisation spatiale . . . . .	85
4.4.3	Résolution du système linéaire . . . . .	87
4.4.4	Modifications du code Matlab . . . . .	87
4.5	Résultats et discussions . . . . .	88
4.5.1	Validation pour un fluide newtonien . . . . .	88
4.5.2	Résultat de l'application de la loi $\mu(I)$ (Fluide non newtonien) . . . . .	89
4.6	Conclusion . . . . .	90

## Chapitre 5 Écoulement stationnaire et établi : résolution semi-analytique 93

5.1	Hypothèses simplificatrices : écoulement établi et stationnaire . . . . .	93
5.2	Résolution . . . . .	94
5.3	Écoulement de Couette plan . . . . .	95
5.3.1	Formulation adimensionnelle . . . . .	95
5.3.2	Conditions aux limites . . . . .	97
5.3.3	Résultats . . . . .	98
5.3.4	Discussions . . . . .	99
	Modèle proposé pour le $\Lambda_{critique}$ . . . . .	99
	Justification du modèle simplifié pour $\Lambda_{critique}$ . . . . .	101
5.4	Poiseuille . . . . .	106
5.4.1	Formulation adimensionnelle . . . . .	107
5.4.2	Conditions aux limites . . . . .	108
5.4.3	Résultats et discussions . . . . .	109
5.5	Conclusion . . . . .	113

<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>115</b>
<b>Annexe A Code Matlab pour la résolution d'équation de Navier-Stokes</b>	<b>119</b>
<b>Annexe B Feuille de calcul MAXIMA : Couette Plan : Étude du Lambda critique</b>	<b>125</b>
<b>Annexe C Feuille de calcul MAXIMA : Lambda critique fonction de <math>(\varepsilon, \alpha)</math></b>	<b>131</b>
<b>Annexe D Feuille de calcul MAXIMA : Poiseuille granulaire</b>	<b>135</b>
<b>Table des figures</b>	<b>141</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>

# Introduction

## les milieux granulaires

Les milieux granulaires sont des milieux constitués d'entités individuelles, les grains, qui interagissent entre elles principalement par des collisions dissipatives et du frottement solide. Ces milieux sont des systèmes complexes. La connaissance des interactions présentes dans le système, aussi parfaite soit-elle, n'est pas suffisante pour pouvoir décrire l'objet macroscopique qu'est l'assemblée des grains.

Nous pouvons essayer de dresser ci-dessous une liste non-exhaustive des difficultés rencontrées par les physiciens dans leur travail de modélisation des milieux granulaires :

- Tout d'abord, les milieux granulaires sont constitués de beaucoup de grains. Pour s'en convaincre il suffit de calculer l'ordre de grandeur du nombre de grains de sable (diamètre typique  $250\mu\text{m}$ ) présents dans un seau de plage cylindrique (diamètre et hauteur de 10 cm). En prenant en compte le taux de remplissage du seau, également appelé compacité <sup>1</sup>, nous obtenons  $5 \times 10^7$  grains !
- Les fluctuations thermiques sont négligeables devant l'énergie nécessaire pour déplacer les grains. Ainsi, le système ne peut pas explorer spontanément les différentes configurations de l'espace des phases sur lesquelles il est possible de faire des moyennes. Dans le même ordre d'idée, nous sommes en présence d'un milieu fortement dissipatif, donc en général hors équilibre.

---

<sup>1</sup>La compacité est le rapport entre l'espace occupé par les grains et l'espace occupé par l'empilement (c'est-à-dire par les grains et l'espace poreux entre grains)

Ceci proscrit l'utilisation des approches classiques de la mécanique statistique.

- La granularité est observable : il n'y a pas de distinction claire entre l'échelle microscopique (celle des grains) et l'échelle macroscopique (celle du milieu granulaire). Pour illustrer notre propos, considérons un verre d'eau. À l'œil nu, nous sommes incapable de distinguer les molécules constituant le liquide. Il y a une longueur caractéristique microscopique (quelques Å) très différente de l'échelle caractéristique du verre (quelques centimètres). Au contraire, les grains de sable (longueur caractéristique : quelques dixième de millimètres) dans notre seau (longueur caractéristique : une dizaine de centimètres) sont parfaitement visibles, la différence entre les deux échelles caractéristiques n'est pas discriminante. Est-il alors possible d'utiliser une approche de type "milieu continu" pour de tels systèmes ?
- Les milieux granulaires peuvent présenter un comportement gazeux, liquide ou solide ... voir les trois à la fois ! Ce point particulier sera détaillé au chapitre suivant.
- Les milieux granulaires sont intrinsèquement désordonnés. Le contact entre deux grains se fait au niveau d'aspérités situés à la surface des grains dont la taille est de l'ordre que quelques nm et qui sont difficilement contrôlables. Ainsi, deux grains peuvent être très proches mais pas en contact. La conséquence directe de ce désordre de contact est l'apparition de contraintes fortement hétérogènes dans les milieux granulaires comme le montre la figure ci-dessous.
- Lorsque le milieu granulaire est composé de grains de plusieurs tailles, sous l'effet d'une contrainte mécanique on observe bien souvent une séparation des différents types de grains. Cette ségrégation rend de fait le milieu granulaire très hétérogène et pose de nombreux problèmes pratiques, notamment dans l'industrie pharmaceutique où l'homogénéité des mélanges de poudres est cruciale.

Précisons ici que les milieux granulaires dont il sera sujet dans ce travail sont qualifiés de secs, c'est-à-dire qu'il ne sont soumis ni à des forces de cohésion ni à forces d'attraction. Ceci exclut les poudres dont les grains, du fait de leur faible



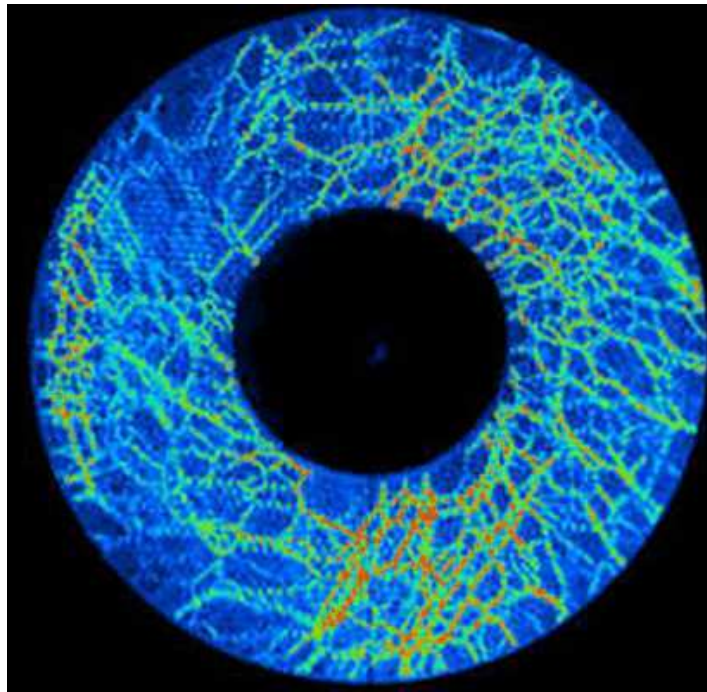


FIG. 1 – Mise en évidence de la répartition hétérogène des contraintes au sein d'un milieu granulaire (ici le milieu granulaire est cisailé dans une cellule de Couette annulaire) par une expérience de photoélasticité. Plus la couleur du grain est rouge, plus le grain est contraint. Au contraire, plus la couleur du grain est bleue, moins le grains est contraints. Figure extraite de (Howell, Behringer & Veje, 1999).

diamètre ( $d < 100\mu\text{m}$ ) peuvent être sujets à des forces électrostatiques qui ne sont pas négligeables par rapport à leur poids. Des forces de cohésion au sein des poudres peuvent également résulter de la création de ponts capillaires entre les grains par condensation de l'humidité de l'air.

## Problématique

Face à la complexité intrinsèque des milieux granulaires, la simulation numérique s'avère être un outil de choix pour leur étude. Elle permet en effet de modifier simplement les paramètres physiques du systèmes et de discriminer ceux qui sont pertinents dans la description du système macroscopique.

Le but de cette thèse était, dans un premier temps d'utiliser des simulations numériques de type "éléments discrets" pour étudier les écoulements granulaires en géométrie silo. Comme nous le verrons au cours de ce mémoire de thèse, pour des raisons de limitation de temps de calcul et d'espace mémoire, ces méthodes ne permettent pas de traiter des systèmes réels. Pour pallier ce défaut, nous nous sommes par la suite attachés à décrire le milieu granulaire comme un milieu continu de propriétés rhéologiques données. Dans ce type d'approche, les rhéologies utilisées reposant sur des approches empiriques, il est important de pouvoir tester leur validité, en comparant par exemple les résultats obtenus par ce type de simulations avec ceux obtenus par des simulations de type "éléments discrets". Avant de pouvoir mener à bien ces comparaisons il existe une étape préliminaire indispensable qui consiste à implémenter ce type de modélisation. Il s'agissait là du deuxième but de ce travail. Nous nous sommes basés sur la rhéologie appelée "rhéologie  $\mu(I)$ " qui sera décrite en détail au chapitre 4. Ce développement numérique a été accompagné d'une approche purement théorique qui a permis d'obtenir des expressions semi-analytiques ou analytiques pour des écoulements simples.

## Plan de l'exposé

Le premier chapitre dresse un état des lieux des connaissances actuelles sur les écoulements denses de grains. Le chapitre 2 décrit en détail la méthode de simulation par éléments discrets appliquée aux matériaux granulaires. Nous nous attacherons à décrire le principe de la méthode, à présenter les modèles de forces employées et à expliquer la méthode d'intégration utilisée. Ceci sera fait avec le souci constant de relier les paramètres de la simulation aux propriétés physiques des grains pouvant être mesurées expérimentalement. Au cours du troisième chapitre nous étudierons des écoulements granulaires en géométrie silo en utilisant des simulations de type "éléments discrets". Nous nous attacherons à tester des modèles physiques communément utilisés pour décrire et prédire ce type d'écoulement. Les chapitres 4 et 5 quant à eux traitent de la

modélisation "continue" des milieux granulaires. Elle est basée sur une rhéologie dite "rhéologie  $\mu(I)$ " récemment introduite dans le cadre des milieux granulaires. Ceci sera fait d'une part numériquement en résolvant, moyennant une approximation qui sera explicitée, des équations de type Navier-Stokes (chapitre 4) et d'autre part théoriquement en se plaçant dans le cas particulier des écoulements unidimensionnels, stationnaires et établis.



# Chapitre 1

## Description d'écoulement de matériaux granulaires

Les matériaux granulaires ont été décrits dans (Jaeger et al., 1996) comme un état de la matière inhabituel ne répondant pas à la classification solide - liquide - gaz. Pour être plus précis, un milieu granulaire peut avoir un comportement proche de celui d'un gaz (quelques grains vibrés violemment dans une boîte), de celui d'un liquide (du sable qui coule entre nos doigts) ou de celui d'un solide (le sable sur lequel on marche). Il peut même présenter simultanément ces trois comportements. Détaillons ci-dessous cette analogie faite entre les états classiques de la matière et le comportement des matériaux granulaires.

Selon les sollicitations extérieures et les conditions aux limites, les matériaux granulaires peuvent être classés en trois catégories :

- Si l'on secoue un récipient rempli de billes, elles vont rebondir les unes contre les autres. La densité est très faible comme lorsque l'on saupoudre du sable depuis une certaine hauteur (voir figure 1.1). Le mouvement des billes rappelle celui des molécules d'un gaz et cet état est souvent assimilé à un état gazeux.
- L'état solide est obtenu lorsque les grains forment un empilement qui se déforme plastiquement, c'est-à-dire très lentement sous l'effet d'une force.
- Entre ces deux états, il y a l'état liquide qui est caractérisé par une densité

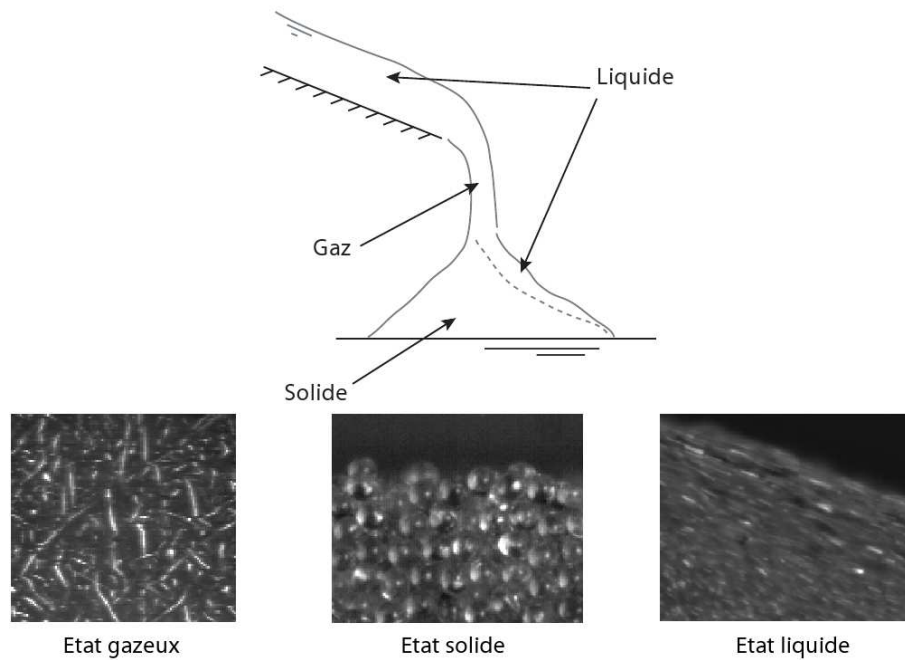


FIG. 1.1 – Les trois états de la matière granulaire : gazeux, solide et liquide. Figure extraite de (Jop, 2006).

importante et des vitesses non négligeables devant la vitesse caractéristique de chute d'un grain, comme le sont les avalanches ou les éboulements de terrain (voir figure 1.1).

Dans ce chapitre, nous allons présenter en première partie les différents régimes d'écoulement caractérisés par les trois différents états du matériau granulaire. En seconde partie nous aborderons les principales configurations dans le cas des écoulements denses et enfin nous présenterons les enjeux propres à la configuration "silo".

## 1.1 Régimes d'écoulement granulaire

Quand l'énergie est introduite dans un matériau granulaire, soit par l'intermédiaire d'un cisaillement, soit en le secouant, ou tout simplement par l'action de la gravité, il peut commencer à couler. En raison de la dissipation, l'énergie

introduite doit être continuellement alimentée pour garder le matériau dans cet état de mouvement. Ainsi, un état dynamique stable ne peut exister que s'il y a un apport continu d'énergie au système. Généralement, on peut distinguer trois types d'écoulements granulaires avec des limites assez larges.

### 1.1.1 Régime dilué

Le régime dilué se rencontre par exemple lorsque l'on agite très fortement des grains dans une boîte. Ce régime est caractérisée par une densité très faible et les grains possèdent une énergie cinétique très élevée. Les particules interagissent principalement par collisions binaires inélastiques. L'analogie avec les particules d'un gaz de sphères dures a permis d'introduire une température granulaire définie à partir des fluctuations de vitesses  $T_g = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$ . Trois équations décrivent ce milieu : la conservation de la matière, la conservation de la quantité de mouvement et une troisième équation traduisant un bilan énergétique. Cette théorie cinétique granulaire (Jenkins & Richman, 1985, 1986) réussit à reproduire les propriétés statistiques des écoulements très rapides (Goldhirsch, 2003), mais est inadaptée à la description d'un régime où la densité est plus importante. Par ailleurs, à cause de la dissipation d'énergie par les chocs, les grains ont tendance à développer une instabilité, brisant l'homogénéité du milieu. Si une région devient plus dense, les chocs sont plus nombreux et, par conséquent, l'énergie locale diminue plus rapidement. Les grains vont alors s'agglomérer en un temps fini (Jaeger et al., 1996; McNamara & Young, 1996). Ce phénomène, appelé "effondrement inélastique", mène à des zones très denses.

### 1.1.2 Régime quasi-statique

À l'autre extrême, lorsque l'énergie cinétique des particules est quasiment nulle, les grains sont en contact avec plusieurs de leurs voisins. Dans ce régime, le taux de cisaillement est très faible, la densité est très élevée et les particules sont en contact mutuel. C'est le cas de l'empilement des graviers de ballasts qui constituent les voies ferrées par exemple. Le frottement inter-grains gère les déformations de ce milieu et les contraintes se propagent sur de grandes échelles

devant la taille des grains le long de chaînes de forces (Radjai et al., 1996; Mueth et al., 1998). Les petites fluctuations de contraintes ne permettent pas aux particules de se déplacer individuellement, elles sont coincées dans un volume défini par leur entourage (Weeks & Weitz, 2002).

### 1.1.3 Régime dense

Entre les deux régimes précédents, le régime d'écoulement dense est caractérisé à la fois par des contacts frottants multiples de longue durée et des réarrangements provoquant des chocs inélastiques entre particules. Ce régime est celui que l'on rencontre le plus fréquemment dans les écoulements géophysiques et dans les processus industriels, il est donc important d'en avoir une meilleure compréhension. La modélisation d'un tel milieu n'est pas aisée car on ne peut négliger ni les contacts binaires en grains, ni les interactions multiples qui peuvent faire apparaître des corrélations importantes entre les mouvements des grains (Pouliquen, 2004).

Les simulations numériques discrètes apportent certains éclaircissements sur la relation entre les propriétés des grains et celles de l'écoulement. Cependant malgré les performances des systèmes informatiques actuels qui permettent de simuler plusieurs dizaines voire centaines de milliers de grains à la fois, une description en termes de milieu continu serait une aubaine pour la prédiction d'écoulements géologiques et les applications industrielles. De nouveau, le changement d'échelle depuis le niveau du grain jusqu'au niveau de l'écoulement est encore sujet à débats. Il existe, en effet, de nombreuses études expérimentales ou numériques accompagnées de diverses propositions de modélisation pour espérer décrire les écoulements denses par un milieu continu. Une des difficultés concernant la compréhension de ce régime est la multitude de comportements observés en fonction de la configuration de l'écoulement (GDRMiDi, 2004). Notons également que la théorie cinétique a récemment été modifiée pour être appliquée avec un certain succès à ces des écoulements denses (Jenkins & Berzi, 2010).

Nous allons dans le paragraphe suivant décrire plus en détail les grandes classes de configurations étudiées et leurs caractéristiques.



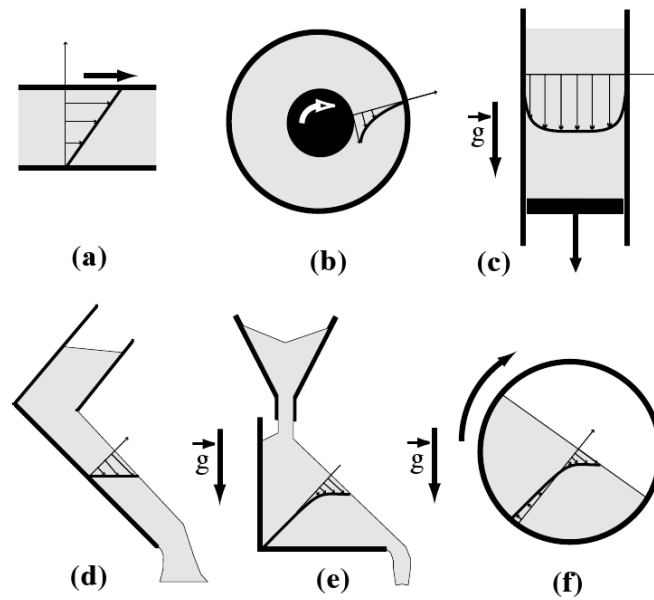


FIG. 1.2 – Les six principales configurations d’écoulements granulaires : (a) cisaillement plan, (b) cisaillement de couette cylindrique, (c) silo vertical, (d) plan incliné, (e) écoulement sur un tas avec une alimentation ponctuelle, (f) tambour tournant. Figure extraite de (GDRMiDi, 2004)

## 1.2 Différentes configurations

Les écoulements granulaires denses sont principalement étudiés dans six configurations différentes (voir figure 1.2) qui conduisent à un cisaillement simple et permettent une mesure relativement aisée des propriétés rhéologiques. Ces géométries sont divisées en deux familles : les écoulements confinés, les écoulements à surface libre qui comprennent les écoulements à fond rigide et les écoulements à fond meuble.

### 1.2.1 Écoulements confinés

Les écoulements confinés sont des écoulements granulaires pour lesquels le matériau granulaire est localisé entre des parois. C’est le cas de la configuration cisaillement plan (figure 1.2a) où le matériau granulaire est situé entre deux

plaques horizontales. Numériquement, il s'agit d'une des configurations les plus simples qui peut servir de rhéomètre afin de relier les contraintes appliquées aux profils de vitesse linéaires observés (da Cruz, 2004; Iordanoff & Khonsari, 2004) (voir section 4.2.1). Pour le cisaillement Couette cylindrique (figure 1.2b), le cisaillement est localisé à proximité de la paroi du cylindre intérieur qui est en mouvement de rotation (Mueth et al., 1998). Dans un silo vertical (figure 1.2c), les bandes de cisaillement sont localisées à la paroi.

Notons que les écoulements granulaires dont il sera question dans ce travail appartiennent à cette classe des "écoulement confinés".

### 1.2.2 Écoulements à fond rigide

Dans cette configuration (figure 1.2d), les grains s'écoulent depuis un réservoir sur un fond rigide et rugueux. Les paramètres contrôlant l'écoulement sont d'une part l'angle d'inclinaison du plan et le débit (ou l'épaisseur de la couche fluide) d'autre part. Selon la condition d'alimentation, deux régimes principaux peuvent être observés : un régime dense (Pouliquen, 1999b; Silbert et al., 2001) et un régime collisionnel (Azanza et al., 1999). Un troisième régime, le régime supporté peut également être observé. Il consiste en une couche basale diluée très agitée qui supporte un écoulement dense (Taberlet et al., 2007). Contrairement aux deux autres régimes, les écoulements appartenant à ce régime ne sont stationnaires que pour une gamme très étroite d'angles.

Cette configuration "écoulement à fond rigide" a fait l'objet de nombreuses études expérimentales car le faible nombre de degrés de liberté permet de mieux cerner les phénomènes qui gèrent l'écoulement. Par ailleurs, elle représente une première modélisation des éboulements de terrains sur des pentes naturelles. Des expériences réalisées sur un plan incliné ont montré qu'il existe un seuil d'écoulement pour le matériau granulaire, et ont également permis de proposer une loi d'échelle fonction de l'épaisseur et de la vitesse moyenne de l'écoulement (Pouliquen, 1999b,a, 2004; Prochnow, 2002; Silbert et al., 2001; Forterre & Pouliquen, 2003). Signalons enfin quelques travaux qui se sont intéressés à l'influence des parois latérales d'un canal sur les propriétés des écoulements (Taberlet et al.,

2003; Jop et al., 2005).

### 1.2.3 Écoulements sur fond meuble

Les écoulements sur fond meuble (ou écoulements superficiels), sont des écoulements qui s'effectuent un substrat constitué de grains de même nature que ceux de l'écoulement. Ils ont fait l'objet de très nombreuses études expérimentales, numériques et théoriques. Ces écoulements sont fondamentalement différents de ceux sur fond rigide car la topographie du fond n'est pas imposée par l'expérimentateur. L'écoulement peut ainsi modeler l'interface entre les phases statique et roulante. De plus, le volume de l'avalanche peut varier au cours de l'écoulement par érosion du substrat ou par accrétion de grains initialement en mouvement. Les deux montages classiquement étudiés sont ceux des figures (1.2e) et (1.2f), et dans ces configurations, il n'y a donc plus qu'un seul paramètre de contrôle : le débit. Notons néanmoins que dans cette configuration l'effet des parois est particulièrement important (Taberlet et al., 2003, 2006; Jop et al., 2005).

Les mesures effectuées sur un empilement alimenté par une source ponctuelle permettent d'étudier des écoulements stationnaires et établis (c'est-à-dire uniformes le long de la direction principale de l'écoulement  $x$ ). Il est cependant difficile d'atteindre des épaisseurs d'écoulement importantes. À l'inverse, la géométrie "tambour" autorise des épaisseurs importantes mais l'écoulement n'est jamais établi. En effet, il est alimenté sur toute sa longueur par la base grâce à la rotation du tambour. Le débit d'alimentation (ou de déposition) est d'autant plus important que les grains sont éloignés du centre du tambour. Les deux situations (figure (1.2e) et (1.2f)) présentent cependant des caractéristiques communes. Les articles (GDRMiDi, 2004; Jop et al., 2005, 2006; Taberlet et al., 2003) recense un grand nombre de résultats sur les écoulements sur fond meuble.

## 1.3 Enjeux propres à la géométrie "silo"

Arrêtons nous quelques instants sur la géométrie de type silo qui fait l'objet du chapitre 3. Les silos sont des réservoirs de stockage destinés à entreposer des

grains en vrac. Ils sont très couramment utilisés dans diverses industries (stockage et transport de grains dans les industries agroalimentaire, pharmaceutique ...). Prenons l'exemple de la filière céréalière tout particulièrement importante pour les activités économiques de la région Bretagne. La France produit chaque année 70 millions de tonnes de céréales, pour un chiffre d'affaire de 54 milliards d'euros (en 2005). Cette production très importante nécessite l'utilisation de 7500 centres de collecte et de stockage composés d'un ou de plusieurs silos.

Bien que fortement utilisés, les silos sont sujets à deux nombreuses problématiques. Afin d'illustrer ce propos, nous allons décrire succinctement et non-exhaustivement deux d'entre elles. Tout d'abord le blocage lors de l'écoulement lors de la vidange. Si la taille de l'orifice de sortie du silo n'est pas trop grande par rapport au diamètre moyen des particules, l'écoulement des particules peut être stoppé par l'apparition d'une voûte juste au dessus de l'orifice. L'écoulement ne reprend que si cette voûte est déstabilisée par une action extérieure. Pratiquement, les méthodes de déblocage sont très empiriques, peu efficaces voir dangereuses <sup>1</sup>. Il s'agit de casser la voûte responsable du blocage soit indirectement en tapant violemment sur le silo, soit directement en faisant entrer dans le silo un long tige par l'orifice de vidange ou par le haut du silo. La deuxième problématique porte sur l'échantillonnage d'un silo. Il est très courant qu'un industriel doive contrôler la qualité des grains une fois ces derniers stockés dans un silo. C'est notamment le cas dans la filière céréalière mentionnée plus haut qui doit répondre à une réglementation européenne très stricte en matière de traçabilité des lots, notamment en cours de stockage. Le moyen utilisé aujourd'hui pour répondre à cette demande consiste tout simplement à vider entièrement le silo et à faire le contrôle en question une fois les grains "à l'air libre". Une méthode alternative bien plus efficace consisterait à déplacer un échantillonneur au sein du silo. Ceci nécessite de fluidifier localement le milieu granulaire en le décompactant ou cassant les chaînes de forces décrites au cours de l'introduction à ce travail.

L'optimisation des procédés industriels impliquant des silos passe par une meilleure

---

<sup>1</sup>Nous invitons le lecteur à se reporter à l'adresse internet suivante afin de se faire une idée de la dangerosité d'une méthode de déblocage : [http://www.csst.qc.ca/salle\\_de\\_presse/actualites/2011/29\\_juin\\_saint\\_jean.htm](http://www.csst.qc.ca/salle_de_presse/actualites/2011/29_juin_saint_jean.htm)

compréhension des phénomènes physiques gouvernant les écoulements granulaires et notamment la transition vers l'arrêt. Il est en particulier indispensable de mieux comprendre la rhéologie de ces milieux, de caractériser les forces entre grains dans ces écoulements et d'étudier les moyens permettant de les décompacter (et donc faciliter l'écoulement des grains qui s'y trouvent) efficacement et à moindre coût. Le but de ce travail n'est pas de répondre directement à cette nécessité d'optimisation mais d'effectuer un premier pas dans cette direction en proposant et en testant des méthodes de simulations de milieux granulaires en géométrie confinée.



# Chapitre 2

## Simulation discrète de milieux granulaires

### 2.1 Introduction

Pour de nombreux systèmes physiques, la connaissance des lois gérant l'évolution des éléments constituant pris les uns indépendamment des autres ne permet pas de prédire le comportement du système dans son ensemble. Les milieux granulaires font partie de ces systèmes dits complexes. En effet, la description physique d'un grain est à priori assez aisée. Corps macroscopique, il est décrit par les équations de la mécanique classique et les lois gérant le contact de deux grains ou d'un grain avec une paroi, bien que non-linéaires, sont à priori modélisables depuis les travaux de Hooke, Hertz, De Vinci, Amontons et Coulomb. Néanmoins, les milieux granulaires étant des systèmes athermiques <sup>1</sup> fortement dissipatifs et sans distinction nette entre l'échelle du grain et l'échelle du système, leur description physique ne peut pas se déduire simplement de celle des grains. Ceci est d'autant plus vrai que le comportement de ces systèmes dépend bien souvent de leur construction.

Les simulations numériques discrètes (DEM pour "Discret Element Method") sont donc un outil de choix pour ces systèmes. Leur principe consiste en effet à

---

<sup>1</sup>À température ambiante, l'énergie thermique est négligeable devant l'énergie nécessaire pour les déplacer un grain millimétrique d'un diamètre.

simuler le comportement d'un milieu granulaire à partir de la connaissance du comportement individuel des grains qui le constituent. Pour ceci, les trajectoires des grains (les éléments discrets) sont déterminées par application de la mécanique classique (Müller, 1996; Wolf, 1996).

Par la nécessité de traiter le comportement individuel des grains, ce type de simulations s'oppose à d'autres méthodes de simulation numériques. Parmi celles-ci, la méthode des automates cellulaires est certainement la plus simple à mettre en œuvre. Le système, qui est l'état initial de l'automate, est un réseau de cellules qui contiennent zéro, une ou plusieurs particules. Ce réseau évolue à l'état suivant au cours du temps en appliquant des règles phénoménologiques reproduisant le comportement des grains. Ce type de simulation est principalement utilisé dans la physique des milieux granulaires pour modéliser la ségrégation en tambour tournant (Yanagita, 1999), l'avancée des dunes (D. Zhang & Rozier, 2010) et les avalanches (Romero-Rochín et al., 1995) ainsi que les précurseurs associés (Prado & Olami, 1992). Une autre méthode consiste à considérer le milieu granulaire comme un milieu continu obéissant à une rhéologie donnée et à résoudre numériquement les équations correspondantes. Ce type de simulation sera abordée aux chapitres 4 et 5.

Dans la suite de ce chapitre, après avoir rappelé les propriétés cinétiques d'une collision entre grains, nous allons décrire les différentes méthodes de modélisation discrètes utilisées pour l'étude de la physique des milieux granulaires. Nous nous attarderons en détail sur la méthode des "sphères molles" qui sera utilisée dans la suite de ce travail. Notons dès à présent que, par souci de simplicité, les grains seront considérés comme des sphères parfaites.

## 2.2 Cinétique d'un contact grain-grain

Nous allons, dans cette section, rappeler brièvement les calculs permettant de déduire les vitesses grains après un choc des lois de conservations de la mécanique et de la définition des coefficients de restitution normale et tangentielle (Walton,



1983). Ceci nous permettra, par la suite, de faire le lien entre les propriétés micromécaniques des grains et les paramètres utilisés dans la simulation.

Considérons deux grains sphériques de rayons respectifs  $R_i$  et  $R_j$  et de masses respectives  $m_i$  et  $m_j$ . Les centres de ces deux grains sont repérés grâce aux vecteurs  $\vec{r}_i$  et  $\vec{r}_j$  (figure 2.1). Le vecteur unitaire normal au contact, c'est à dire le

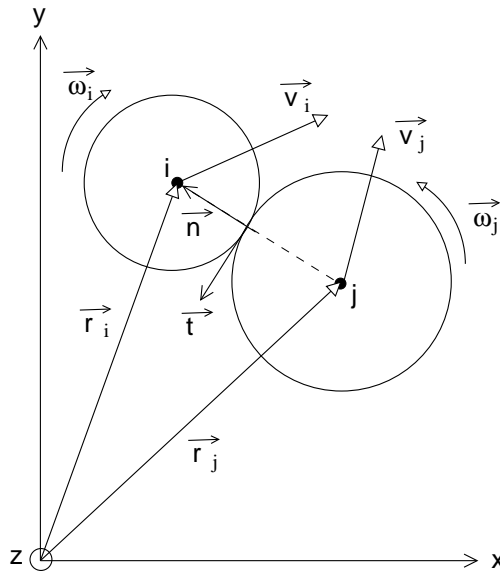


FIG. 2.1 – Illustration d'un collision entre deux sphères dures  $i$  et  $j$ .

vecteur unitaire dont le support passe par les centres des deux grains et dirigé de  $j$  vers  $i$ , est défini par  $\vec{n} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) / |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ . Avant la collision, les sphères ont pour vitesse de translation  $\vec{v}_i$  and  $\vec{v}_j$  et pour vitesse de rotation  $\vec{\omega}_i$  and  $\vec{\omega}_j$ . Au cours de la collision, la sphère  $j$  exerce sur la sphère  $i$  une impulsion  $\vec{J}$ . D'après les relations de la cinématique des solides indéformables, la vitesse relative entre le grain  $i$  et le grain  $j$  au point de contact est donné par

$$\vec{V}_{ij} = \left( \vec{V}_i - \vec{\omega}_i \times R_i \vec{n} \right) - \left( \vec{V}_j - \vec{\omega}_j \times R_j \vec{n} \right) = \left( \vec{V}_i - \vec{V}_j \right) - (R_i \vec{\omega}_i + R_j \vec{\omega}_j) \times \vec{n}.$$

Cette vitesse relative peut être décomposée en une vitesse normale au contact  $\vec{V}_{ij}^n$

et une vitesse tangentielle  $\vec{V}_{ij}^t$

$$\vec{V}_{ij}^n = (V_{ij} \cdot \vec{n})\vec{n}, \text{ et } \vec{V}_{ij}^t = -\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{V}_{ij}).$$

La conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique conduisent à

$$\begin{aligned} m_i (\vec{V}_i' - \vec{V}_i) &= -m_j (\vec{V}_j' - \vec{V}_j) = \vec{J}, \\ \frac{I_i}{R_i} (\vec{\omega}_i' - \vec{\omega}_i) &= \frac{I_j}{R_j} (\vec{\omega}_j' - \vec{\omega}_j) = -\vec{n} \times \vec{J}. \end{aligned}$$

Dans ces dernières relations, le "prime" fait référence aux quantités post-collisionnelles. L'utilisation de ces deux équations permet d'exprimer les vitesses post-collision :

$$\begin{aligned} \vec{V}_i' &= \vec{V}_i + \frac{\vec{J}}{m_i}, \\ \vec{V}_j' &= \vec{V}_j - \frac{\vec{J}}{m_j}, \\ \vec{\omega}_i' &= \vec{\omega}_i - \frac{R_i}{I_i} \vec{n} \times \vec{J}, \\ \vec{\omega}_j' &= \vec{\omega}_j - \frac{R_j}{I_j} \vec{n} \times \vec{J}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Considérons tous d'abord le cas où le contact n'implique pas de glissement. Afin de caractériser la dissipation d'énergie lors du choc, il est nécessaire d'introduire les coefficients de restitution normale  $e_n$  et tangentielle  $e_t$ .

$$\vec{V}_{ij}^n' = -e_n \vec{V}_{ij}^n, \text{ et } \vec{V}_{ij}^t' = -e_t \vec{V}_{ij}^t.$$

Le coefficient de restitution normale est compris en 0 (collision complètement inélastique, toute l'énergie est perdue) et 1 (collision élastique). Le coefficient de restitution tangentielle, quant à lui, vérifie  $-1 \leq e_t \leq 1$ , les deux extrêmes  $e_t = -1$  et  $e_t = 1$  correspondant respectivement à une conservation de la composante tangentielle de la vitesse et à un inversement de cette même vitesse. Ceci conduit aux deux relations suivantes :

$$\vec{J}^n = m_{ij} (\vec{V}_{ij}^n' - \vec{V}_{ij}^n) = -m_{ij}(1 + e_n)\vec{V}_{ij}^n,$$

et

$$\vec{J}^t = \frac{2}{7} m_{ij} \left( \vec{V}_{ij}^{\prime t} - \vec{V}_{ij}^t \right) = -m_{ij} (1 + e_t) \vec{V}_{ij}^{\prime t}.$$

Ainsi, l'impulsion  $\vec{J}$  peut s'écrire

$$\vec{J} = -m_{ij} (1 + e_n) \vec{V}_{ij}^{\prime n} - \frac{2}{7} m_{ij} (1 + e_t) \vec{V}_{ij}^{\prime t}. \quad (2.2)$$

Il est alors possible d'écrire l'expression des vitesses après la collision en fonction des vitesses avant la collision, des masses et des coefficients de restitution

$$\begin{aligned} \vec{V}'_i &= \vec{V}_i - \frac{m_{ij}}{m_i} (1 + e_n) \vec{V}_{ij}^{\prime n} - \frac{2}{7} \frac{m_{ij}}{m_i} (1 + e_t) \vec{V}_{ij}^{\prime t} \\ \vec{V}'_j &= \vec{V}_j + \frac{m_{ij}}{m_j} (1 + e_n) \vec{V}_{ij}^{\prime n} + \frac{2}{7} \frac{m_{ij}}{m_j} (1 + e_t) \vec{V}_{ij}^{\prime t} \\ \vec{\omega}'_i &= \vec{\omega}_i + \frac{2}{7} \frac{R_i}{I_i} m_{ij} (1 + e_t) \vec{V}_{ij}^{\prime t} \\ \vec{\omega}'_j &= \vec{\omega}_j + \frac{2}{7} \frac{R_j}{I_j} m_{ij} (1 + e_t) \vec{V}_{ij}^{\prime t} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dans le cas où la collision implique un glissement, nous avons  $\left| \vec{n} \times \vec{J} \right| = \mu \left( \vec{n} \cdot \vec{J} \right)$ . En utilisant ce résultat dans l'équation (2.2), et en notant  $\gamma$  l'angle entre  $\vec{n}$  et  $\vec{V}_{ij}^{\prime}$  nous avons

$$\begin{aligned} \vec{V}'_i &= \vec{V}_i - \frac{m_{ij}}{m_i} (1 + e_n) \vec{V}_{ij}^{\prime n} + \frac{m_{ij}}{m_i} \mu (1 + e_n) \cotan(\gamma) \vec{V}_{ij}^{\prime t} \\ \vec{V}'_j &= \vec{V}_j + \frac{m_{ij}}{m_j} (1 + e_n) \vec{V}_{ij}^{\prime n} - \frac{m_{ij}}{m_j} \mu (1 + e_n) \cotan(\gamma) \vec{V}_{ij}^{\prime t} \\ \vec{\omega}'_i &= \vec{\omega}_i + \frac{R_i}{I_i} m_{ij} \mu (1 + e_n) \vec{V}_{ij}^{\prime t} \\ \vec{\omega}'_j &= \vec{\omega}_j + \frac{R_j}{I_j} m_{ij} \mu (1 + e_n) \vec{V}_{ij}^{\prime t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 2.3 Les méthodes "sphères dures"

Les simulations discrètes dites "sphères dures" consistent à considérer les sphères comme des solides indéformables qui ne peuvent pas se chevaucher. Deux méthodes principales existent : la méthode Event-Driven (dynamique gérée par

les événements) et la méthode "dynamique des contacts". Nous allons présenter succinctement ci-dessous le principe de ces deux méthodes.

### 2.3.1 La méthode Event-driven

Le méthode Event-Driven consiste à simuler un système de sphères dures, indéformables. Les collisions sont supposées instantanées et elles n'impliquent que deux grains (on parle alors de collisions binaires). Le schéma est alors très simple car il n'y a pas d'équations à intégrer mais plutôt un opérateur de collision (typiquement celui défini équation 2.2) qui agit sur les vitesses et rend compte de l'inélasticité des chocs (Dippel, 1998). Cette méthode consiste à :

- déterminer le temps de la prochaine collision  $t_{next}$  entre deux particules notées  $i$  et  $j$ ,
- se placer au temps  $t_{next}$  puis à calculer les nouvelles positions de toutes les particules en appliquant l'équation de la dynamique qui conduit à des trajectoires rectilignes (en absence de gravité) ou paraboliques (en présence de la gravité),
- Déterminer les vitesse post-collision des grains  $i$  et  $j$  en utilisant les coefficients de restitution normale et tangentielle.

L'une des hypothèse forte de cette méthode est le caractère binaire des collisions. Dans le cas d'un écoulement dense, il existe des contacts mettant en jeu plus de deux grains et cette hypothèse n'est plus valable. Au contraire dans le cas d'un gaz granulaire, où le temps de vol entre deux collisions est largement supérieur au temps de collision, cette hypothèse est raisonnable et la méthode adaptée. Notons que lorsque l'utilisation de cette méthode est justifiée physiquement, elle est généralement plus efficace que les autres méthodes "discrètes" qui seront présentées par la suite.

### 2.3.2 La dynamique des contacts

La méthode de la dynamique des contacts a été développée pour traiter des ensembles de particules rigides, frottantes et inélastiques (Moreau, 1993; Radjai, 1995; Dippel, 1998). Contrairement à la méthode des sphères molles présentée

plus loin cette méthode ne traite pas explicitement les collisions entre grains. Elles apparaissent par l'introduction de discontinuités dans l'évolution du système granulaire : discontinuité des vitesses, discontinuité des forces. Les grains obéissent alors à un comportement non-régulier résolu dans le cadre de la mécanique non-régulière. Dans le cas de milieux granulaires secs ces discontinuités sont traduites par

1. L'unilatéralité géométrique : lors d'un contact entre deux grains, ces derniers ne pouvant pas s'interpénétrer, la vitesse relative normale au contact est positive (dans le sens de l'éloignement des deux grains) ou nulle.
2. La force normale  $F_n$  exercée entre deux particules est non-nulle uniquement si ces grains sont en contact.
3. La force normale au contact est positive ou nulle, i.e. le contact est non-cohésif.
4. La force tangentielle  $F_t$  est décrite par la loi de Coulomb. Deux particules en contact glissent l'une par rapport à l'autre si  $F_t = \text{sgn}(v_g)\mu F_n$ , où  $\mu$  est le coefficient de frottement. Dans le cas contraire, il n'y a pas de glissement et  $|F_t| < \mu |F_n|$ . Rappelons que le coefficient de frottement dépend des matériaux impliqués dans le contact. Précisons également que nous adoptons ici une démarche courante de la physique des milieux granulaire qui consiste à n'utiliser pour un contact qu'un seul et unique coefficient de frottement (il n'y a pas distinctions entre le coefficient de frottement statique et le coefficient de frottement dynamique).
5. La vitesse relative tangentielle est nulle tant que la force tangentielle reste inférieure au seuil de frottement de Coulomb.

Enfin, comme pour la méthode event-driven, la dissipation intrinsèque aux milieux granulaires est introduite via deux coefficients de restitution : un normal et un tangentiel.

Cette méthode est assez compliquée à mettre en œuvre et nous renvoyons le lecteur aux références (Moreau, 1993, 1994; Jean, 1999) pour plus détails. Communément utilisée en sciences des matériaux, en mécanique ou en génie civil où

un accord quantitatif avec la réalité est exigée, les physiciens lui préfèrent souvent la méthode "sphères molles" qui sera présentée dans la section 2.4. De plus, selon la géométrie et le nombre de grains présents dans la simulation, le temps de calcul peut être significativement supérieur à celui des méthodes Event-Driven et "sphères molles".

## 2.4 Dynamique moléculaire

### 2.4.1 Principe

Comme indiqué précédemment, la dynamique moléculaire consiste à intégrer les équations du mouvement de particules qui sont dans notre cas des sphères. Le principe de la Dynamique moléculaire (DM) repose sur une succession d'étapes, indiquées ci-dessous, dont certaines sont répétées au cours du temps jusqu'à la fin de la simulation (Frenkel & Smit, 1996).

1. Lire les paramètres qui spécifieront les conditions d'exécution du programme (nombre de grains, densité, masse volumique, nombre de pas de temps d'exécution, ...)
2. L'initialisation positionne les grains et leur donne une vitesse de rotation et une vitesse de translation initiales.
3. Le calcul des forces agissant sur chaque grains est effectué. Ceci nécessite une modélisation à priori des forces entre les grains (Cundall & Strack, 1979; Allen & Tildesley, 1987). De ce point de vue la méthode "sphères molles" est assez différente de la méthode "event driven" ou "dynamique des contacts".
4. Les équations du mouvement de Newton sont intégrées de façon similaire pour chaque grain.
5. On enregistre les moyennes grandeurs utiles (positions, vitesses, rotations, forces...).

Les étapes 3 à 5 sont répétées jusqu'à atteindre la durée de simulation désirée. Nous allons maintenant détailler ces différentes étapes.

### 2.4.2 Initialisation

Avant de commencer une simulation de type DM, nous devons initialiser les positions et les vitesses de tous les grains du système. Ainsi chaque grain  $i$  aura un rayon  $R_i$ , une masse  $M_i$ , un moment d'inertie  $I_i$ , une position  $x_i, y_i, z_i$ , une vitesse de translation  $V_i^\alpha$  et de rotation  $\omega_i^\alpha$ , où  $\alpha$  désigne la coordonnée de l'espace. Ces valeurs initiales doivent respecter la géométrie simulée et il faut également veiller à ce que les grains ne se chevauchent pas. C'est pourquoi on choisit généralement de placer les particules dans un réseau cubique légèrement désordonné qui a l'avantage grâce à son instabilité de s'effondrer rapidement sans laisser de trace de l'état initial (Frenkel & Smit, 1996). Les vitesses de translation et de rotation de tous les grains sont mises à zéro à l'état initial.

### 2.4.3 Le calcul des Forces

Comme pour la section 2.2, considérons deux sphères  $i$  et  $j$  dans un référentiel dont le repère est orthonormé. Les centres de ces deux sphères sont respectivement placés en  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  et  $M_j(x_j, y_j, z_j)$ . Les rayons respectifs sont quant à eux notés  $R_i$  et  $R_j$  (voir figure 2.2).

#### Force normale

La force normale  $F_n$  est la force normale exercée par  $j$  sur  $i$ . On définit le vecteur normal unitaire  $\vec{n} = M_j\vec{M}_i / \left\| M_j\vec{M}_i \right\|$  joignant les centres des deux particules. Afin de modéliser la répulsion et la dissipation présentes lors d'un choc entre grains, nous avons choisi d'utiliser, pour cette force, la forme suivante :

$$F_n = -k_n\delta - \gamma_n\dot{\delta} \quad (2.5)$$

où  $k_n$  est la constante de raideur,  $\gamma_n$  est la constante d'amortissement et  $\delta = R_i + R_j - \left| M_i\vec{M}_j \right|$  est le recouvrement tangentiel. Intéressons nous à la signification physique de cette force. Le terme linéaire en  $\delta$  correspond à un terme élastique semblable à celui exercé par un ressort de raideur  $k_n$ . Cette force est active lorsque le recouvrement entre les deux grains est positif ( $\delta \geq 0$ ). Le terme

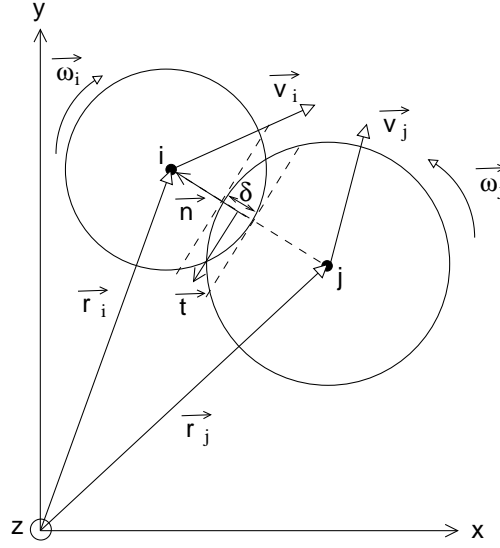


FIG. 2.2 – Illustration d’une collision entre deux sphères molles. Le chevauchement des sphères est noté  $\delta$ .

en  $\dot{\delta}$  quant à permet d’introduire une dissipation dans le système.

L’avantage principal de cette modélisation est que la durée de la collision  $t_n^{coll}$  et le coefficient de restitution normale sont indépendants des vitesses des grains avant le choc. En effet, la force normale (2.5) conduit à une équation linéaire du second ordre de type oscillateur harmonique :

$$m_{ij} \frac{d^2 \delta}{dt^2} + \gamma_n \frac{d\delta}{dt} + k_n \delta = 0 \quad (2.6)$$

où  $m_{ij}$  est la masse effective (voir section 2.2). Si  $\gamma_n < 2\sqrt{m_{ij}k_n}$ , la solution de cette équation avec les conditions initiales  $\delta|_{t=0} = 0$  et  $\dot{\delta}|_{t=0} = V_0$  donne

$$\delta = V_0 \frac{t_n^{coll}}{\pi} \exp\left(-\frac{\gamma_n}{2m_{ij}} t\right) \sin\left(\frac{\pi}{t_n^{coll}} t\right),$$

où  $t_n^{coll}$  est la durée pendant laquelle les grains restent en contact :

$$t_n^{coll} = \pi \sqrt{\frac{m_{ij}}{k_n}} \left(1 - \frac{\gamma_n^2}{4m_{ij}k_n}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$



Il est alors possible d'exprimer le coefficient de restitution normale

$$e_n = \frac{|\dot{\delta}(t_n^{coll})|}{V_0} = \exp\left(-\frac{\gamma_n}{2m_{ij}} t_n^{coll}\right). \quad (2.8)$$

### Force tangentielle

Une collision non-frontale entre deux sphères induit généralement une force tangentielle qui dépend des propriétés de surface des sphères impliquées (rugosité, humidité, cohésion, ...). Les grains étant des solides, il est à priori raisonnable de modéliser les forces entre grains par la loi de Coulomb mentionnée précédemment (voir section 2.3.2). Néanmoins, un problème se pose. Si le critère de Coulomb n'est pas vérifié, c'est-à-dire si  $F_t < \mu F_n$ , la force est indéterminée. Nous savons uniquement que sa norme est comprise entre 0 et  $\mu F_n$ . La démarche suivie en dynamique moléculaire "sphères molles", contrairement à celle suivie en dynamique des contacts, consiste à régulariser cette loi. La méthode la plus simple de procéder est pour considérer que dans ce cas, la force tangentielle est modélisée par une force de frottement visqueux qui tend vers le frottement de Coulomb lorsque le seuil est atteint. ceci conduit à

$$F_{ij}^t = -\min(-\gamma_t V_{ij}^t, \mu F_n).$$

Ce type de régularisation est couramment utilisée avec succès dans la modélisation de systèmes dynamiques. En revanche son utilisation pour des systèmes statiques est à proscrire. En effet, dans le cas où la vitesse de glissement entre grains est nulle un tel modèle donne des forces tangentielles également nulles, ce qui contraire à l'expérience. Afin de palier cet inconvénient il est possible de régulariser la loi de Coulomb non pas par un amortisseur mais par un ressort éventuellement amorti qui s'oppose au déplacement tangentielle. La démarche adoptée est alors la suivante. On définit tout d'abord la direction de la force tangentielle par celle de la vitesse de glissement du grain  $i$  par rapport au grain  $j$  :  $\vec{V}_{ij}^t$ . Soit  $\vec{t}$  le vecteur unitaire correspondant :  $\vec{t} = \vec{V}_{ij}^t / |\vec{V}_{ij}^t|$ . La force tangentielle de regularisation est

alors donnée par :

$$F_t = -k_t u_t - \gamma_t v_t, \quad (2.9)$$

où  $k_t$  est la constante élastique tangentielle,  $v_t$  la vitesse tangentielle,  $u_t = \int_{traj.} \vec{t} \cdot d\vec{l}$  est le recouvrement tangentiel et  $\mu$  est le coefficient de frottement. Notons que la valeur absolue de  $u_t$  est bornée afin que la condition de Coulomb soit respectée. L'inconvénient majeur de cette régularisation est l'introduction de deux nouvelles constantes : la raideur tangentielle  $k_t$  et la viscosité tangentielle  $\gamma_t$  dont on ne connaît pas, à priori les valeurs. Afin de répondre à cette question étudions l'équation vérifiée par  $u_t$ . Nous avons

$$\frac{d^2 \vec{u}_t}{dt^2} = \frac{dV_{ij}^t}{dt} = \frac{7}{2} \left( \vec{F}_i^t / m_i - \vec{F}_j^t / m_j \right) = \frac{7}{2m_{ij}} \vec{F}_i^t.$$

Comme  $\vec{F}_i^t = -k_t \vec{u}_t - \gamma_t d\vec{u}_t/dt$ , cette équation devient

$$\frac{d^2 u_t}{dt^2} + \frac{7}{2m_{ij}} k_t u + \frac{7}{2m_{ij}} \gamma_t \frac{du_t}{dt} = 0. \quad (2.10)$$

La résolution de cette équation nous donne le temps de collision de la composante tangentielle est

$$t_t^{coll} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{7k_t}{2m_{ij}} - \frac{1}{4} \left( \frac{7\gamma_t}{2m_{ij}} \right)^2}}, \quad (2.11)$$

et le coefficient de restitution tangentielle

$$e_t = \exp \left( -\frac{7\gamma_t}{4m_{ij}} t_t^{coll} \right).$$

De l'équation précédente nous pouvons déduire

$$\left( \frac{7\gamma_t}{4m_{ij}} \right)^2 = \frac{(\text{Ln } e_t)^2}{t_t^{coll2}}.$$

L'équation 2.11 devient alors

$$\frac{7k_t t_t^{coll2}}{2m_{ij}} = \pi^2 + (\text{Ln } e_t)^2,$$

ce qui, après résolution, donne

$$t_t^{coll} = \sqrt{\frac{2m_{ij}}{7k_t} (\pi^2 + (\text{Ln } e_t)^2)},$$

et

$$u_t = V_{0t} \frac{t_t^{coll}}{\pi} \exp\left(-\frac{7\gamma_t}{4m_{ij}} t\right) \sin(\pi t / t_t^{coll}).$$

Ainsi, si nous connaissons  $k_t$  et le coefficient de restitution tangentielle, nous pouvons en déduire  $\gamma_t$ . Il nous manque néanmoins une information importante : la valeur de  $k_t$ . Nous avons traité jusqu'à présent l'équation gérant le déplacement tangentiel et ceci de manière complètement indépendante du mouvement normal. Ceci correspond à oublier que la force tangentielle ne s'applique que si les deux particules se chevauchent, c'est à dire que si la force normale n'est pas nulle. Pour cette dernière, rappelons que  $t_n^{coll} = \pi / \sqrt{k_n/m_{ij} - (\gamma_n/2m_{ij})^2}$  et que le coefficient de restitution correspondant est  $e_n = \exp(-\gamma_n t_n^{coll} / 2m_{ij})$ . Ces deux équations étant reliées entre elles, nous pouvons écrire

$$t_n^{coll} = \sqrt{\frac{m_{ij}}{k_n} (\pi^2 + (\text{Ln } e_n)^2)}.$$

Ainsi, si nous supposons que la durée de "collision tangentielle" est égal à la durée de "collision normale" alors il est possible de déterminer  $k_t$  à partir des valeurs de coefficients de restitution normale et tangentielle.

$$\frac{k_t}{k_n} = \frac{2}{7} \left( \frac{\pi^2 + (\text{Ln } e_t)^2}{\pi^2 + (\text{Ln } e_n)^2} \right).$$

Néanmoins, rares sont les travaux de la littérature prenant ces précautions. Ceci est assez perturbant tant il semble logique de penser que le temps pendant lequel s'applique la dissipation normale doit être égal au temps pendant lequel s'applique

la dissipation tangentielle. Ceci étant dit, le seul cas vraiment dérangeant est  $t_t^{coll} < t_n^{coll}$ . En effet, dans ce cas, la force tangentielle s'arrête de dissiper avant la fin du contact sans aucune justification physique. Le cas  $t_t^{coll} > t_n^{coll}$  est en revanche acceptable. En effet, le temps de collision réel lors d'un choc entre deux grains étant donnée par le temps pendant lequel les deux grains se chevauchent, il correspond à  $t_n^{coll}$ . Ainsi, le cas  $t_t^{coll} > t_n^{coll}$  indique que la force tangentielle et la force normale dissipent pendant le même temps, mais que l'oscillation décrite par l'équation 2.10 n'est pas terminée au moment où le contact cède. Pour être acceptable, la valeur de  $k_t$  doit donc vérifier

$$\frac{k_t}{k_n} \leq \frac{2}{7} \left( \frac{\pi^2 + (\text{Ln } e_t)^2}{\pi^2 + (\text{Ln } e_n)^2} \right). \quad (2.12)$$

Dans ce cas, déterminons la valeur du coefficient de restitution tangentielle en fonction des paramètres de la simulation. Par souci de concision nous nous limitons au cas des faibles amortissements, c'est à dire  $8k_t m_{ij} - 7\gamma_t^2 > 0$ . Dans ce cas, en utilisant  $e_t = \frac{1}{v_{0t}} \dot{u}_t(t_n)$  nous pouvons écrire

$$e_t = \exp\left(-\frac{7\gamma_t t_n}{4m_{ij}}\right) \left[ \cos\left(\pi \frac{t_n}{t_t}\right) - \frac{7\gamma_t t_t}{4\pi m_{ij}} \sin\left(\pi \frac{t_n}{t_t}\right) \right],$$

#### 2.4.4 À la recherche des contacts

Dans la dynamique moléculaire, le calcul des forces est de loin la partie la plus coûteuse en temps de calcul. En effet, afin de calculer les forces qui s'exercent entre  $N$  particules, il faut déterminer lesquelles sont en contact. L'idée la plus simple consiste à examiner l'ensemble des  $N(N-1)/2$  paires possibles et de calculer la distance entre les particules de chaque paire. Si cette distance est inférieure à la somme des rayons, alors il y a contact et la force est calculée. Cette méthode de calcul simpliste, mais très facilement implémentable, nécessite un temps de calcul proportionnel à  $N^2$ . Il existe plusieurs méthodes permettant de diminuer le temps nécessaire à la recherche des contacts (Frenkel & Smit, 1996; Allen & Tildesley, 1987) :

**la liste de Verlet** Cette méthode consiste à établir pour chaque particule  $i$  une

liste  $L_i$  de particules “proches” potentiellement candidate à un contact avec le grain  $i$  (voir figure 2.3). Cette liste est faite de toutes les particules qui sont à un rayon  $r_v$  de la particule  $i$ . Un autre rayon  $r_c < r_v$  est introduit pour gagner en temps dans calcul des interactions, si le déplacement maximum des particules est inférieur à  $r_v < r_c$ , alors on calcule directement les interactions suivantes (calcul d’ordre  $N$ ) sinon, la liste de Verlet est redéterminée avant le calcul des interactions suivantes (calcul d’ordre  $N^2$ ). Ainsi, bien que plus rapide que l’approche simpliste décrite plus haut, la liste de Verlet reste, pour  $N$  grand, une méthode en  $N^2$ , ce qui limite fortement son intérêt.

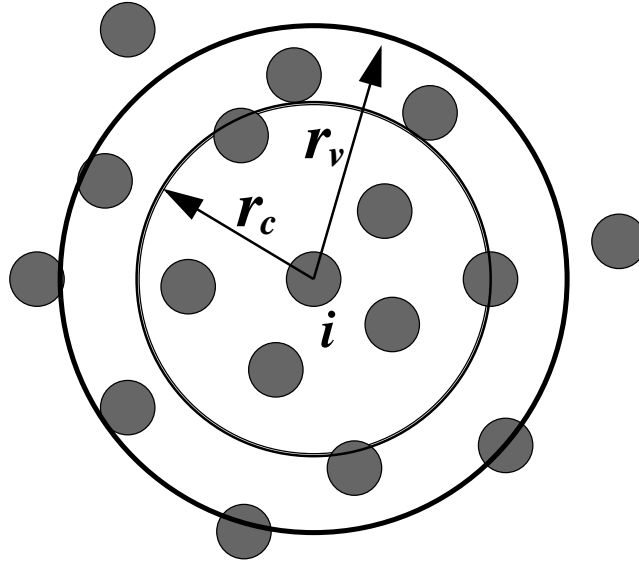


FIG. 2.3 – Liste de Verlet : la particule  $i$  est éventuellement en contact avec les particules situées à un rayon  $r_v$ .

**la méthode des cellules** Cette méthode consiste à diviser l’espace en cellules virtuelles de taille  $R_{cell}$  (voir figure 2.4). Si on prend soin de choisir pour  $R_{cell}$  une valeur supérieure ou égale à  $2R_{max}$  ( $R_{max}$  étant le rayon maximal des grains), il suffit de chercher les contacts dans les 27 cellules contiguës (en  $3D$ ) à la cellule contenant la particule  $i$  (voir figure 2.4). Les éléments appartenant aux différentes cellules sont répertoriés dans un tableau à 4

dimensions (en 3D) :  $T[n_c^x][n_c^y][n_c^z][n]$  où  $n_c^\alpha$  représente le nombre de cellules dans le direction  $\alpha$  et  $n$  le nombre maximal de particules dans une cellule. Cette méthode est efficace car elle demande un temps de calcul à l'ordre  $N$ . Cependant, elle possède un inconvénient de taille : elle est très coûteuse en mémoire car elle utilise une table de taille  $n_c^x \times n_c^y \times n_c^z \times n$  qui peut devenir très lourd si  $R_{cell}$  est petit.

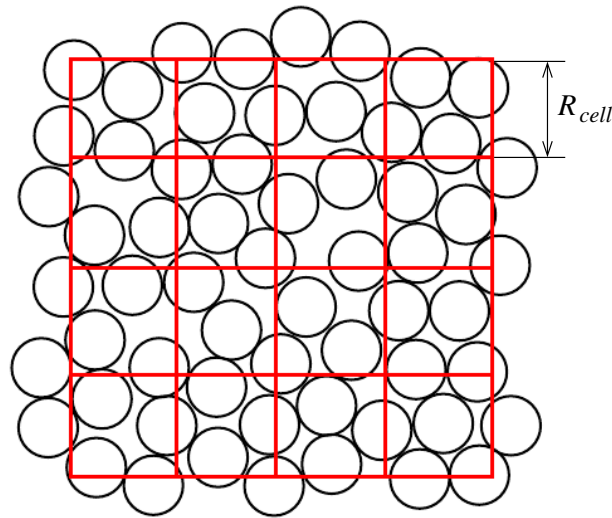


FIG. 2.4 – Illustration bidimensionnelle de la méthode des cellules. L'espace granulaire divisé en cellules virtuelles de côté  $R_{cell}$ . La recherche des grains voisins s'effectue dans sa case et dans les cases voisines (8 à deux dimensions).

**La méthode des cellules liées** Cette méthode a été développée dans le but d'améliorer la gestion de mémoire de la méthode précédente. Nous allons d'abord présenter l'algorithme avant de l'illustrer sur un exemple simple.

La figure 2.5 présente un cas simple de  $N = 10$  particules pour le cas 2D. On applique le programme ci-dessus. *Tetedeliste* est un tableau  $3 \times 3$  (nombre de cellules) qui est initialisé à 0 ou à -1 selon la numérotation des particules,  $Tetedeliste[ix][iy]$  contient le numéro de la particule qui sera en tête de la

**Alg. 1** Cellules liées

---

```

initialisation du tableau  $Tetedeliste[][][]$ 
initialisation de la liste  $liens[]$ 
for  $i = 0; i \geq N - 1; i = i + 1$  do
  Identifier la cellule  $ix, iy, iz$  où la particule  $i$  est située
   $liens[i] = Tetedeliste[ix][iy][iz]$ 
   $Tetedeliste[ix][iy][iz] = i$ 
end for

```

---

cellule  $(ix, iy)$ . On obtient ainsi les résultats suivants :

$$\begin{array}{lll}
 Tetedeliste[2][2] = 8 & Tetedeliste[3][2] = 5 & Tetedeliste[3][3] = 4 \\
 liens[8] = 2 & liens[5] = 0 & liens[4] = 3 \\
 liens[2] = 0 & & liens[3] = 0
 \end{array}$$

Lorsque l'on cherche les voisins de la particule 2, on trouve d'abord la cellule à laquelle elle appartient (cellule 22 dans notre exemple). On regarde ensuite quelle particule est à la tête de la liste correspondante à la cellule ( $Tetedeliste[2][2] = 8$  d'où la particule 8 est à la tête de la liste). Il suffit ensuite de dérouler la liste des particules liées par *lien* pour identifier les particules de la cellule considérée. On recommence ensuite avec les 8 cellules voisines.

### 2.4.5 Schéma d'intégration

Comme nous l'avons vu précédemment, lors d'un contact entre une particule  $i$  et une particule  $j$ , on peut décomposer la force de contact en une force normale (force dirigé selon le vecteur joignant le centre des deux sphères) et une force tangentielle (force dirigée selon la vitesse de glissement). La force totale qu'exerce la particule  $j$  sur la particule  $i$  s'écrit donc :

$$\vec{F}_{j \rightarrow i} = F_n \vec{n} + F_t \vec{t}, \quad (2.13)$$

où  $F_n$  et  $F_t$  sont respectivement la force normale et la force tangentielle.

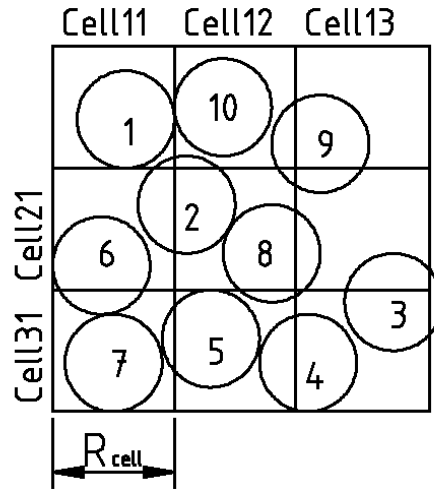


FIG. 2.5 – Illustration de la méthode liées sur un cas 2D.

Le moment de cette force au centre de la particule s'écrit :

$$\vec{M}_{j \rightarrow i} = R_i \vec{F}_{j \rightarrow i} \wedge \vec{n}_{ij}. \quad (2.14)$$

On cherche maintenant à résoudre les équations du mouvement (application du principe fondamental de la dynamique et du théorème du moment cinétique à chaque particule  $i$ )

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \sum_{contact\{ij\}} \vec{F}_{j \rightarrow i} + m_i \vec{g}, \quad (2.15)$$

$$I_i \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} = \sum_{contact\{ij\}} \vec{M}_{j \rightarrow i} \quad (2.16)$$

Notons que les équations 2.15 et 2.16 sont couplées via la force inter-grains qui intervient directement dans la première et indirectement dans la deuxième, via la moment de la force  $\vec{F}_{ij}$  (équation (2.14)).

L'intégration numérique des équations précédentes est basée sur les méthodes des différences finies, où le temps est discrétisé sur une grille finie, le pas de temps



$\Delta t$  étant la distance entre deux points consécutifs sur la grille. Deux méthodes d'intégration sont principalement utilisées en MD, l'algorithme du prédicteur-correcteur et l'algorithme de Verlet. Nous nous intéressons à l'algorithme de Verlet (Verlet, 1967, 1968) pour sa simplicité et son efficacité. L'idée de base est d'écrire deux développements de Taylor de troisième ordre pour la position d'une particule  $r$ , le premier à l'instant  $t + \Delta t$  et le second à l'instant  $t - \Delta t$ .

$$\begin{aligned}\vec{r}(t + \Delta t) &= \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\vec{b}(t)\Delta t^3 + O(\Delta t^4), \\ \vec{r}(t - \Delta t) &= \vec{r}(t) - \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}\vec{b}(t)\Delta t^3 + O(\Delta t^4),\end{aligned}\tag{2.17}$$

où  $\vec{v}(t)$  est le vecteur vitesse au temps  $t$ ,  $\vec{a}(t)$  le vecteur accélération et  $\vec{b}(t)$  la dérivée d'ordre 3 de  $\vec{r}(t)$  par rapport à  $t$ . En additionnant les deux expressions on obtient :

$$\vec{r}(t + \Delta t) = 2\vec{r}(t) - \vec{r}(t - \Delta t) + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^4)\tag{2.18}$$

Cette équation correspond à la forme la base de l'algorithme de Verlet. Le vecteur  $\vec{a}(t)$  correspond au vecteur force divisé par la masse, ce dernier étant fonction du vecteur position :

$$\vec{a}(t + \Delta t) = \frac{\vec{F}(\vec{r}(t + \Delta t))}{m}\tag{2.19}$$

On peut ainsi calculer la nouvelle position  $r(t + \Delta t)$  en utilisant les positions aux temps  $t$  et  $t - \Delta t$  avec une précision d'ordre  $\Delta t^4$ .

Pour calculer la vitesse, on utilise :

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t - \Delta t)}{2} + O(\Delta t^2)\tag{2.20}$$

Toutefois, l'erreur associée à cette expression est en  $O(\Delta t^2)$  plutôt qu'en  $O(\Delta t^4)$ . Pour surmonter cette difficulté, certaines variantes de l'algorithme de Verlet ont été développés (Walton, 1983; Haff & Werner, 1986; Ristow, 1992). Une mise en œuvre encore meilleure de l'algorithme de base est appelé velocity

Verlet où les positions, vitesses et accélérations au temps  $t + \Delta t$  sont obtenus à partir de la même quantité au temps  $t$  de la façon suivante :

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t^2 \quad (2.21)$$

$$\vec{v}(t + \frac{\Delta t}{2}) = \vec{v}(t) + (1/2)\vec{a}(t)\Delta t \quad (2.22)$$

$$\vec{a}(t + \Delta t) = \frac{\vec{F}(\vec{r}(t + \Delta t))}{m} \quad (2.23)$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{1}{2}\vec{a}(t + \Delta t)\Delta t \quad (2.24)$$

### 2.4.6 Algorithme

L'algorithme ci-dessous permet de schématiser le calcul des forces dans la méthode Dynamique Moléculaire décrites précédemment à la section 2.4.1. L'algorithme représente l'étape 3 du programme décrit.

### 2.4.7 Conditions particulières à nos simulations

La méthode de la Dynamique Moléculaire présentée à la section précédente à été programmée en langage C. Le système que nous avons simulé permet d'avoir un nombre de grains compris entre 4000 et 20000, utilise une taille mémoire résidante comprise entre 24 et 200 Mo. Pour simuler un écoulement de 16000 grains en géométrie silo (voir chapitre suivant) pendant 1,005 secondes un temps CPU de 18 heures est nécessaire. Ce temps est calculé sur une machine de 1 processeurs Intel(R) Core(TM) i7 de 8 cœur condensé à 2.67GHz. Notons également que le calcul des forces et la recherche des contacts entre grains représentent 77% du temps d'exécution, l'intégration de Verlet 11% et le reste représente la lecture et sauvegardes. Cette domination du calcul des forces et de la recherche des voisins nous amène penser que l'algorithme 2 peut être parallélisé en partageant entre différents processeurs le calcul des forces sur les grains.

---

**Alg. 2** MOlecular DYnamics for Granular System(MODY-GS)
 

---

```

for  $i = N - 1$  ;  $i \geq 0$  ;  $i = i - 1$  do
  cellule où la particule  $i$  est situé?  $\rightarrow ix, iy, iz$ 
  {//Maintenant, nous recherchons des voisins possible dans les 3 times 3
  cellules voisines}
  for  $vlix = -1$  ;  $vlix \leq 1$  ;  $vlix ++$  do
    for  $vliy = -1$  ;  $vliy \leq 1$  ;  $vliy ++$  do
      for  $vliz = -1$  ;  $vliz \leq 1$  ;  $vliz ++$  do
        Trouver la particule de tête dans la même cellule que  $i$ ,  $\rightarrow j =$ 
         $HoC[cell]$ 
        while  $j \neq 0$  do
          Calculer la distance entre  $i$  and  $j$ 
          if contact( $i,j$ ) then
            Calculer le vecteur normal unitaire  $\rightarrow$ 
             $cosalpha, cosbeta, cosgamma$ 
            Calculer vitesse relative de translation
            Calculer la force normale
            Calculer la vitesse tangentielle
            Donner à  $j$  un numéro de contact (nouvelle ou précédente) $\rightarrow$ 
             $grain[i].contact[nbcontact]$ 
            Mise à jour déplacement tangentiel  $u_t$ 
            calculer la force tangentielle  $F_t$  en utilisant le déplacement tan-
            gentiel
            if  $F_t > \mu F_n$  then
              Tronquer l'ampleur  $u_t$ 
            end if
            Ajouter les forces calculées à la somme des forces pour la  $i$  et
            pour  $j$ 
            Mise à jour des valeurs de couples au total pour les  $i$  et  $j$ 
          end if
          Trouvons une autre particule dans la même cellule  $\rightarrow j =$ 
           $linkedlist[cell]$ 
        end while
      end for
    end for
  end for

```

---



# Chapitre 3

## Simulation par éléments discrets d'écoulements granulaires en géométrie silo

### 3.1 Introduction

Du fait de ces nombreuses applications technologiques et industrielles (stockage et transport de grains dans les industries agroalimentaire, pharmaceutique ...) l'étude d'écoulements granulaires au sein de silos a fait l'objet de nombreux travaux (Mankoc et al., 2009; To et al., 2001; Zuriguel et al., 2003, 2005; Janda et al., 2008; Zhu & Yu, 2005; Hilton & Cleary, 2011; Goda & Ebert, 2005; Landry et al., 2003). Néanmoins, il existe encore à ce jour de nombreuses zones d'ombre sur la compréhension de ces écoulements. Ainsi, la rhéologie des milieux granulaires, les caractéristiques des forces entre les grains ou encore la formation de voûtes conduisant au blocage des silos sont encore mal compris. Ceci fait de l'étude des écoulements granulaires au sein de silos un domaine de recherche toujours très actif dans plusieurs disciplines comme le génie chimique, le génie des procédés, la physique... Un silo peut même être utilisé non pas pour faire s'écouler des grains mais des bulles, qui par certains aspects peuvent être considérées comme des grains déformables sans frottement (Bertho et al., 2006).

Dans un silo, trois régimes de vidange peuvent être observés. Pour des orifices de petites tailles, l'écoulement de vidange est bloqué par la formation d'arches au sein du milieu (Mankoc et al., 2007, 2009). Dans ce régime, la probabilité de blocage semble être gérée par le rapport entre la longueur caractéristique de l'orifice et la taille des grains (Mankoc et al., 2009; To et al., 2001; Zuriguel et al., 2003, 2005; Janda et al., 2008). Pour des tailles d'orifice intermédiaires, l'écoulement devient intermittent : des phases d'écoulement et de blocage se succèdent au cours du temps. Enfin, lorsque l'orifice est suffisamment grand, l'écoulement est continu et se fait à un débit qui est d'autant plus grand que la taille de l'orifice est grande.

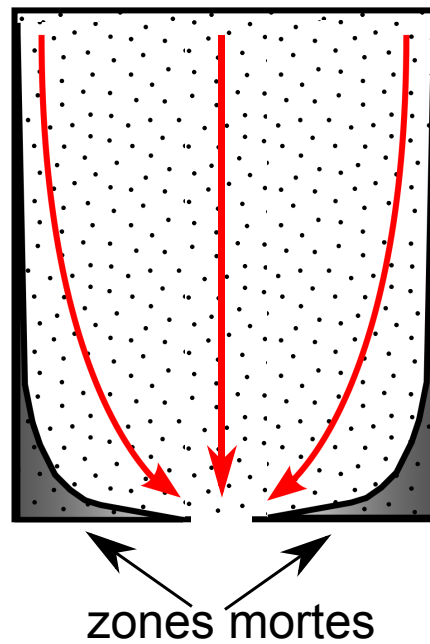


FIG. 3.1 – Schéma d'un écoulement au sein d'un silo. À proximité des bords inférieurs et loin de l'orifice il existe des zones mortes où les grains sont statiques. En dehors de ces zones, les grains s'écoulent plus ou moins rapidement en fonction de leur distance à l'orifice.

Pendant la vidange continue du silo, le milieu granulaire présente tous les états de la matière en grains (gaz, liquide, gazeux) présentés en introduction. En effet, proche des bords inférieurs du silo et loin de son orifice nous observons des zones dites mortes où les grains sont immobiles. Ceci est illustré sur la figure 3.1. Les autres grains sont en écoulement “fluide” plus ou moins rapide en fonction de la proximité de l’orifice. Au niveau de la sortie du silo, l’écoulement est très dilué et a un comportement proche de celui d’un gaz. La géométrie de type “silo” est ainsi un système de choix pour tester des théories dont le but est de décrire tous les états de la matière granulaire. Il partage cette propriété avec les écoulements gravitaires de grains sur des tas soit en régime stationnaire (Taberlet et al., 2003; Jop et al., 2005; Richard et al., 2008) soit en régime instationnaire (Taberlet et al., 2004; Staron, 2008).

L’étude des écoulements granulaires au sein de silos présente donc de nombreux intérêts tant du point de vue fondamental que du point de vue appliqué. Le but de ce chapitre est, à l’aide des simulations de type “Éléments discrets” présentées au chapitre précédent, de décrire l’effet des propriétés micromécaniques des grains (coefficient de restitution, coefficient de frottement) sur les propriétés cinétiques des écoulements granulaires (débit, profil de vitesse). Nous chercherons également à tester des modèles théoriques proposés dans la littérature.

L’organisation de ce chapitre est la suivante. La prochaine section décrira quelques modèles classiques de la “physique des silos”. Tout d’abord, nous présenterons le modèle de Janssen qui, à l’aide d’arguments simples, explique pourquoi la pression mesurée à la base d’un silo sature lorsque que la hauteur de grains au sein de celui-ci augmente. Ensuite, nous exposerons la loi de Beverloo qui permet de décrire l’augmentation non-linéaire du débit de sortie du silo en fonction de la taille de l’orifice. Enfin, nous nous attarderons sur le modèle cinématique qui permet de prédire le profil des vitesses des grains s’écoulant dans un silo. Dans la section 3.3, nous présenterons notre dispositif “numérique”. L’étude du débit fera l’objet de la section 3.4. Nous vérifierons tout d’abord que notre simulation est capable de reproduire correctement les lois de Janssen et de Beverloo. Par la suite nous étudierons la dépendance du débit vis-à-vis du coefficient de frottement et du coefficient de restitution. L’étude de la vitesse des grains, quant à elle, sera

réalisée dans la section 3.5. Nous nous attacherons à comparer nos résultats avec ceux du modèle cinématique et chercherons à étudier l'évolution des paramètres de ce modèle en fonction des propriétés des grains. Enfin, nous présenterons nos conclusions.

## 3.2 Pression, débit et profils de vitesses des grains au sein d'un silo : revue de quelques modèles classiques

Dans cette section nous allons présenter quelques modèles bien connus qui permettent de décrire et prédire les écoulements granulaires en géométrie “silo”. Nous commencerons cette revue en exposant le modèle introduit par Janssen en 1985 (Janssen & Vereines, 1895) qui fournit une expression analytique de la pression statique mesurée au fond d'un silo. Nous présenterons alors la loi de Beverloo (Beverloo et al., 1961) qui est une loi d'échelle exprimant le débit en fonction du diamètre de l'orifice. Enfin, nous présenterons le modèle cinématique qui permet, à l'aide d'un paramètre d'ajustement, de décrire le champ de vitesse d'un matériau granulaire dans un silo.

### 3.2.1 Distribution de contraintes dans un silo : modèle de Janssen

Dans un article (Janssen & Vereines, 1895) publié en 1895, un ingénieur allemand, H. A. Janssen, présenta des mesures de pression à la base d'un milieu granulaire (du maïs) placé dans un récipient<sup>1</sup>. Il mis en évidence une saturation de cette pression et proposa une description théorique basée sur l'hypothèse que les parois latérales supportent une certaine proportion du poids.

Le modèle de Janssen considère le milieu granulaire comme un milieu continu contenu dans un récipient cylindrique à base circulaire (voir figure 3.2a). Ce milieu

---

<sup>1</sup>Nous invitons le lecteur plus habitué à manier la langue de Shakespeare que celle de Goethe à consulter la traduction récente de l'article original proposé par Matthias Sperl (Sperl, 2006).



continu, de masse volumique  $\rho$ , vérifie les hypothèses suivantes :

- La contrainte verticale  $\sigma_{zz}$  est supposée uniforme dans la section horizontale du récipient.
- Les contraintes radiales  $\sigma_{rr}$  sont proportionnelles aux contraintes verticales :

$$\sigma_{rr}(z) = K\sigma_{zz}(z),$$

où  $K$  est appelé constante de Janssen qui dépend de la nature des grains. Dans le cas d'un fluide tel que l'eau où la pression est isotrope, nous avons bien évidemment  $K = 1$ .

- Le matériau frotte sur les parois latérales et se trouve au seuil de glissement :

$$\sigma_{rz}(z) = \mu_s \sigma_{rr}(z) = K\mu_s \sigma_{zz}(z)$$

où  $\mu_s$  est le coefficient de frottement statique entre le milieu granulaire et les parois.

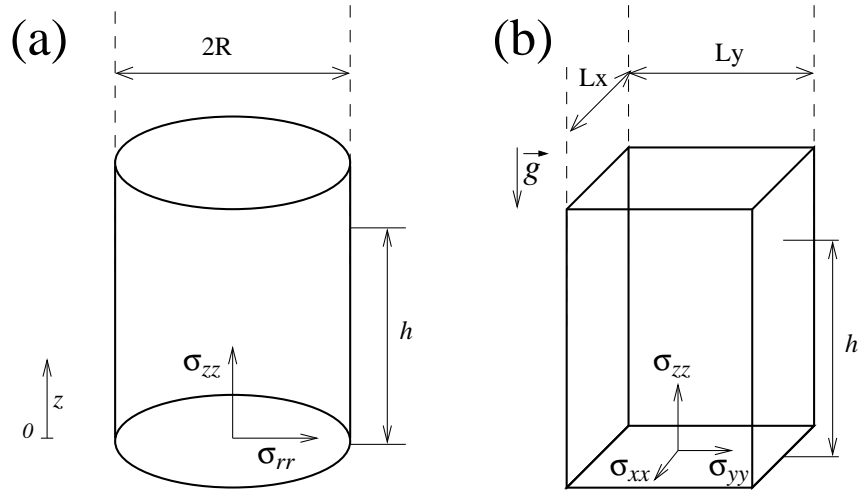


FIG. 3.2 – Schémas de deux types de silos cylindriques : (a) base circulaire de rayons  $R$  et (b) base rectangulaire de côtés  $L_x$  et  $L_y$ . La hauteur des grains est donnée par  $h$  et le tenseur des contraintes par  $\sigma_{ij}$ .

En utilisant ces hypothèses, nous pouvons écrire l'équilibre d'une tranche de matériau d'épaisseur  $dz$  soumise aux pressions au dessus et en dessous de la

couche considérée, aux contraintes latérales ainsi qu'à la gravité. Ce bilan de forces conduit à une équation différentielle vérifiée par  $\sigma_{zz}$  :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{2K\mu_s}{R} \sigma_{zz} = -\rho g. \quad (3.1)$$

Ainsi, si le fond est situé en  $z = 0$  et si la surface libre (pour laquelle nous avons bien évidemment  $\sigma_{zz} = 0$ ) est située à une hauteur  $z = h$ , la résolution de l'équation différentielle donne (voir (Ovarlez, 2002)) :

$$\sigma_{zz}(z) = \frac{\rho g R}{2K\mu_s} \left( 1 - \exp\left(\frac{(z-h)2K\mu_s}{R}\right) \right). \quad (3.2)$$

Dans cette dernière équation, une hauteur caractéristique  $H = R/(2K\mu_s)$  apparaît naturellement et nous pouvons écrire

$$\frac{\sigma_{zz}(z)}{\rho g H} = 1 - \exp\left[1 - \exp\left(\frac{(z-h)}{H}\right)\right]. \quad (3.3)$$

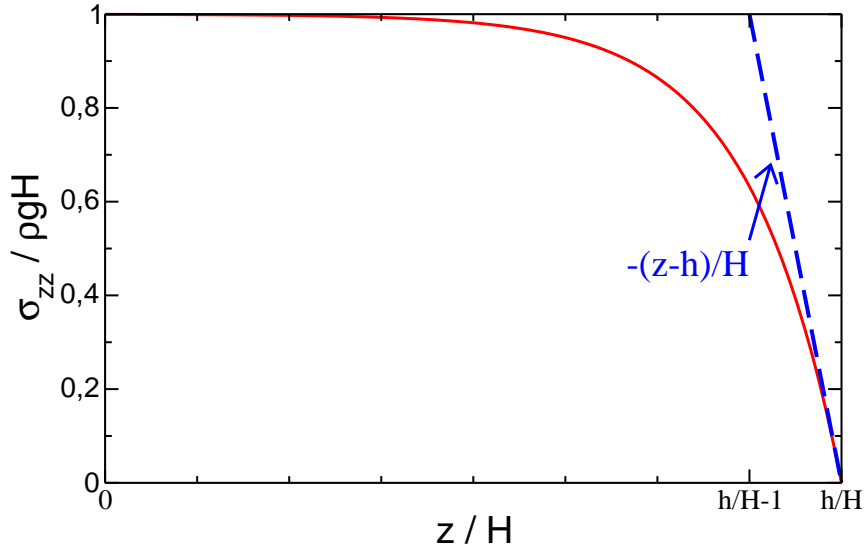


FIG. 3.3 – Contrainte verticale adimensionnée par  $\rho g H$  en fonction de la hauteur d'écoulement adimensionnée par la hauteur de saturation :  $H$ .

Intéressons nous maintenant à la masse “pesée” par le fond  $M_{\text{pesee}}$ . Le développement précédent conduit à

$$M_{\text{pesee}} = M_{\text{sat}} \left( 1 - \exp \left( -\frac{M_{\text{versee}}}{M_{\text{sat}}} \right) \right) = M_{\text{sat}} \left( 1 - \exp \left( -\frac{h}{H} \right) \right), \quad (3.4)$$

où  $M_{\text{sat}} = \rho\pi R^3/2K\mu_s$  est la masse maximale supportée par le fond (masse de saturation).

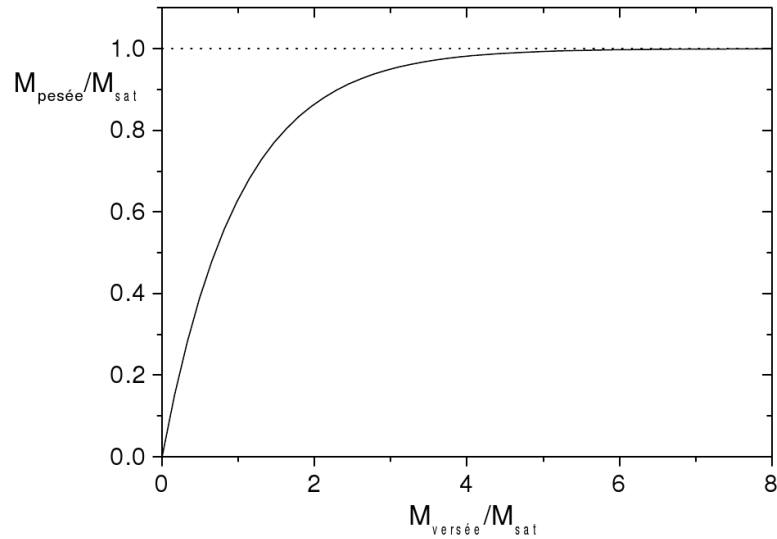


FIG. 3.4 – Masse pesée  $M_{\text{pesee}}$  calculée en fonction de la masse versée  $M_{\text{versee}}$  dans le modèle de Janssen. Les résultats des calculs sont remis à l'échelle par rapport à  $M_{\text{sat}}$  (d'après (Ovarlez, 2002)).

Si la masse versée est de plus en plus grande, alors ce modèle prédit que  $M_{\text{pesee}}(z > h) = M_{\text{sat}}$  quelle que soit la hauteur des grains dans la colonne (voir figure 3.4). Autrement dit, le poids de tous les grains au dessus de la hauteur  $h$  est compensé par les forces de frottement (Bertho et al., 2003, 2004, 2006).

### 3.2.2 Relation entre le débit de vidange et la taille de l’orifice : la loi de Beverloo

De la section précédente, nous pouvons retenir que la pression à la base d’un récipient rempli de grains dépend de la hauteur de grains pour peu que celle-ci soit suffisamment grande. Utilisons ce résultat afin de prédire, grâce à des arguments dimensionnels, le débit de vidange d’un silo de dimensions latérales infinies. Son orifice est de taille  $D$  et la hauteur de grains (diamètre  $d$ ) dans ce silo est égale à  $h$ . Nous nous limitons ici au cas du régime d’écoulement continu décrit dans l’introduction. Rappelons que celui-ci n’est possible pour des orifices suffisamment grands du fait de la formation de voûtes (To et al., 2001). Le débit de vidange du silo est égal au produit de la surface de l’orifice par la vitesse typique des grains en sortie. Dimensionnellement cette dernière quantité est égale à  $\sqrt{gL}$  ou  $L$  est une longueur caractéristique du système. Il existe trois candidats pour cette longueur : la taille de l’orifice  $D$ , la taille des grains  $d$ , ainsi que la hauteur de grains  $h$ . Cette dernière longueur est à exclure. En effet, comme nous le montre les travaux de Janssen (voir section précédente), la pression au fond d’un silo sature dès que la hauteur  $h$  est sensiblement plus grande qu’une hauteur caractéristique  $H$ . Dans ce cas, la pression et donc la vitesse de sortie des grains devient indépendante de  $h$ . La taille des grains n’intervenant pas non plus dans l’expression de la pression (en supposant que le milieu granulaire pouvait être représenté par un milieu continu, nous avons considéré que le diamètre des grains était petit devant toutes les autres dimensions caractéristiques du système), seule la taille de l’orifice intervient dans l’expression de la vitesse. Ainsi, la vitesse typique des grains à la sortie du silo est de l’ordre de  $\sqrt{gD}$ . Le débit est alors proportionnel à  $g^{1/2}D^{5/2}$ .

Beverloo (Beverloo et al., 1961) a mené une étude systématique de l’effet de la taille de l’orifice sur le débit de sortie du silo. Le résultat trouvé est semblable à celui prédit par l’analyse dimensionnelle moyennant le remplacement du diamètre de l’orifice par un diamètre effectif  $D_{\text{eff}} = D - kd$  :

$$\begin{cases} Q \sim \rho_n \sqrt{g} (D - kd)^{3/2} \text{ en 2 dimensions} \\ Q \sim \rho_n \sqrt{g} (D - kd)^{5/2} \text{ en 3 dimensions} \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $\rho_n$  est le nombre de grains par unité de volume au sein du milieu. Le coefficient  $k$  est un nombre sans dimension voisin de 1 associé à la zone d'exclusion pour les grains au périmètre de l'orifice.

### 3.2.3 Modèle cinématique d'écoulement en silo

Le modèle cinématique (Choi et al., 2004, 2005; Nedderman & Tüzün, 1979) permet d'obtenir des expressions théoriques pour les composantes des vitesses des grains au sein d'un silo :  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$ . Précisons que  $x$  et  $y$  correspondent aux directions horizontales et  $z$  à la direction verticale. Il repose sur une description du milieu granulaire comme un milieu continu répondant à deux hypothèses :

- Le milieu granulaire est incompressible :  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ .
- les grains se déplacent vers les zones de grande vitesse verticale selon

$$v_x = -b \frac{\partial v_z}{\partial x} \text{ et } v_y = -b \frac{\partial v_z}{\partial y} \text{ avec } b > 0.$$

La combinaison des ces deux expressions donne

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -b \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -b \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (3.6)$$

ce qui conduit à

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = b \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right). \quad (3.7)$$

Cette équation est une équation de diffusion où le temps a été remplacé par la position verticale  $z$ . Pour la résoudre nous pouvons utiliser la transformée de Fourier bidimensionnelle (par rapport à  $x$  et  $y$ ) de la vitesse  $v_z$  que nous noterons

$V(u, w, z)$ . Par définition, nous avons

$$V(u, w, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_z(x, y, z) \exp(-2i\pi(ux + wy)) dx dy. \quad (3.8)$$

En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (3.7), celle-ci devient

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -4\pi^2(u^2 + v^2)bV. \quad (3.9)$$

Par intégration par rapport à  $z$ , nous obtenons

$$V(u, w, z) = V(u, w, z = 0) \exp(-4\pi^2bz(u^2 + w^2)). \quad (3.10)$$

Si on considère que l'orifice est ponctuel nous avons

$$v_z(u, w, z = 0) = q_0\delta(x)\delta(y), \quad (3.11)$$

avec

$$\begin{aligned} V(u, w, z = 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, y, z = 0) \exp(-2i\pi(ux + wy)) dx dy, \\ &= q_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) dy, \\ &= q_0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La dimension de  $q_0$  est une vitesse multipliée par une surface. Nous pouvons donc écrire

$$v_z(x, y, z) = \frac{q_0}{\sqrt{4\pi bz}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4bz}\right). \quad (3.13)$$

Si nous avons accès au débit en nombre de grains par seconde, nous avons

$$Q = \frac{q_0}{\pi\phi d^3/6}, \quad (3.14)$$

où  $\phi$  représente la compacité du granulaire. Ce qui donne finalement

$$v_z(x, y, z) = \frac{Qd^3 \sqrt{\pi} \phi}{12\sqrt{bz}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4bz}\right). \quad (3.15)$$

Ainsi, ce modèle prédit que le profil de vitesse verticale des grains est donnée par une Gaussienne dont la largeur, variant comme  $\sqrt{z}$ , est d'autant plus large que les grains sont éloignés de l'orifice.

### 3.3 Géométrie du système et paramètres d'étude

Il existe de nombreux types de silos différant par la géométrie du réservoir ou encore celle de l'orifice de vidange. Par souci de simplicité nous nous restreignons ici à l'étude des silos dont la forme est un parallélépipède rectangle. Sauf

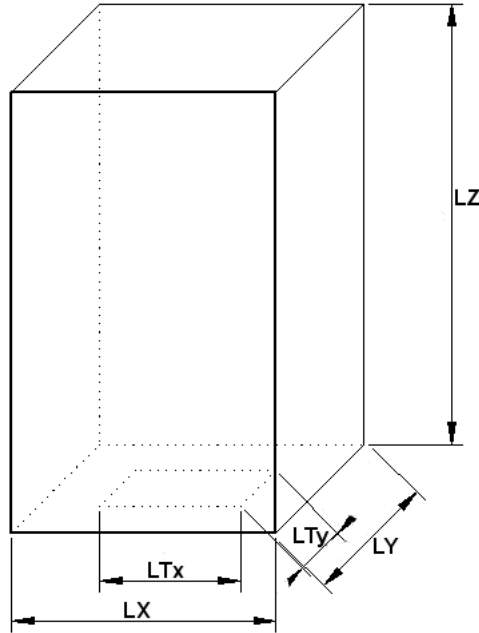


FIG. 3.5 – Schéma du silo utilisé lors des simulations. La hauteur du parallélépipède rectangle est  $Lz = 50d$ , sa largeur  $Lx = 25d$  et sa profondeur  $Ly = 25d$ . Les dimensions de l'orifice,  $Ltx$  et  $Lty$  sont comprises entre  $4d$  et  $18d$ .

indications contraires, la hauteur de notre silo est  $Lz = 50d$ , sa largeur  $Lx = 25d$  et sa profondeur  $Ly = 25d$ , où  $d$  est le diamètre des grains. Les grains s'écoulent à travers un orifice situé au fond du parallélépipède rectangle, de forme rectangulaire dont les dimensions sont  $Ltx$  et  $Lty$  (voir la figure 3.5). Dans le but de limiter le nombre de grains présents dans notre simulation tout en simulant des écoulements de durée significative et ainsi obtenir des écoulements stationnaires, nous utilisons des conditions aux limites "avec réutilisation". Elles consistent à ré-introduire les grains qui sortent par l'orifice au dessus de la surface libre du silo.

Le protocole utilisé pour réintroduire les grains est le suivant. Le premier grain qui sort du silo est réintroduit aux coordonnées  $(R_{max}, R_{max}, H_{max})$ .  $R_{max}$  représente le rayon maximal que peut avoir le grain,  $H_{max}$  est la hauteur pour ré-introduire les grains qu'on s'est fixé avec  $H_{max} < LZ$ . Les grains suivants qui sortent du silo sont, quant à eux, réintroduits aux coordonnées suivantes :

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + 2R_{max}, & y_i &= y_0, & z_i &= H_{max} & \text{si } x_{i-1} < Lx - 2R_{max} \\ x_i &= R_{max}, & y_i &= y_{i-1} + 2R_{max}, & z_i &= H_{max} & \text{sinon} \end{aligned}$$

Dans ces expressions  $x_{i-1}$  et  $y_{i-1}$  sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du grain  $i - 1$  sorti du silo juste avant le grain traité  $i$  avec  $x_0 = R_{max}$  et  $y_0 = R_{max}$ . Ce principe est schématisé sur la figure 3.6.

Notons que pour une stabilité de notre système et pour éviter que les grains rebondissent trop fortement sur la surface libre, les grains sont réintroduits avec une vitesse de translation et de rotation nulles.

Les simulations numériques que nous avons effectuées ont pour paramètres :  $d = 0,5 \text{ mm}$ ;  $\rho = 2,5 \times 10^{-6} \text{ kg}/(\text{mm})^3$ ;  $g = 9,81 \times 10^3 \text{ mm}/\text{s}^2$ ;  $k_n = 1,8 \times 10^4 \text{ kg}/\text{s}^2$ ;  $k_t = 2k_n/7$ ,  $\gamma_n = 130 \text{ kg}/\text{s}$  et  $\gamma_t = 0$ . Sauf indications contraires le coefficient de restitution entre grains  $e_n$  est égal à 0,885, le coefficient de frottement grain-grain  $\mu$  ainsi que le coefficient de frottement grain-parois  $\mu_{G/P}$  sont égaux à 0,5. Ces valeurs sont les mêmes que celles utilisées par (Silbert et al., 2001) qui depuis ont été reprises à maintes reprises (voir par exemple (Rycroft et al., 2009; Pica Ciamarra et al., 2011)) et font l'objet de référence. Notons que nous



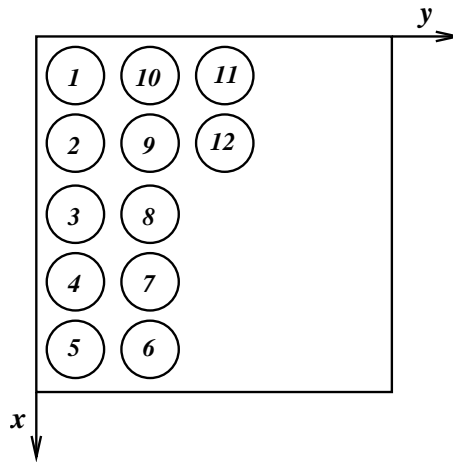


FIG. 3.6 – Ordonnement des particules à la hauteur  $H_{max}$  dans le but d’éviter le chevauchement des grains.

sommes alors dans le cas où le temps de collision “normal” est plus petit que le temps collision “tangential” (voir l’équation 2.12 du chapitre 2).

## 3.4 Étude du débit

### 3.4.1 Relation entre la hauteur de l’écoulement et le débit

Dans le cas d’un liquide dans un silo, d’après la formule de Torricelli <sup>2</sup>, plus la hauteur d’eau est importante et plus la pression – et donc la vitesse des grains – au niveau de l’orifice est importante. Le cas d’un milieu granulaire est différent. Les travaux de Janssen (Janssen & Vereines, 1895) mentionnés plus haut ont en effet montré que la pression sature dès que l’empilement est suffisamment grand c’est à dire dès qu’il a dépassé significativement une hauteur caractéristique dépendant des propriétés des grains et du récipient. Tout ajout de grains dans le silo n’affectera alors pas la pression au fond. Le surplus de poids n’est pas transmis au fond mais est supporté entièrement par les forces de frottement aux parois. Il en

<sup>2</sup>Ce résultat classique de la mécanique des fluides, établit que le carré de la vitesse d’écoulement d’un fluide,  $v$ , s’échappant d’un récipient par un orifice sous l’effet de la pesanteur  $g$  est proportionnelle à la hauteur  $h$  de fluide située au-dessus de l’orifice  $v = \sqrt{2gh}$ .

découle un débit de vidange du silo constant, toujours pour une hauteur de grains suffisamment importante. Nos simulations sont-elles capables de reproduire cette saturation de pression ? À partir de quelle hauteur le débit devient-il constant ?

La figure 3.7 représente les différentes courbes du débit obtenues lors des simulations en faisant varier le nombre de grains dans le silo (autrement dit en faisant varier la hauteur des grains dans le silo). Nous constatons que le débit augmente avec le nombre de grains jusqu'à ce qu'il atteigne un débit limite, conformément au modèle de Janssen (section 3.2.1). En effet, comme ce dernier prédit une variation exponentielle de la pression en fonction de la hauteur des grains, il est naturel d'ajuster les courbes  $Q = f(H/d)$  par la fonction  $Q = Q_0(1 - \exp(-H/H_0))$  en remplaçant dans l'équation (3.4) les masses par les débits. Dans cette fonction,  $Q_0$  représente bien évidemment le débit maximal de saturation et  $H_0$  la hauteur caractéristique de la saturation du débit. La valeur de  $H_0$  obtenue est de l'ordre  $5,7d$ . Le débit correspondant à la saturation de la pression,  $Q_0$ , quant-à-lui, sera étudié dans la prochaine section.

### 3.4.2 Relation entre les dimensions de l'orifice et le débit

Nous avons vu que la hauteur de grains dans le silo avait un effet sur l'écoulement, du moins tant que cette dernière était inférieure à un certain seuil. Ici, nous allons étudier l'influence sur le débit d'un autre paramètre : la taille de l'orifice. Comme indiqué dans la section 3.2.2, ceci a été étudié expérimentalement par Beverloo (Beverloo et al., 1961). Ces auteurs ont reporté une variation du débit massique donnée par la relation

$$Q = C \rho_n \sqrt{g} (D - kd)^{\frac{5}{2}}, \quad (3.16)$$

où  $\rho_n = \Phi \rho_s / m$  où  $\Phi$  est la compacité du granulaire,  $\rho_s$  et  $m$  sont respectivement la densité et la masse volumique du grain,  $D$  est le diamètre de l'orifice (dans notre cas nous avons pris  $D$  comme étant le diamètre hydraulique  $D_H = 4 \times \text{aire} / \text{Perimètre} = 2Ltx Lty / (Ltx + Lty)$ ),  $C$  est une constante adimensionnelle dépendant essentiellement des caractéristiques géométriques du silo et

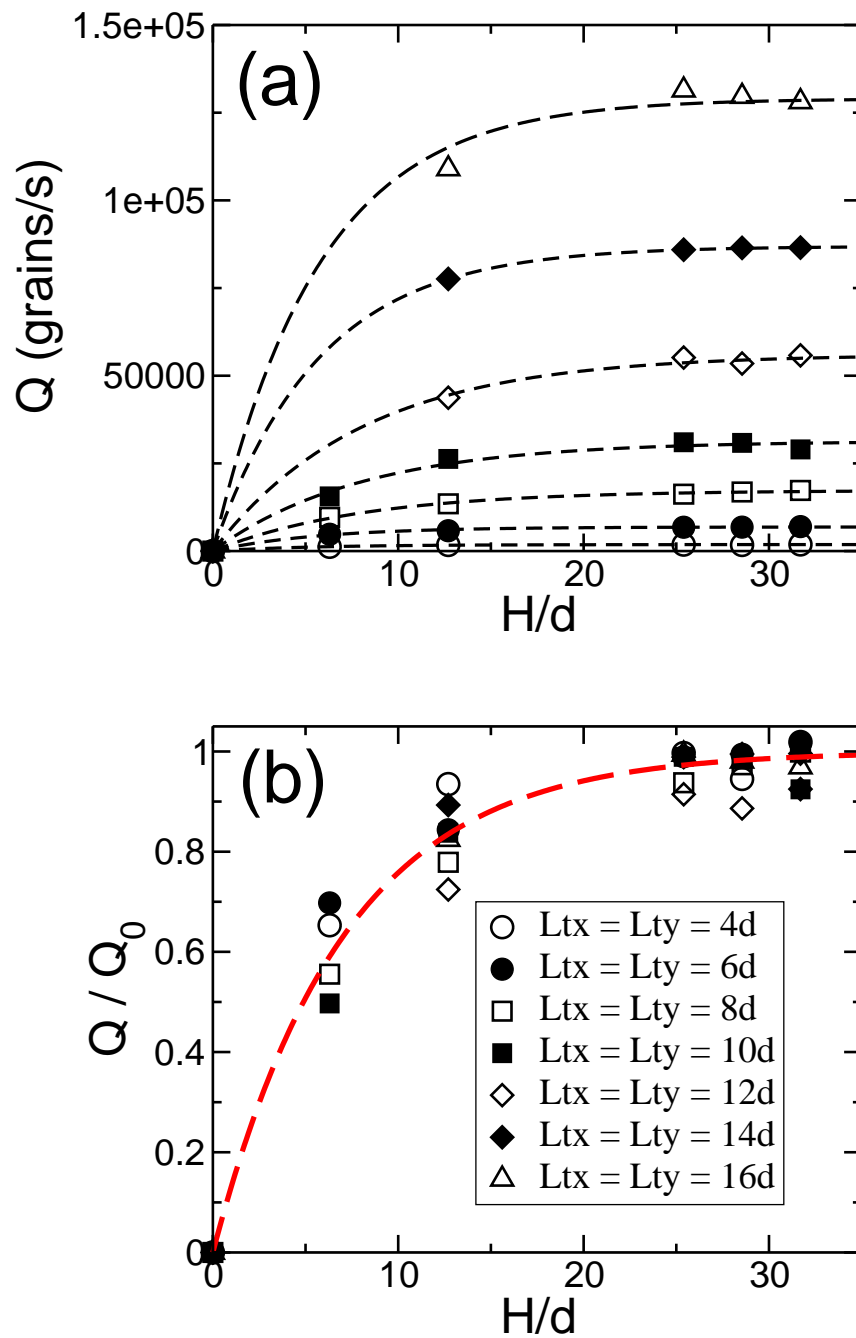


FIG. 3.7 – (a) Évolution du débit en fonction de la hauteur des grains ainsi que les ajustements exponentiels correspondants. Lorsque la hauteur augmente, le débit sature vers une valeur qui dépend de la taille de l’orifice (ici  $L_{tx} = L_{ty} = 6d$ ). (b) Évolution du débit adimensionné par le débit obtenu pour des grandes hauteurs de grains ( $Q_0$ ) en fonction de la hauteur des grains ainsi que les ajustements exponentiels correspondants

$k$  une constante empirique et adimensionnelle dépendant de la forme des grains.

La figure 3.8a présente les débits obtenus dans nos simulations pour différentes tailles de l'orifice du silo. Nous nous sommes limités au cas  $Ltx = Lty$ . Conformément à l'intuition nous observons une augmentation du débit avec la taille de l'orifice et, en accord avec la loi de Beverloo, cette augmentation est en  $(D-kd)^{5/2}$  (voir figure 3.8b). L'ajustement réalisé sur la figure nous donne  $k = 1,47 \pm 0,05$  et  $C = 1.7$  (en prenant une compacité au niveau de l'orifice égale à 0,5). Récemment, Hilton et Cleary (Hilton & Cleary, 2011) ont décrit la vidange d'un silo à l'aide d'un modèle basé sur la dynamique individuelle des grains au niveau de l'orifice (circulaire). Ce modèle prédit  $C \simeq \pi/5$  et  $k \simeq 1,5$ . Nous retrouvons une valeur de  $k$  compatible avec ce modèle. Ce n'est pas le cas pour la valeur de  $C$  qui est près de 2 fois plus grande dans nos simulations. Notons que ce modèle suppose que les grains sortant de l'orifice effectuent une chute libre depuis une hémisphère de rayon  $R - kd$  placé juste au dessus de l'orifice circulaire de rayon  $R$ . Ce modèle n'est donc pas à priori directement applicable à nos simulations où l'orifice est rectangulaire et l'adaptation de ce modèle à notre géométrie n'est pas triviale. Il est néanmoins intéressant de noter que ce modèle prédit que le débit de vidange est proportionnel à la compacité de l'écoulement au niveau de l'orifice.

### 3.4.3 Relation entre le débit et le coefficient de frottement

Nous avons montré que notre simulation reproduisait correctement des résultats expérimentaux obtenus par Janssen (Janssen & Vereines, 1895) et Beverloo (Beverloo et al., 1961). L'un des intérêts de la simulation numérique est de pouvoir très facilement modifier les propriétés micro-mécaniques des grains (restitution, frottement...) et ainsi quantifier leur influence sur le comportement macroscopique du milieu. Nous allons maintenant étudier l'effet du coefficient de frottement entre grains sur le débit du silo. À cet effet, nous maintenons le coefficient de restitution constant ( $e_n = 0,885$ ) tout en faisant varier le coefficient de frottement entre grains  $\mu$  de 0 à 1. Les résultats sont récapitulés sur la figure 3.9. Nous constatons sur cette figure que le débit décroît lorsque le coefficient de frottement croît. Afin d'expliquer ce phénomène, deux hypothèses non-incompatibles

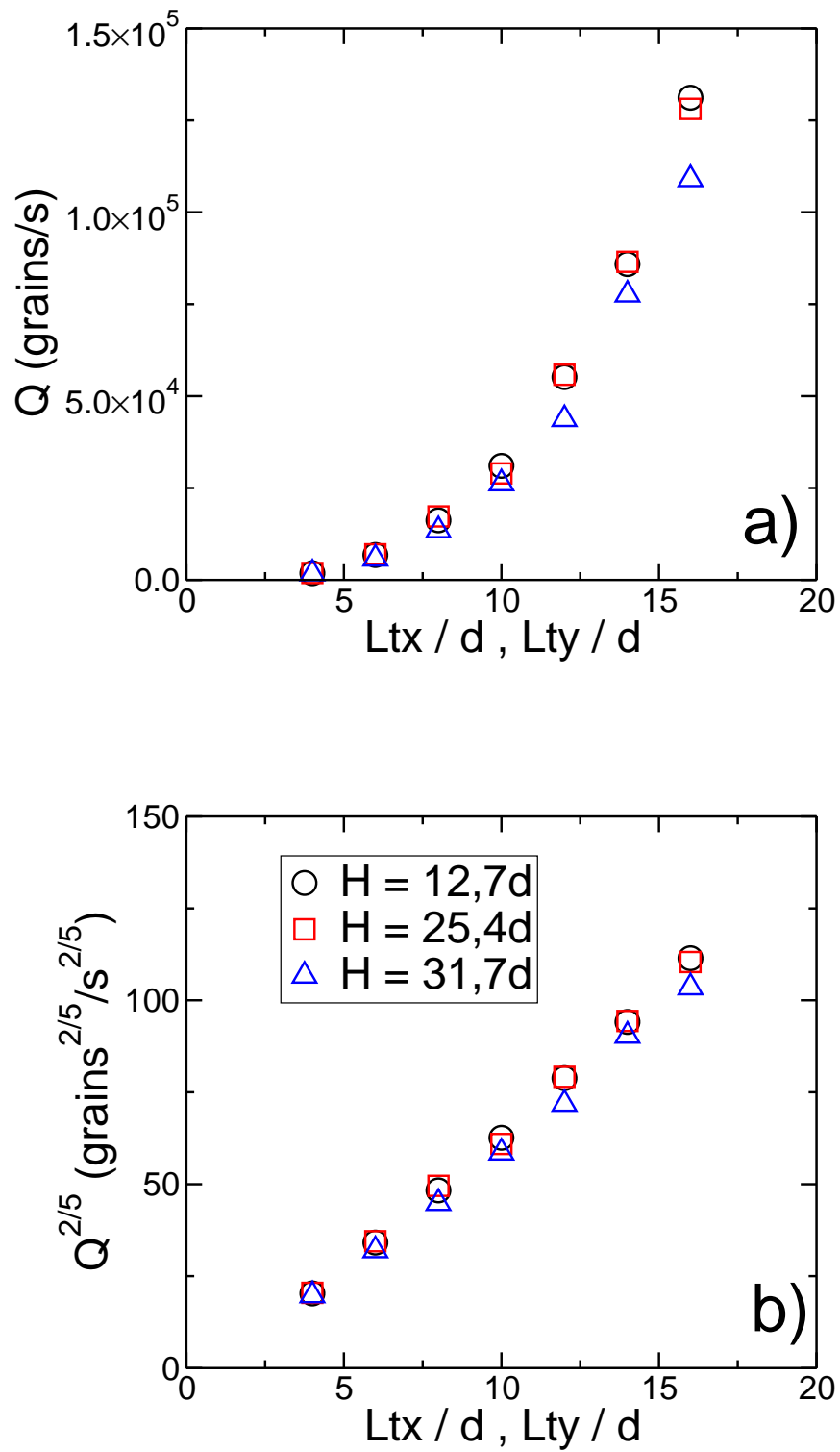


FIG. 3.8 – (a) Évolution du débit  $Q$  en fonction de la taille de l'orifice pour différentes hauteurs de grains au sein du silo. Les ajustements de ces données par la loi de Beverloo sont également représentés. (b) Évolution de  $Q^{2/5}$  en fonction de la taille de l'orifice montrant la pertinence de la loi de Beverloo.

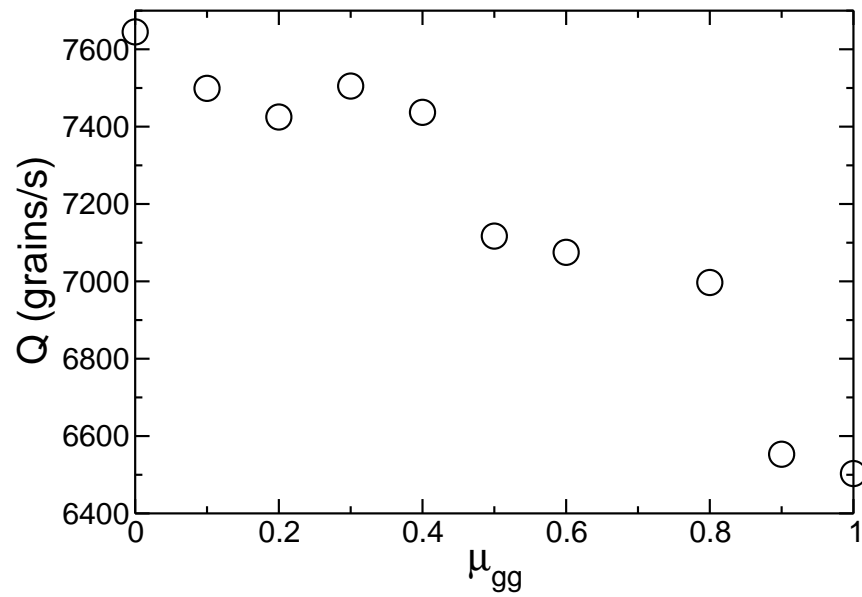


FIG. 3.9 – Évolution du débit en fonction du coefficient de frottement pour une hauteur d'écoulement  $H = 25,4d$  et une taille d'orifice  $6d \times 6d$ . Le coefficient de restitution entre grains est maintenu constant ( $e_n = 0,885$ ).

peuvent être formulées.

- L’augmentation du coefficient de frottement fait augmenter la dissipation. La vitesse moyenne des grains en sortie de silo et le débit sont ainsi plus faibles.
- L’augmentation du coefficient de frottement fait diminuer la compacité de l’écoulement (un fort coefficient de frottement favorise la création d’arches au sein du milieu et, de ce fait, diminue la compacité). Le débit est ainsi plus faible car, par unité de temps, il y a moins de grains à sortir de l’orifice.

Nous reviendrons sur la première hypothèse au cours de la section 3.5. Attardons nous maintenant quelques instants sur la deuxième. Nous pouvons, dans nos simulations, calculer aisément la compacité au niveau de l’orifice. Nos résultats indiquent que cette quantité diminue en effet lorsque le frottement entre grains augmente, ce qui valide la deuxième hypothèse formulée. Ceci est illustré par la figure 3.10 où nous avons représenté l’évolution du débit en fonction de la compacité au niveau de l’orifice. Il apparaît clairement que ces deux quantités sont liées et qu’un ajustement linéaire est tout à fait satisfaisant.

#### 3.4.4 Relation entre le débit et le coefficient de restitution

Comme indiqué au chapitre 2, le coefficient de restitution  $e_n$  est un autre coefficient physique qui intervient lors d’une collision. C’est une constante caractérisant l’inélasticité des collisions entre grains et qui dépend de leurs caractéristiques physiques (voir le chapitre précédent). Pour cette étude nous maintenons la valeur du coefficient de frottement fixe  $\mu = 0,5$  et nous faisons varier celle du coefficient de restitution  $e_n$  entre 0 à 1. La figure 3.11 récapitule les résultats des simulations.

Nous constatons sur cette figure que le débit décroît lorsque le coefficient de restitution croît (voir Figure 3.11). Ce résultat semble cohérent car plus la dissipation est importante (plus le coefficient de restitution est faible) et moins la vitesse des grains est importante. Néanmoins, les résultats précédents ont mis en évidence l’importance de la compacité au niveau de l’orifice. Cette compacité est-elle modifiée lorsque le coefficient de restitution change? Nos résultats montrent que, à l’instar de ce qui se passe lorsque nous modifions le coefficient

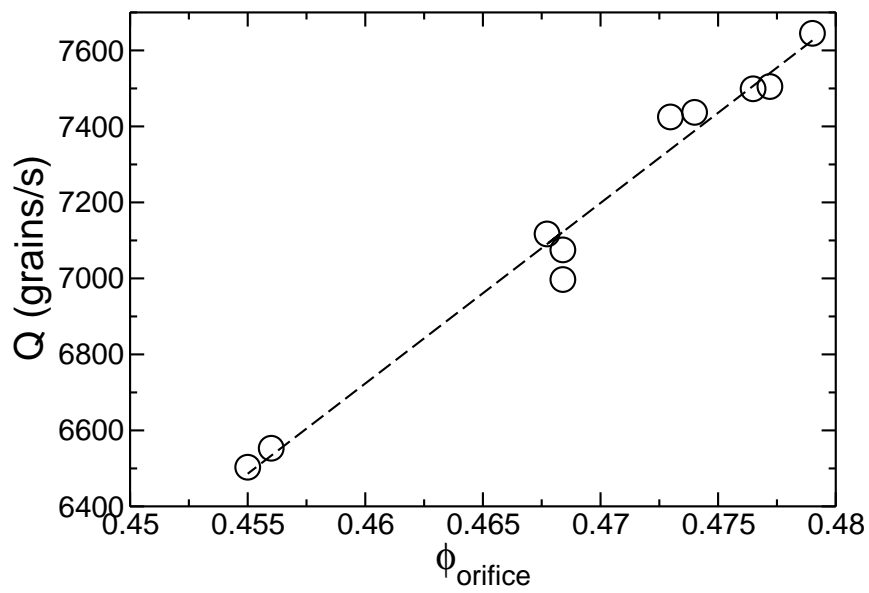


FIG. 3.10 – Évolution du débit en fonction de la compacité mesurée au niveau de l’orifice pour une hauteur d’écoulement  $H = 25,4d$  et une taille d’orifice  $6d \times 6d$ . Ces données ont été obtenues en modifiant le coefficient de frottement entre grains, le coefficient de restitution restant constant :  $e_n = 0,885$ . Les tirets représentent l’ajustement linéaire des données.



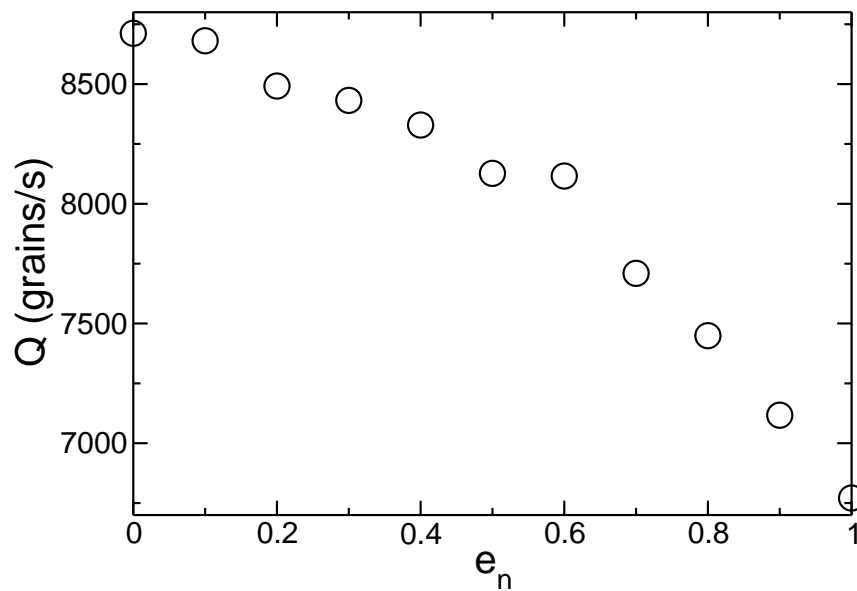


FIG. 3.11 – Évolution du débit en fonction du coefficient de restitution pour une hauteur d'écoulement  $H = 25,4d$  et une taille d'orifice  $6d \times 6d$ . Le coefficient de frottement entre grains est maintenu constant  $\mu = 0,5$

de frottement, cette compacité diminue lorsque  $e_n$  est augmenté.

Nous avons représenté sur la figure 3.12 l'évolution du débit en fonction de la compacité de l'orifice pour les simulations où nous avons fait varier le coefficient de restitution. Ici aussi, l'approximation linéaire est raisonnable. Si nous regroupons sur la même figure les points obtenus en faisant varier le coefficient de frottement et ceux obtenus en faisant varier le coefficient de restitution, ils se regroupent sur la même courbe (insert de la figure 3.12) et ici encore l'approximation linéaire est satisfaisante.

### 3.5 Étude du profil de vitesse

Dans la section précédente, nous nous sommes intéressés à une quantité macroscopique : le débit de vidange d'un silo. Derrière cette grandeur moyenne se cache une grande hétérogénéité du comportement des grains. En effet, comme

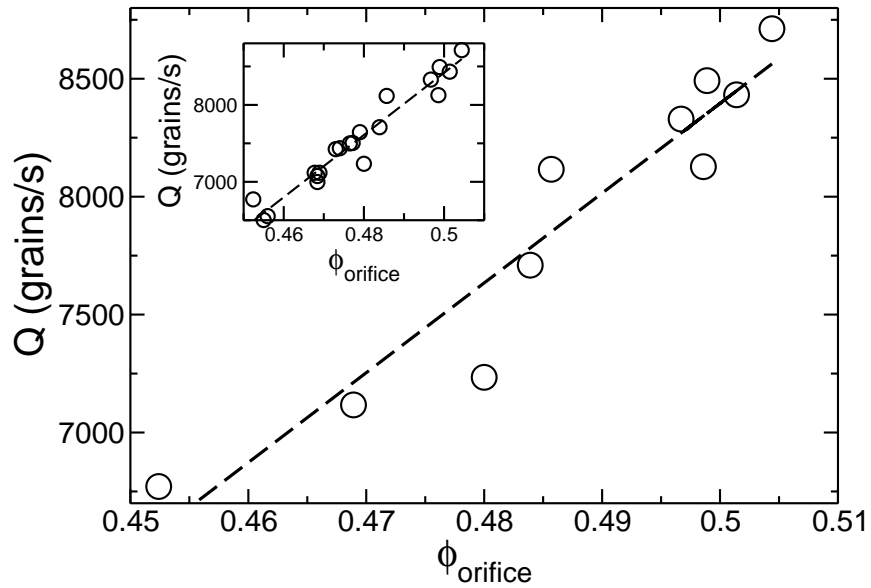


FIG. 3.12 – Évolution du débit en fonction de la compacité mesurée au niveau de l’orifice pour une hauteur d’écoulement  $H = 25,4d$  et une taille d’orifice  $6d \times 6d$ . Ces données ont été obtenues en modifiant le coefficient de restitution, le coefficient de frottement entre grains restant constant :  $\mu = 0,5$ . Les tirets représentent l’ajustement linéaire des données. L’insert regroupe les données obtenues en modifiant le coefficient de frottement, puis le coefficient de restitution. Ici aussi l’ajustement linéaire est satisfaisant.

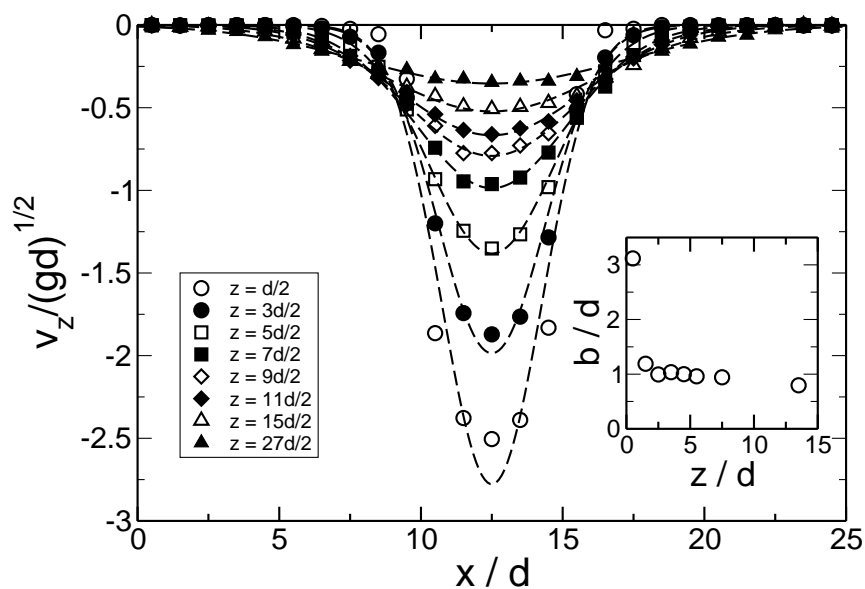
indiqué dans l'introduction, la vitesse des grains au sein des silos varie fortement selon qu'ils soient placés dans des zones statiques (les zones mortes de la figure 3.1) ou à proximité de l'orifice où ils sont quasiment en chute libre. Le but de cette section est double. D'une part nous allons tester le modèle cinématique sur nos données afin de juger son domaine de validité. D'autre part, comme nous l'avons fait pour l'étude du débit, nous allons étudier numériquement l'effet du coefficient de frottement et du coefficient de restitution sur les vitesses des grains.

### 3.5.1 Comparaison du profil de vitesses observé et le profil de vitesses obtenu par le modèle cinématique

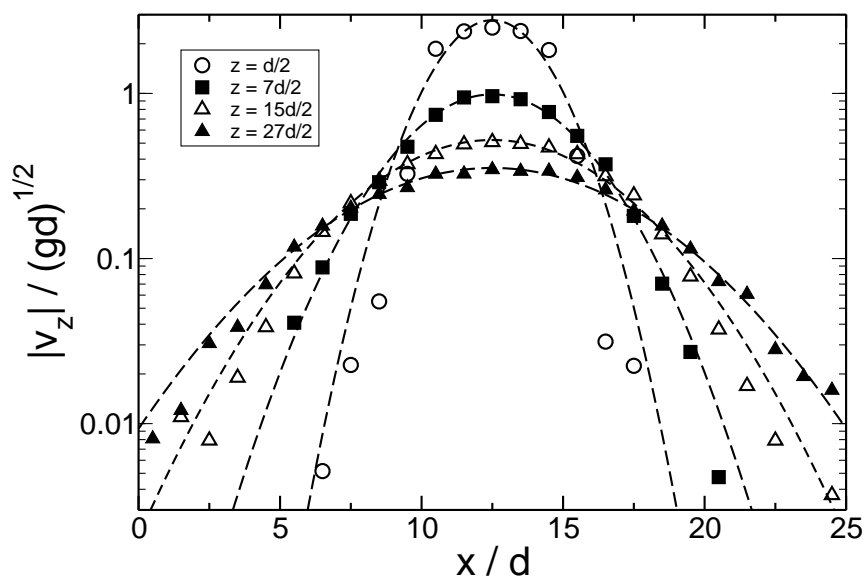
Nous allons comparer ici les profils de vitesse obtenus lors des simulations avec le modèle cinématique décrit précédemment. Pour faire cette comparaison nous avons choisi une hauteur de grain de  $H = 25,4d$  dans le silo, un coefficient de frottement  $\mu = 0,5$  et un coefficient de restitution  $e_n = 0,885$ . Nous avons tracé le profil de vitesse ( $v_z$ ) à différentes hauteurs  $z$  de d'écoulement (voir figure 3.13). Précisons que  $z = 0$  correspond à l'altitude de l'orifice. La figure 3.13 montre que, pour  $z/d = 1/2$ , le modèle cinématique ne s'accorde pas exactement avec le profil de vitesse obtenu par les simulations numériques car ce dernier est moins étroit pour les  $x$  proches de l'orifice. Pour des grandes valeurs de  $z$ , le profil est correctement ajusté par le modèle cinématique même si la courbe numérique semble être légèrement plus large que celle de l'ajustement.

Nous avons représenté sur l'insert de la figure 3.13 l'évolution du paramètre du modèle cinématique,  $b$  en fonction de  $z$ . Les valeurs de  $b$  ainsi tracées ont été obtenues par l'ajustement des courbes  $v_z = f(x)$  par l'équation (3.15). Nous remarquons que  $b$  décroît lorsque  $z$  croît. Cette décroissance est très rapide pour les petites valeurs de  $z$  puis beaucoup plus "douce" par la suite. Un autre moyen de remarquer que  $b$  dépend de  $z$ , et d'essayer d'ajuster les profils de  $v_y$  par le modèle cinématique en utilisant pour  $b$  non pas la fonction  $b(z)$  représentée sur l'insert de la figure 3.13(a) mais sa valeur moyenne  $\langle b \rangle = \int_0^h b(z) dz$  (voir figure 3.14).

Nous remarquons que, bien que l'ajustement soit correct pour une grande partie des données, proche de l'orifice le modèle cinématique sur-estime les vitesses.



(a)



(b)

FIG. 3.13 – (a) Profils de vitesse ( $v_z$ ) obtenus par simulation numérique (symboles) et par le modèle cinématique (lignes) à différentes hauteurs de  $z$ .  $\mu = 0,5$ ,  $e_n = 0,885$ ,  $Lx = Ly = 25d$ ,  $Ltx = Lty = 6d$  et  $H = 25,4d$ . Insert : évolution du paramètre  $b$  obtenu par l'ajustement des données numériques en fonction de  $z$ . (b) Mêmes données en échelle semi-logarithmique montrant la qualité de l'ajustement par le modèle cinématique.

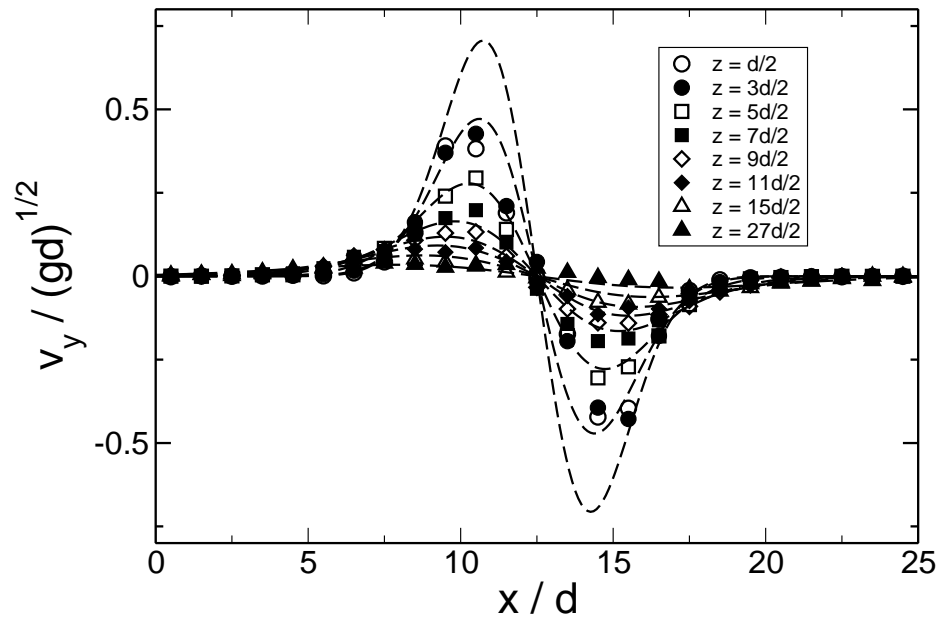


FIG. 3.14 – Profils de des vitesse  $v_y$  en fonction de  $x$  obtenus par simulation numérique (symboles) à différents hauteurs de  $z$ . Les lignes représentent le modèle cinématique en utilisant comme paramètre  $b$  la valeur moyenne de la courbe  $b(z)$ . Le mauvais ajustement pour  $z = d/2$  montre la nécessité d'utiliser un coefficient  $b$  non constant.

Ceci peut être corrigé en remplaçant la valeur moyenne de  $\langle b \rangle$  par la valeur  $b(z)$  correspondante. Ceci montre bien que le paramètre du modèle cinématique,  $b$ , n'est pas une constante mais une fonction de l'altitude  $z$ .

Un point important est que pour obtenir l'équation (3.15), nous avons supposé que l'orifice était une source ponctuelle ce qui revient à négliger sa taille. Cette approximation peut être justifiée pour des  $z$  éloignés de l'orifice mais ce n'est pas le cas pour  $z = d/2$ . Ceci explique probablement pourquoi le coefficient  $b$  décroît fortement au niveau de l'orifice. Notons néanmoins que même pour des altitudes éloignées de l'orifice le paramètre  $b$  semble décroître (plus légèrement) avec  $z$ . Ce paramètre étant, selon les hypothèses du modèle, lié à la mobilité latérale des grains, sa variation est-elle liée à la variation de la compacité du milieu. Faute de temps cette hypothèse n'a pas été explorée.

### 3.5.2 Effet de la hauteur d'écoulement sur le profil de vitesse

Dans cette section nous présentons les profils de vitesses obtenus sur différentes simulations en faisant varier le nombre de grains et par conséquent la hauteur d'écoulement dans le silo. Comme indiqué précédemment, d'après les travaux de Janssen, le profil de vitesse pour les altitudes  $z$  proches de l'orifice, ne devrait pas dépendre de la hauteur des grains si cette dernière était suffisamment importante pour que la pression au sein du silo soit saturée. Pour ces simulations nous avons pris comme dimensions du silo  $Lx = Ly = 25d$ . L'orifice quant à lui a pour dimensions  $Ltx = Lty = 6d$ . Le coefficient de frottement et de restitution valent respectivement  $\mu = 0,5$  et  $e_n = 0,885$ .

La figure 3.15 montre les profils de vitesse pour différentes hauteurs de grains. Conformément à ce qui est attendu, la vitesse d'écoulement et par conséquent le débit augmente avec la hauteur d'écoulement jusqu'à ce que cette dernière soit suffisamment grande. Les profils de vitesse deviennent alors indépendants de la hauteur de grains pour  $H \geq 20d$ , ce qui est cohérent avec les résultats que nous avons obtenus sur les débits (voir la section 3.4.1).

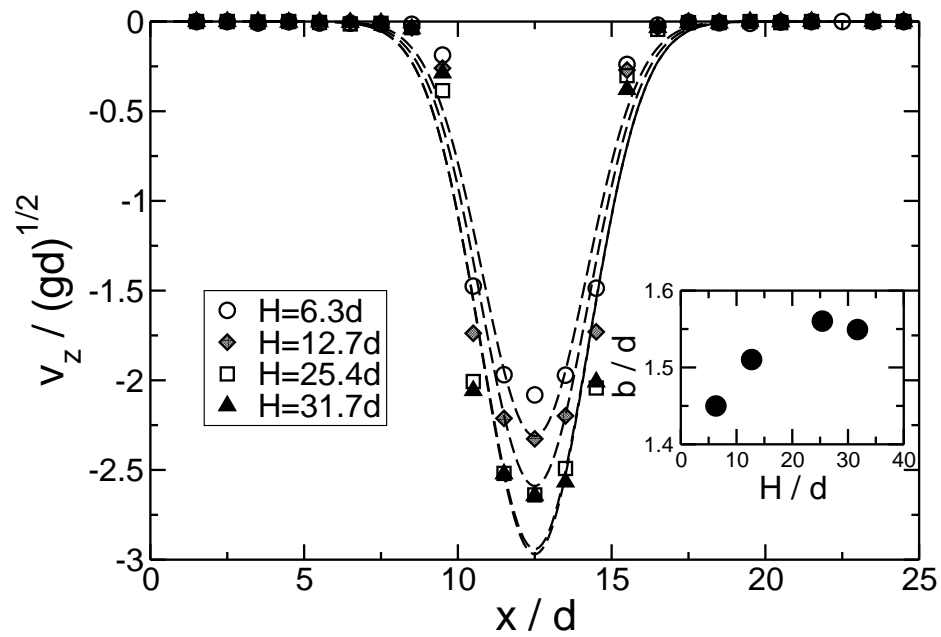


FIG. 3.15 – Profils de vitesse obtenus par simulation numérique (symboles) et par le modèle cinématique (lignes) à la hauteur  $z = d/2$  pour différentes hauteurs de grains dans le silo.  $\mu = 0,5$ ,  $e_n = 0,885$ ,  $Lx = Ly = 25d$  et  $Ltx = Lty = 6d$ . L'insert représente l'évolution de  $b$  avec  $H$ . Nous observons une saturation du profil de vitesse pour  $H \geq 20d$ , ce qui est cohérent avec nos résultats sur les débits.

### 3.5.3 Effet de la largeur du silo sur le profil de vitesse

Comme dans la section précédente, nous présentons les profils de vitesses obtenus sur différentes simulations en faisant varier cette fois ci la largeur du silo  $L_y$  tout en maintenant l'autre dimension  $L_x = 25d$  constante. Le nombre de grains est maintenu à 16000 de façon à avoir une statistique suffisamment bonne et à nous placer dans le régime où le débit ne dépend plus de la hauteur de grains. Pour ces simulations l'orifice a pour dimension  $L_{tx} = L_{ty} = 6d$ , le coefficient de frottement est  $\mu = 0,5$  et le coefficient de restitution  $e_n$  vaut 0,885.

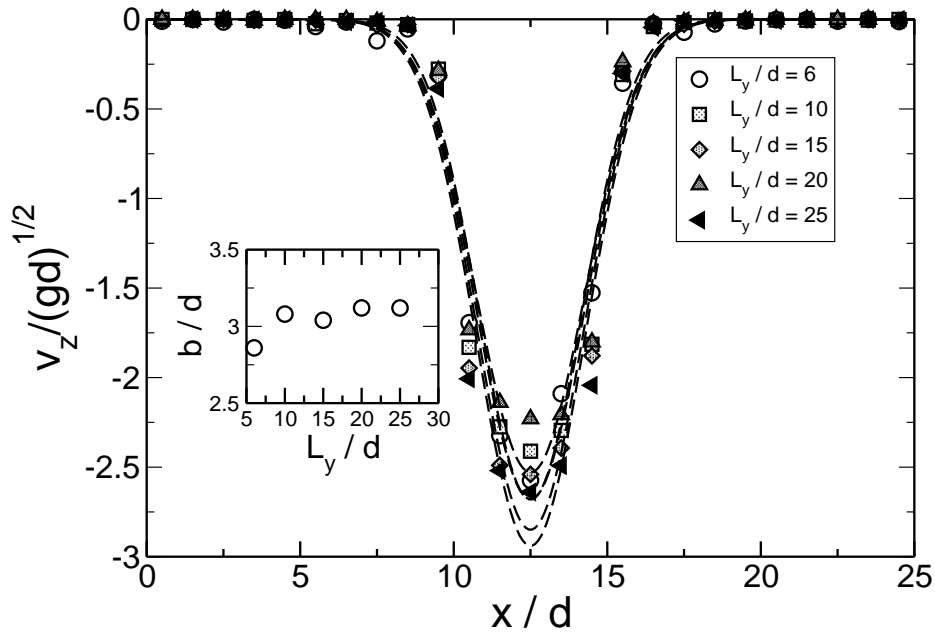


FIG. 3.16 – Profils de vitesse obtenus par simulation numérique (symboles) et par le modèle cinématique (lignes) à la hauteur  $z = d/2$  pour différents  $L_y$ .  $\mu = 0,5$ ,  $e_n = 0,885$ ,  $L_x = 25d$ ,  $L_{tx} = L_{ty} = 6d$  et  $H = 25,4d$ . L'insert représente l'évolution du paramètre du modèle cinématique  $b$  en fonction de la largeur du silo  $L_y$ .

La figure 3.16 montre le récapitulatif des profils de vitesse pour différentes simulations dans lesquelles nous avons fait varier la largeur du silo. Ces courbes montrent clairement que la vitesse d'écoulement est peu influencée par la largeur du silo. Ceci est un peu surprenant car l'effet du confinement est crucial dans le



cas d'écoulements en canal incliné (Taberlet et al., 2003) qui présentent certaines similitudes avec les écoulements en silos. Dans ces études le paramètre permettant de quantifier les effets de paroi est le rapport entre la hauteur d'écoulement et la distance de confinement (distance entre les parois). Dans le cas du silo avec un orifice carré, la hauteur d'écoulement correspond à la taille de l'orifice et la distance de confinement est toujours supérieure ou égale à cette même taille. Ainsi nous sommes systématiquement dans un cas de confinement faible. Afin de se mettre dans des conditions de confinement fort, il aurait fallu prendre un orifice rectangulaire, choisir  $Lty = Ly$  et étudier l'effet de  $Ltx$  sur les propriétés de l'écoulement avec  $Ltx < Lty$ .

### 3.5.4 Effet du coefficient de frottement sur le profil de vitesse

Dans cette section nous allons étudier l'effet du coefficient de frottement entre grains sur le profil de vitesse. Nous avons vu que ce coefficient faisait diminuer le débit. Ceci nous a amené à émettre l'hypothèse que cette diminution pouvait être la conséquence d'une diminution de la vitesse. Nous allons, dans cette section, vérifier cette hypothèse.

Pour ces simulations nous avons comme dimensions du silo  $Lx = Ly = 25d$ , l'orifice a pour dimensions  $Ltx = Lty = 6d$ , le nombre de grains est  $N = 16000$  et le coefficient de restitution  $e_n = 0,885$ . Nous observons que lorsque nous modifions le coefficient de frottement les profils de vitesse sont presque inchangés. Une légère diminution de la vitesse lorsque  $\mu$  (et donc la dissipation) augmente mais celle-ci ne peut pas expliquer à elle seule la diminution du débit. Précisons ici que nous parlons du coefficient de frottement grain-grain, le coefficient de frottement grain-paroi étant, quant à lui, maintenu à 0,5. Ces résultats sont surprenants. En effet, augmenter le coefficient de frottement revient à augmenter la dissipation et on aurait pu s'attendre à ce que la vitesse diminue. Cette faible influence du coefficient de frottement inter-grains montre que la vidange d'un silo est quasi-statique et purement géométrique.

Comme nous l'avons vu à la section 3.4.3, une augmentation du coefficient de

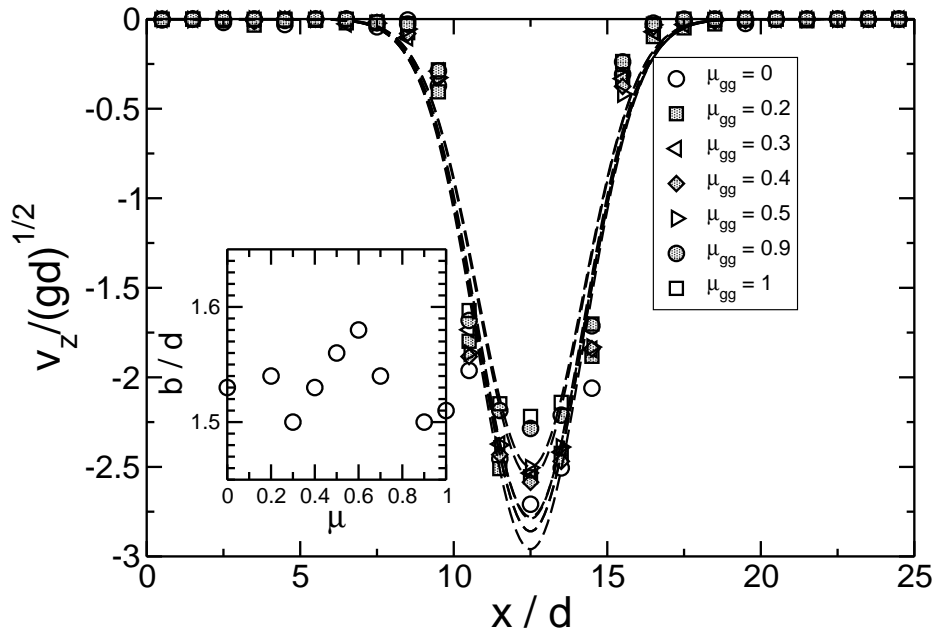


FIG. 3.17 – Profils de vitesse obtenus par simulation numérique (symboles) et par le modèle cinématique (lignes) à la hauteur  $z = d/2$  pour différents coefficients de frottement  $\mu$ .  $e_n = 0,885$ ,  $Lx = Ly = 25d$ ,  $Ltx = Lty = 6d$  et  $H = 25,4d$ . L'insert représente l'évolution du paramètre du modèle cinématique  $b$  en fonction du coefficient de frottement.

frottement correspond à une diminution du débit. Comme la vitesse ne semble dépendre que faiblement du coefficient de frottement, seule une diminution de la compacité lorsque le coefficient de frottement augmente peut expliquer cette diminution du débit. Ces résultats sont cohérents avec la relation linéaire observé précédemment entre le débit et la compacité au niveau de l'orifice.

### 3.5.5 Effet du coefficient de restitution sur le profil de vitesse

Nous présentons maintenant les profils de vitesse obtenus sur différentes simulations en faisant varier le coefficient de restitution. Pour ces simulations nous avons comme dimensions du silo  $Lx = Ly = 25d$ , l'orifice a pour dimension  $Ltx = Lty = 6d$ , le nombre de grains  $N = 16000$  et le coefficient de frottement entre grains  $\mu = 0,5$ .

Les travaux précédents (Dippel et al., 1996; Rajchenbach, 2003; Dippel et al., 1997; Azanza et al., 1999; Schafer et al., 1996) ont montré que les propriétés des écoulements granulaires denses sont insensibles à la valeur du coefficient de restitution. En effet, un coefficient de restitution est défini dans le cadre d'un contact entre deux grains. Or, dans ce type d'écoulements, la plupart des contacts sont multiples et la dissipation de l'énergie d'un grain quasi-instantanée. Ce résultat est, à l'instar de ce qui est observé pour le coefficient de frottement, parfaitement cohérent avec la relation linéaire entre le débit de vidange et la compacité au niveau de l'orifice. Lorsque nous modifions le coefficient de restitution entre grains, les vitesses des grains au sein du silo restent inchangées. Seule la compacité au niveau de l'orifice est réduite et il en découle une variation linéaire du débit de vidange avec cette compacité.

## 3.6 Conclusion

Nous avons mis au point une méthode de simulation numérique de type éléments discrets permettant l'étude des écoulements granulaires en silo. Ce modèle nous a permis de tester l'effet de certains paramètres (du silo ou des grains) sur

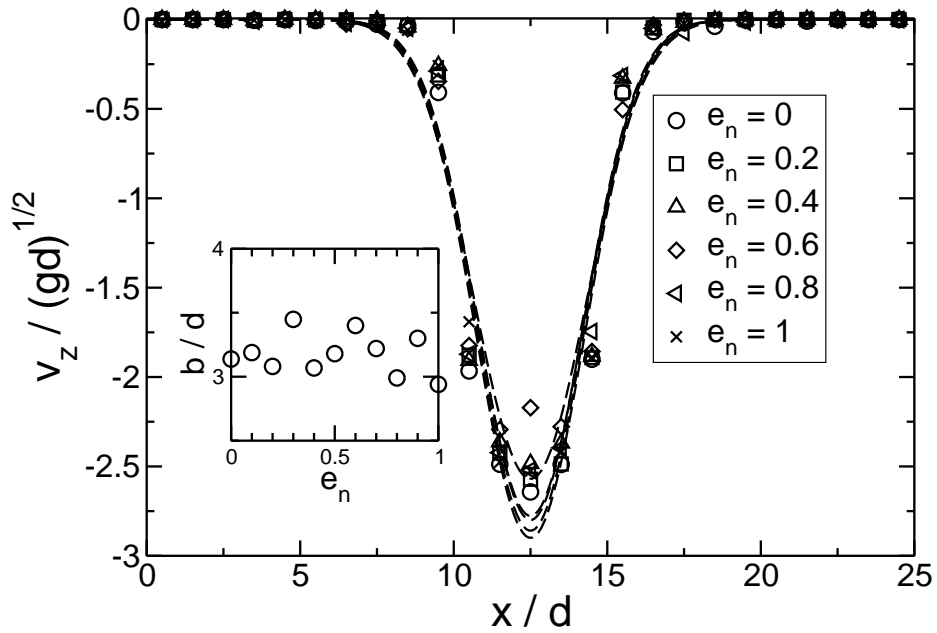


FIG. 3.18 – Profils de vitesse obtenus par simulation numérique (symboles) et par le modèle cinématique (lignes) à la hauteur  $z = d/2$  pour différents coefficients de restitution  $e_n$ .  $\mu = 0,5$ ,  $Lx = Ly = 25d$ ,  $Ltx = Lty = 6d$  et  $H = 25,4d$ . L'insert représente l'évolution du paramètre du modèle cinématique en fonction du coefficient de restitution.

le débit de vidange ainsi que sur la vitesse des grains au sein de ce dernier. Nous avons mis en évidence la dépendance du débit d'écoulement (paramètre "macroscopique") vis-à-vis du coefficient de frottement et du coefficient de restitution (paramètres "microscopiques"). Cette dépendance a été attribuée à la variation de compacité au niveau de l'orifice induite par les modifications de ces propriétés micromécaniques.

Ces simulations étant coûteuses en temps (la simulation d'un écoulement de 16000 grains dans cette géométrie silo pendant 1,005 secondes requiert un temps CPU de 18 heures et une mémoire vive résidante de l'ordre de 200 Mo), nous nous sommes limités à des silos de petites tailles. Nos résultats numériques reproduisant correctement de nombreux résultats expérimentaux obtenus sur avec des silos comprenant beaucoup plus de grains (par exemple (Choi et al., 2005)), nous pouvons raisonnablement supposer que nos résultats restent qualitativement valables pour des systèmes plus grands. Une question reste en suspend : peut-on raisonnablement simuler un silo industriel? Pour fixer les idées prenons le cas d'un silo de  $1000 \text{ m}^3$  (ce qui correspond à un silo cylindrique haut de dix mètres et dont le rayon est égal à 5 mètres) comprenant des grains de maïs (volume approximatif d'un grain :  $0,5 \text{ cm}^3$ ). Un tel dispositif contient approximativement deux milliards de grains. Il y a donc dans un silo industriel à peu près 100 000 fois plus de grains que dans nos silos "numériques". Ainsi, le temps de calcul nécessaire pour simuler un tel silo semble rédhibitoire. Même le développement récent du calcul parallèle sur carte graphique (de type CUDA ou OPEN CL) ne nous laisse pas espérer une modification à court terme de cette impossibilité. Il est donc nécessaire de développer d'autres types de simulations moins coûteuses en temps. Comme indiqué au chapitre précédent, la plus grande partie du temps de la simulation est utilisé pour chercher les éventuels contacts ainsi que pour calculer les forces correspondantes. De ce fait, une façon de gagner du temps de calcul consiste à oublier le caractère discret du système et à le remplacer par un milieu continu obéissant à des règles d'écoulement données. Cette approche, qui nécessite la connaissance à priori des lois rhéologiques du milieu granulaire, est développée dans le chapitre suivant.



# Chapitre 4

## Simulation continue de milieux granulaires

### 4.1 Introduction

Au cours du chapitre précédent, nous nous sommes intéressés aux simulations discrètes des milieux granulaires. Celles-ci permettent d'accéder au comportement individuel des grains et ainsi de décrire complètement le système étudié. Néanmoins, comme nous l'avons vu, elles sont coûteuses en temps et en espace mémoire, ce qui proscrit toute simulation de systèmes industriels.

Une autre approche des simulations granulaires qui ne présente pas ces inconvénients majeurs consiste à traiter le matériau granulaire comme un milieu continu obéissant à des lois rhéologiques qui décrivent avec une précision plus ou moins grande le comportement du milieu granulaire. À ce jour, aucune loi rhéologique ne fait réellement l'unanimité au sein de la communauté des scientifiques travaillant sur la matière en grain. Néanmoins une proposition de rhéologie semble à ce jour se démarquer. Il s'agit de la rhéologie dite " $\mu(I)$ " introduite il y a moins de 10 ans (da Cruz et al., 2005; GDRMiDi, 2004; Jop, 2006; Jop et al., 2005). Elle repose sur l'expression du coefficient de frottement effectif lié au système en fonction d'un nombre adimensionnel  $I$  basé sur le rapport des différents temps caractéristiques du système.

Dans ce chapitre, nous avons implémenté cette rhéologie dans un code de mécanique des fluides. À l'aide d'une approximation nous avons obtenu des équations de type Navier-Stokes. Dans la section suivante, nous présenterons la rhéologie utilisée pour décrire l'écoulement granulaire. Les équations générales gérant le comportement du milieu granulaire seront quant à elles présentées dans la section 4.3. La section 4.4 sera consacrée à la présentation de la méthode des grilles décalées qui permet une meilleure stabilité des équations. La section 4.5.2, quant à elle, exposera et discutera des différents résultats obtenus. Enfin, nous présenterons nos conclusions.

## 4.2 Rhéologie et loi de frottement $\mu(I)$

### 4.2.1 Loi de frottement locale

La rhéologie dite  $\mu(I)$  a été introduite par (da Cruz, 2004; Iordanoff & Khonsari, 2004). Ces deux travaux portent sur des simulations numériques de cisaillement de milieux granulaires dans une configuration plan-plan en l'absence de gravité. Cette géométrie consiste à confiner la matériau granulaire entre deux plaques rugueuses et de le soumettre à une pression  $P$  (Fig 4.1).

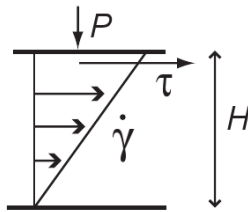


FIG. 4.1 – Cisaillement plan homogène. Figure extraite de (Jop, 2006)

La plaque supérieure, libre de se déplacer verticalement, est tirée à vitesse constante  $V_0$  et la contrainte tangentielle  $\tau$  nécessaire au déplacement est mesurée. Un tel écoulement est continu et le profil de vitesse, en l'absence de gravité, est



linéaire (Fig 4.1). Les résultats de ces simulations montrent que les contraintes horizontales et verticales sont proportionnelles et que :

$$\frac{\tau}{P} = \mu(I), \quad (4.1)$$

avec

$$I = \frac{|\dot{\gamma}| d}{\sqrt{P/\rho_s}}. \quad (4.2)$$

Dans cette dernière équation,  $\rho_s$  est la densité des grains,  $\dot{\gamma}$  le taux de cisaillement et  $d$  le diamètre des grains.  $I$  est le nombre inertiel qui peut être interprété comme le rapport de deux temps caractéristiques (GDRMiDi, 2004) :

$$I = \frac{t_P}{t_{\dot{\gamma}}}, \quad \text{avec} \quad t_P = d\sqrt{\frac{\rho_s}{P}} \quad \text{et} \quad t_{\dot{\gamma}} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|}, \quad (4.3)$$

où  $t_P$  est le temps microscopique de réarrangement de particules sous la pression de confinement et  $t_{\dot{\gamma}}$  est le temps macroscopique correspondant au cisaillement global du milieu.

Il a été montré empiriquement (Jop et al., 2005) que le coefficient de frottement effectif  $\mu$  du système est relié à ce nombre inertiel  $I$  via l'expression suivante :

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0/I + 1}. \quad (4.4)$$

Cette expression fait apparaître plusieurs paramètres.  $\mu_s$  est la valeur seuil pour les régimes quasi-statiques ( $I \rightarrow 0$ ) elle correspond à l'angle de repos du matériau,  $\mu_2$  est la valeur vers laquelle croît asymptotiquement  $\mu(I)$  pour les régimes fortement cisailés ( $I \gg 1$ ) (voir Figure 4.2.1).

Les valeurs des paramètres sont des données empiriques pour des billes de verres sphériques, ainsi  $\mu_s = \tan(20, 9^\circ)$ ,  $\mu_2 = \tan(32, 76^\circ)$  et  $I_0 = 0, 279$ .

### 4.2.2 Limites de la loi $\mu(I)$

Les limites de la loi de  $\mu(I)$  sont les suivantes (Jop, 2006) :

- la non-description des seuils d'écoulements observés sur plan incliné ou sur fond meuble. Ce problème provient de l'existence de corrélations entre

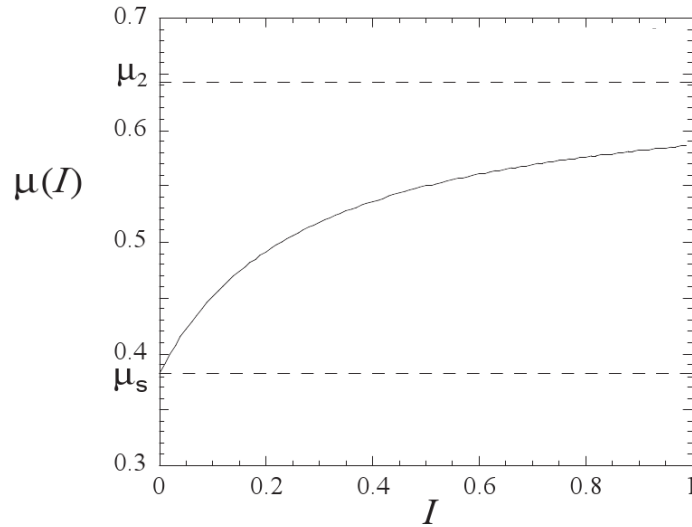


FIG. 4.2 – Allure de la courbe du coefficient de friction  $\mu(I)$ . Figure extraite de (Jop, 2006)

les mouvements des grains lorsqu'ils sont peu cisailés. Afin d'espérer les comprendre, il est nécessaire d'incorporer des ingrédients non-locaux à la rhéologie locale.

- la description des écoulements granulaires denses bute sur les phénomènes d'hystérésis en liens avec les démarrages et les arrêts des écoulements. Ces phénomènes peuvent modifier le comportement de l'écoulement.

## 4.3 Équations du mouvement

On se restreint à partir d'ici à une configuration 2D cartésienne.

### 4.3.1 Principe

L'équation de Cauchy pour un système granulaire de densité moyenne  $\rho$  s'écrit

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}. \quad (4.5)$$

L'opérateur  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{grad}$  est la dérivée particulaire. Le tenseur des contraintes, s'écrit à deux dimensions par

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}.$$

Les éléments de ce tenseur sont donnés par

$$\sigma_{ij} = -P\Delta_{ij} + \tau_{ij},$$

avec  $\tau_{ij} = \frac{\mu(I)P}{|\dot{\gamma}|} \dot{\gamma}_{ij}$ ,  $|\dot{\gamma}| = \sqrt{\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij}/2}$ ,  $I = |\dot{\gamma}| d / \sqrt{P/\rho_s}$  et  $\dot{\gamma}_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ . Comme indiqué précédemment, la fonction  $\mu(I)$  est donnée par

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0/I + 1}.$$

En développant l'équation 4.5, nous avons :

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t v_x + v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x) &= -\partial_x P + \partial_x \tau_{xx} + \partial_y \tau_{xy} + \rho f_x \\ \rho(\partial_t v_y + v_x \partial_x v_y + v_y \partial_y v_y) &= -\partial_y P + \partial_x \tau_{xy} + \partial_y \tau_{yy} + \rho f_y \end{aligned} \quad (4.6)$$

On suppose également que l'écoulement est incompressible, ce qui donne

$$\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0. \quad (4.7)$$

On obtient alors un système de trois équations (4.6)-(4.7) qui est non linéaire.

Dans la suite nous supposons que :

$$\frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_i} = \eta_{i,j} \frac{\partial \dot{\gamma}_{i,j}}{\partial x_i} + \dot{\gamma}_{i,j} \frac{\partial \eta_{i,j}}{\partial x_i} \approx \eta_{i,j} \frac{\partial \dot{\gamma}_{i,j}}{\partial x_i} \quad (4.8)$$

où  $\eta_{i,j}$  est la viscosité dynamique, pour les raisons suivantes :

- cette hypothèse permet de simplifier notre système en un système non linéaire de type Navier-Stokes ;
- il existe des méthodes de résolution déjà opérationnelles pour les équations de Navier-Stokes et les transformer pour la résolution d'un autre système

non linéaire serait trop long. Ainsi, implémenter cette approximation nous permettra d'étudier son domaine de validité et de faciliter d'éventuelles futures implémentations liées à des applications restant dans ce domaine de validité ;

- l'implémentation complète de la loi  $\mu(I)$  dans un solveur (Gerris <sup>1</sup>) a récemment été effectuée (Lagrée et al., 2011). Notre approche ne consiste pas à refaire un travail déjà effectué mais, encore une fois, à tester la validité de l'approximation mentionnée ci-dessus. Pour cela, la résolution du système d'équations ne faisant pas intervenir cette approximation sera effectuée dans des conditions particulières de manière semi-analytique au chapitre suivant.

Ainsi en posant  $v_x = U$ ,  $v_y = V$  et  $\eta_{i,j} = \mu(I)P/|\dot{\gamma}_{i,j}|$  (la viscosité dynamique devient fonction de la position) , le système (4.6)-(4.7) devient :

$$\begin{aligned}\partial_t U + \partial_x \frac{P}{\rho} &= -U\partial_x U - V\partial_y U + \eta(\partial_x^2 U + \partial_y^2 V) + \rho f_x \\ \partial_t V + \partial_y \frac{P}{\rho} &= -U\partial_x V - V\partial_y V + \eta(\partial_x^2 U + \partial_y^2 V) + \rho f_y \\ \partial_x U + \partial_y V &= 0\end{aligned}\quad (4.9)$$

### 4.3.2 Formulation adimensionnée

Le système (4.9) est semblable à l'équation de Navier-Stokes à la différence que  $\eta$  n'est pas une constante mais fonction de  $x$  et  $y$ . Pour l'adimensionnement de ces équations, nous nous donnons un système de 3 échelles, une échelle de longueur  $H$  qui est la taille de l'entrée , une échelle de vitesse  $U_{max}$  qui est la vitesse maximale à l'entrée et une échelle de pression  $\rho U_{max}^2$ . En appliquant ces échelles,

les variables adimensionnées s'écrivent comme suit :  $x^* = \frac{x}{H}$ ,  $y^* = \frac{y}{H}$ ,  $U^* = \frac{U}{U_{max}}$ ,  $V^* = \frac{V}{U_{max}}$ ,  $t^* = \frac{t U_{max}}{H}$ ,  $P^* = \frac{P}{\rho U_{max}^2}$ ,  $\dot{\gamma}_{ij}^* = \frac{\dot{\gamma}_{ij} H}{U_{max}}$ , avec  $\eta^* = \mu(I)P^*/|\dot{\gamma}^*|$ .

Le système d'équation adimensionné est alors le suivant :

<sup>1</sup>[http://gfs.sourceforge.net/wiki/index.php/Main\\_Page](http://gfs.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page)

$$\begin{aligned}
\partial_t U^* + \partial_{x^*} \frac{P^*}{\rho} &= -U^* \partial_x U^* - V^* \partial_y^* U^* + \frac{1}{\tilde{Re}(x, y)} (\partial_{x^*}^2 U^* + \partial_{y^*}^2 V^*) + \rho f_x \frac{H}{U_{max}^2} \\
\partial_t V^* + \partial_{y^*} \frac{P^*}{\rho} &= -U^* \partial_x V^* - V^* \partial_y^* V^* + \frac{1}{\tilde{Re}(x, y)} (\partial_{x^*}^2 U^* + \partial_{y^*}^2 V^*) + \rho f_y \frac{H}{U_{max}^2} \\
\partial_x U^* + \partial_{y^*} V^* &= 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

avec

$\tilde{Re}(x, y) = \frac{\rho U_{max} H}{\eta(x, y)}$  qui est bâti comme un nombre de Reynolds, mais dépendant du point de l'espace où il est appliqué.

## 4.4 Méthode des grilles décalées

### 4.4.1 Approche numérique

D'après (Langtangen et al., 2002; Armfield, 1991), pour des raisons de stabilité numérique, il est préférable et recommandé d'utiliser des grilles décalées pour les différences finies. On part d'un code Matlab (Seibold, 2008) qui implémente une telle méthode. Si  $U$ ,  $V$  et  $P$  sont les solutions des équations (4.10), on note les valeurs numériques correspondantes à l'étape de calcul  $n$  (donc au temps  $t$ ) par  $U^n$ ,  $V^n$  et  $P^n$ . Supposons que les valeurs  $U^n$  et  $V^n$  soient connues et que la condition d'incompressibilité soit satisfaite. Nous trouvons la solution à l'étape  $(n+1)$  (en un temps  $t+\Delta t$ ) par la démarche suivante décomposée en trois étapes :

1. Termes non linéaires : les termes non linéaires sont traités explicitement. Cela évite la résolution directe d'un système non-linéaire, mais elle introduit une instabilité de CFL (instabilité de Courant, Friedrichs et Levy qui donne une erreur d'approximation dans des calculs numériques, qui grandit rapidement au fur et à mesure des calculs) qui limite le pas de temps par une constante multipliée par la résolution spatiale.

$$\begin{aligned}
\frac{U^* - U^n}{\Delta t} &= ((U^n)^2)_x - (U^n V^n)_{yy} \\
\frac{V^* - V^n}{\Delta t} &= (U^n V^n)_x - ((V^n)^2)_y + g
\end{aligned} \quad \text{avec } V_x = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{4.11}$$

2. Viscosité implicite : les termes de viscosité sont traités implicitement. Si ils avaient été traités de manière explicite, nous aurions une restriction du pas de temps proportionnelle à la discrétisation spatiale au carré. Nous n'avons pas de limitation pour le traitement implicite (Strang, 2007). Le prix à payer est celui de deux systèmes linéaires à résoudre à chaque pas de temps

$$\frac{U^{**} - U^*}{\Delta t} = \eta(U_{xx}^{**} + U_{yy}^{**}) \quad \frac{V^{**} - V^*}{\Delta t} = \eta(V_{xx}^{**} + V_{yy}^{**}) \quad (4.12)$$

3. Correction de la pression : le champ de vitesse intermédiaire  $(U^{**}, V^{**})$  est corrigé par le gradient de pression  $P^{n+1}$  en appliquant l'incompressibilité.

$$\frac{U^{n+1} - U^{**}}{\Delta t} = -(P^{n+1})_x \quad \frac{V^{n+1} - V^{**}}{\Delta t} = -(P^{n+1})_y$$

La pression est notée  $P^{n+1}$ , puisqu'elle est calculée implicitement. La pression est obtenue en résolvant un système linéaire. En notation vectorielle les équations de correction s'écrivent comme suit :

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{U}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{U}^{**} = -\Delta P^{n+1}$$

L'application de la divergence des deux côtés du système précédant donne le système linéaire

$$-\Delta P^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{U}^{**}$$

Par conséquent, l'étape de correction de pression se décompose comme suit :

- (a) Calculer  $F^n = \nabla \cdot \mathbf{U}^{**}$
- (b) Résoudre l'équation de Poisson  $\Delta P^{n+1} = -\frac{1}{\Delta} F^n$
- (c) Calculer  $G^{n+1} = \nabla P^{n+1}$
- (d) Mettre à jour le champ de vitesse  $U^{n+1} = U^n - \Delta t G^{n+1}$

La question de savoir si les conditions limites sont appropriées pour l'équation de Poisson pendant le calcul de la pression  $P$  est délicate. Une approche standard consiste à se donner des conditions aux limites de Neumann homogènes pour  $P$  si l'on se donne des conditions aux limites pour le champ de vitesse.

### 4.4.2 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale est réalisée sur une grille décalée, avec la pression  $P$  dans les milieux de cellules, les vitesses  $U$  placées sur les interfaces verticales des cellules, et les vitesses  $V$  sur les interfaces horizontales. La figure 4.3 montre une grille avec  $n_x = 5$  et  $n_y = 3$ . Lorsque l'on parle des valeurs  $P$ ,  $U$  et  $V$ , on doit distinguer avec soin les points intérieurs des points limites. Les marqueurs noirs de la figure 4.3 représentent les points intérieurs, tandis que les marqueurs clairs représentent les points situés sur les limites. Le nombre de points à calculer est donné dans le tableau suivant :

Données	Points interieur	Points total
Pression $P$	$n_x \times n_y$	$(n_x + 2) \times (n_y + 2)$
Vitesse $U$	$n_x \times n_y$	$(n_x + 1) \times (n_y + 2)$
Vitesse $V$	$n_x \times (n_y - 1)$	$(n_x + 2) \times (n_y + 1)$

TAB. 4.1 – Tableau recapitulatif des tailles des matrices utilisées lors de la discrétisation spatiale dans le cas des grilles croisées.

Les valeurs des points aux frontières ne sont pas des variables inconnues. Pour les conditions aux limites de Dirichlet<sup>2</sup> elles sont prescrites, et pour les conditions aux limites de Neumann<sup>3</sup> elles peuvent être exprimées en fonction des valeurs des points intérieurs. Toutefois, les valeurs de  $U$  et  $V$  aux frontières sont utilisées pour l'approximation en terme de différences finies des termes d'advection non

<sup>2</sup>Dans le cas d'une équation différentielle sur un domaine  $\Omega$ , par exemple :

$$\nabla U = f,$$

la condition aux limites de Dirichlet s'exprime par :

$$U = g \text{ sur } \Gamma_{\Omega_D}$$

où  $g$  est une fonction donnée sur la frontière de  $\Omega_D$  (frontière où s'applique la condition de Dirichlet).

<sup>3</sup>la condition aux limites de Neumann s'exprime par :

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = g \text{ sur } \Gamma_{\Omega_N}$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la frontière  $\Omega_N$  et  $g$  est une fonction donnée sur les frontières de  $\Omega_N$  (frontière où s'applique la condition de Neumann).

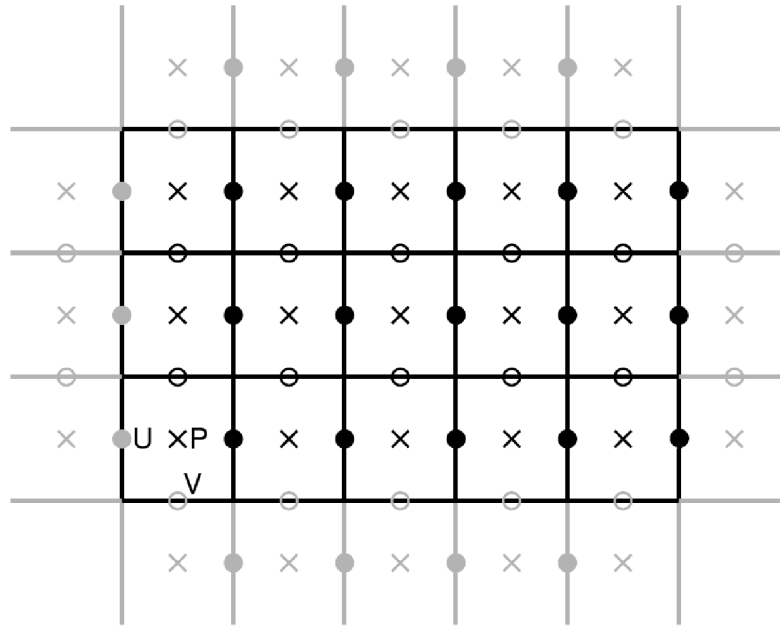


FIG. 4.3 – Grilles croisées avec des cellules frontières. Les ronds pleins représentent les positions de calcul de  $U$ , Les ronds creux représentent les positions de calcul de  $V$  et les croix représentent les positions de calcul de  $P$ . Le noir représente les inconnue à déterminer et le gris les points utilisés par les conditions aux limites.

linéaires (Seibold, 2008). Les points de la frontière dans les quatre angles ne sont jamais utilisés.

Dans notre problème, nous définissons les conditions limites comme indiqué dans la figure 4.4. Les conditions nord (plaque supérieure) et sud (plaque inférieure) restent les mêmes par rapport au programme initial c'est-à-dire les conditions de Dirichlet sont appliquées pour  $U$  et  $V$ , et les conditions aux limites de Neumann sont appliquées pour  $P$ . En entrée nous appliquons comme condition limite, un profil parabolique pour  $U$  ayant pour valeur maximum  $U_{max}$ , pour  $V$  et  $P$  ce sont les mêmes conditions que nord et sud. En sortie, nous avons des conditions libres comme suit :

$$-P\vec{n} + \eta \frac{\partial \vec{U}}{\partial n} = \vec{0}$$



Ce qui conduit à :

$$P = \eta \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{P}{\eta}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

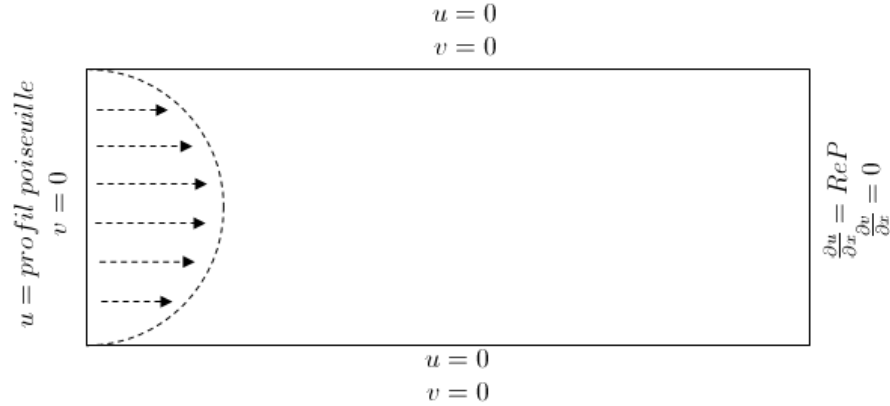


FIG. 4.4 – Schéma 2D de la configuration utilisée lors des simulations.

### 4.4.3 Résolution du système linéaire

Le calcul de la viscosité implicite des termes de la vitesse et la correction de la pression nécessitent la résolution de systèmes linéaires à chaque pas de temps. Étant donné que la pression et le taux de cisaillement changent avec le temps, les matrices du système linéaire correspondant changent également à chaque étape.

### 4.4.4 Modifications du code Matlab

Initialement, la configuration du code Matlab (Seibold, 2008) est une configuration de type *Cavity driven flow* (cavité avec un écoulement entraîné par le bord supérieur). Nous avons changé cette configuration en une configuration canal avec une condition *inflow* (profil de parabolique en entrée) et une condition *outflow* (voir figure 4.4), c'est-à-dire une condition de contrainte libre. Ces changements impliquent comme modification du code :

- Changement des tailles de matrices : la taille de la matrice  $U$  augmente d’une unité à cause de la condition outflow (voir tableau 4.1).
- Changement du domaine : initialement le domaine est carré, nous l’avons modifié en une forme rectangulaire avec pour dimension  $Lx = 3H$  et  $Ly = H$ .
- Changement du mode de résolution : initialement le nombre de Reynolds étant une constante, les matrices utilisées sont symétriques et définies positives, la décomposition de Cholesky (Quarteroni, Sacco & Saleri, 2000; Cheney & Kincaid, 2008) est utilisée, ce qui n’est pas le cas pour nous. Le nombre de Reynolds dépend de la position où il est calculé ce qui fait que nos matrices ne sont pas symétriques. Cela nous oblige à utiliser la factorisation LU (Quarteroni et al., 2000; Cheney & Kincaid, 2008) qui est plus coûteuse à la fois en temps d’exécution et en espace mémoire.

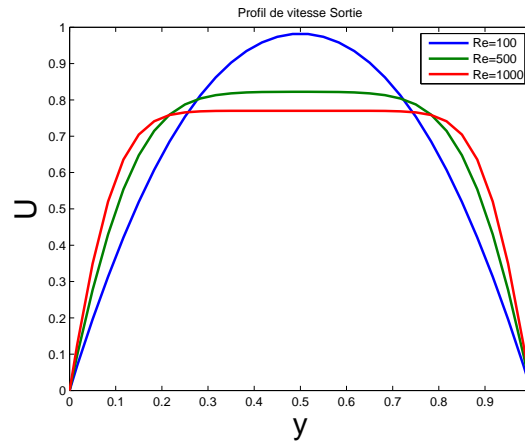
## 4.5 Résultats et discussions

### 4.5.1 Validation pour un fluide newtonien

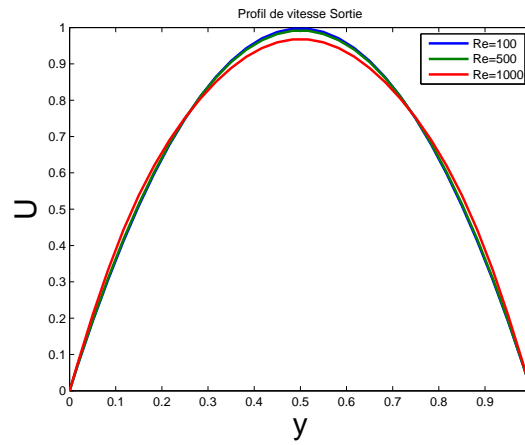
Nous avons tout d’abord cherché à valider la méthode des grilles décalées sur un cas simple d’écoulement d’un fluide Newtonien entre deux plans en 2D comme l’indique la figure 4.4 (écoulement de Poiseuille).

En imposant un profil parabolique (avec  $U_{max} = 1$ ) en entrée pour la vitesse horizontale  $U$  nous obtenons également en sortie un profil parabolique comme le montre la figure 4.5, et ceci pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. La composante verticale de la vitesse  $V$  est nulle (à  $10^{-5}$  près).

Le nombre de Reynolds, prend les valeurs 100, 500 et 1000. Comme le montre la figure 4.5, on voit que le temps d’établissement du régime de Poiseuille est atteint au bout de 4 s pour  $Re = 100$ , mais seulement au bout de 16 s dans le cas où  $Re = 1000$ .



(a)



(b)

FIG. 4.5 – Profils de vitesse obtenus pour un fluide newtonien à différents temps  $t = 4s$  (a) et  $t = 16s$  (b) et pour différent nombre de Reynolds.

#### 4.5.2 Résultat de l'application de la loi $\mu(I)$ (Fluide non newtonien)

Pour la même configuration de type Poiseuille, l'écoulement dépend désormais d'un paramètre  $\tilde{Re}$  qui dans le cas granulaire est fonction de  $x$  et  $y$ . Nous choisissons les paramètres suivant :  $\rho = 1,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $d = 2,5 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $H = 1 \text{ m}$  et  $P_0 = 1000 \text{ Pa}$ .

Nos simulations ont montré que le profil de vitesse obtenu est très différent de celui obtenu avec un fluide newtonien. La figure 4.6 représente les profils de vitesse  $U/U_{max}$  en sortie de notre configuration. Pour cela nous avons fait varier la vitesse maximale du profil parabolique d'entrée  $U_{max}$  qui est prise dans une gamme de valeurs suffisamment faible pour observer une transition entre les profils obtenus. Pour ces faibles vitesses il est normal que l'écoulement soit établi dès le temps  $t = 8s$ .

La figure 4.6 montre un profil parabolique pour de très faibles valeurs de  $U_{max}$  : l'écoulement est similaire au cas newtonien. Ceci est dû au fait que la viscosité tend vers une constante pour des faibles vitesses. Au fur et à mesure que  $U_{max}$  croît, on tend vers un écoulement de type "bouchon" sur la quasi-totalité de la largeur du chenal.

## 4.6 Conclusion

Nous avons implémenté une méthode numérique permettant de simuler un fluide de viscosité non-constante. Ceci a été fait dans le but de tester des lois rhéologiques utilisées pour décrire le comportement de milieux granulaires et en particulier la rhéologie dite " $\mu(I)$ ". Au vu des résultats il est légitime de se poser la question de savoir si ce profil "bouchon" pour les faibles vitesses (voir figure 4.6) correspond ou non à une situation physique. Il peut, en effet, être une conséquence directe de l'approximation (voir section 4.3.1) que nous avons utilisée pour obtenir un système d'équations de type Navier-Stokes, à savoir

$$\frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_i} \approx \eta_{i,j} \frac{\partial \dot{\gamma}_{i,j}}{\partial x_i}$$

Afin de répondre à cette interrogation nous allons, dans le chapitre suivant, résoudre de façon semi-analytique le système d'équations sans faire appel à cette approximation. Bien évidemment, cette résolution nécessitera d'une part de se placer dans des cas particuliers, et d'autre part d'adopter des hypothèses qui seront explicitées.

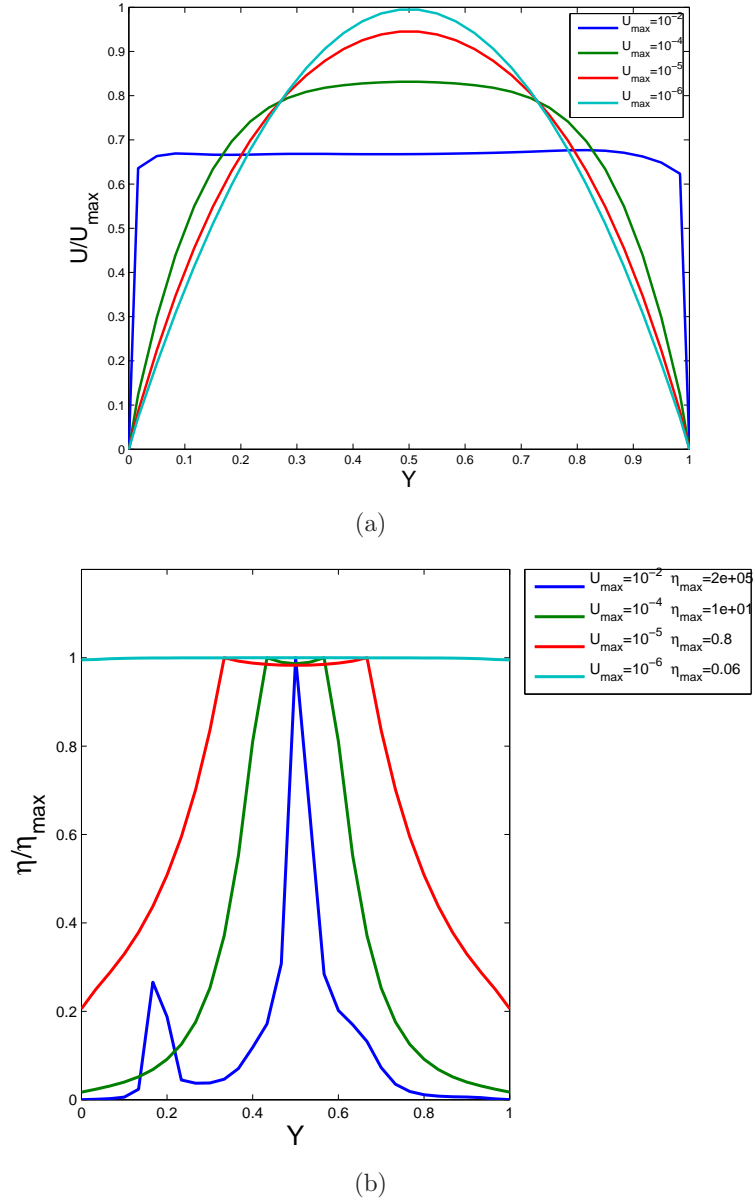


FIG. 4.6 – (a) Profils de vitesse obtenus sur un granulaire (fluide non newtonien avec une viscosité effective) au temps  $t = 8s$  pour différent  $U_{\max}$ , (b) Profils des viscosités effectives correspondants aux différents  $U_{\max}$ . Nous observons que le profil de vitesse s’aplatit de plus en plus pour des  $U_{\max}$  de plus en plus grand car la viscosité effective en son milieu devient de plus en plus constant.



# Chapitre 5

## Écoulement stationnaire et établi : résolution semi-analytique

Dans le chapitre précédent, pour passer du système d'équations (4.6)-(4.7) au système (4.9), nous avons approximé  $\frac{\partial \tau(x, y)}{\partial x}$  par  $\eta(x, y) \frac{\partial \dot{\gamma}(x, y)}{\partial x}$  ce qui avait pour but de de conserver la forme classique de Navier-Stokes avec un nombre de Reynolds variable. Dans ce chapitre, afin de tester ces hypothèses, nous travaillons avec l'expression exacte c'est à dire  $\frac{\partial \tau(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \eta(x, y) \dot{\gamma}(x, y)}{\partial x}$  ce qui rendra bien sur le système non linéaire. Pour résoudre le système ainsi obtenu, nous simplifierons le système en le considérant comme stationnaire et établi. Ceci nous permettra d'utiliser une méthode semi-analytique afin de résoudre théoriquement les équations. Deux configurations simples seront étudiées : celle de Couette plan et celle de Poiseuille.

### 5.1 Hypothèses simplificatrices : écoulement établi et stationnaire

Dans le but de simplifier le système, nous supposons qu'il est stationnaire et établi. L'axe des  $x$  étant l'axe horizontal de gauche à droite et l'axe des  $y$  étant

l'axe vertical de bas en haut, ces hypothèses correspondent à

- l'écoulement est stationnaire c'est à dire qu'il ne dépend plus du temps, ce qui implique que  $\frac{D\vec{V}}{Dt} = 0$ .
- l'écoulement est établi c'est à dire que ses propriétés -par exemple la vitesse- sont invariantes (aux fluctuations près) dans la direction principale de l'écoulement. Si cette dernière est la direction horizontale, nous avons pour la vitesse,  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = 0$  (l'écoulement est indépendant de  $x$ ), ce qui a pour conséquence en 2D,  $v_y = 0$  (voir section 4.5.1).
- la pression est hydrostatique donc elle s'écrit sous la forme :  $P = P_0 + \rho g(H - y)$  où  $H$  est la hauteur de l'écoulement. Notons que cette hypothèse a été vérifiée de nombreuses fois par des simulation de type éléments discrets dans différentes géométrie (da Cruz, 2004; Silbert et al., 2001).

En prenant ces hypothèses en compte, le système (4.6)-(4.7) à résoudre se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(y) \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (5.1)$$

où  $\eta(y)$  est la viscosité dynamique.

## 5.2 Résolution

Pour résoudre l'équation non linéaire (5.1), nous utilisons une méthode semi-analytique dont les étapes sont les suivantes :

1. Analytiquement, nous intégrons par rapport à  $y$  le gradient de pression  $\frac{\partial P}{\partial x}$  supposé constant en introduisant une constante  $k_1$ , nous obtenons

$$\eta(y) \frac{\partial V_x}{\partial y} = -K y + k_1, \quad (5.2)$$

avec  $K = -\frac{\partial P}{\partial x}$ , qui est le gradient de pression suivant le sens de l'écoulement.

2. Nous résolvons ensuite de manière directe l'équation (5.2) avec  $\frac{\partial V_x}{\partial y}$  comme



inconnue. Rappelons que  $\eta(y) = \frac{\mu(I)P}{|\dot{\gamma}|}$ .

3. Nous intégrons le résultat  $\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$  en introduisant une seconde constante  $k_2$ .
4. En appliquant les conditions aux limites dans une configuration donnée, nous obtenons un système à deux inconnues  $k_1$  et  $k_2$  (qui dépendent de chaque configuration).

### 5.3 Écoulement de Couette plan

Nous avons appliqué la résolution précédente à la configuration Couette plan (voir figure 5.3) avec un gradient de pression nul. Le milieu granulaire simulé est situé entre deux plaques distantes d'une hauteur  $H$ ,  $P_0$  est la pression résultante d'une contrainte verticale sur la plaque supérieure, cette dernière se déplace à une vitesse constante  $U_0$ , la plaque inférieure étant fixe.

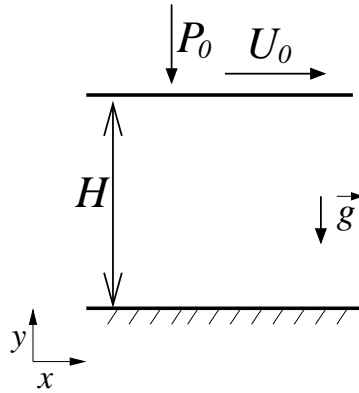


FIG. 5.1 – Schéma de la configuration Couette 2D.  $H$  représente la distance entre les deux plaques,  $P_0$  la pression résultante d'une contrainte verticale sur la plaque supérieure et  $U_0$  la vitesse de déplacement de la plaque supérieure.

#### 5.3.1 Formulation adimensionnelle

Dans le système à résoudre (5.1) nous avons 7 paramètres qui caractérisent notre écoulement, qui sont  $U_0$ ,  $P_0$ ,  $H$ ,  $\rho$ ,  $\rho_s$ ,  $g$  et  $d$  (la vitesse de la plaque

supérieure, la pression sur la plaque supérieure, la hauteur entre les plaques, la densité du milieu granulaire, la densité du grain, la gravité et le diamètre du grain). Pour adimensionner notre système, nous devons choisir trois échelles : une échelle de longueur  $H$ , une échelle de vitesse  $U_0$  et une échelle de pression  $P_0$ . En appliquant ces échelles, les variables adimensionnées s'écrivent comme suit :  $y^* = \frac{y}{H}$ ,  $u^* = \frac{u}{U_0}$  et  $P^* = \frac{P}{P_0}$ . Ceci nous permet d'avoir 4 paramètres adimensionnels (théorème de Vaschy-Buckingham (Vaschy, 1892; Buckingham, 1914)) :

$$\Lambda = \frac{H}{d}, \quad \varepsilon = \frac{\rho g d}{P_0}, \quad \alpha = \frac{U_0}{\sqrt{P_0/\rho_s}} \quad \text{et} \quad \phi = \frac{\rho}{\rho_s}$$

Les variables dépendants de  $y^*$  sont :  $P^*(y^*) = 1 + \varepsilon\Lambda(1 - y^*)$ ,  $I(y^*) = \frac{\alpha |\dot{\gamma}^*|}{\Lambda \sqrt{P^*(y^*)}}$ , et  $\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0/I + 1}$  ( $\mu_s$ ,  $\mu_2$  et  $I_0$  ne sont pas considérées comme variables car elles sont des constantes de la loi  $\mu(I)$ ). Ainsi, le système adimensionné à résoudre est :

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \left( |\dot{\gamma}^*| (\varepsilon \Lambda (1 - y^*) + 1) \left( \frac{\alpha (\mu_2 - \mu_s)}{\Lambda I_0 \sqrt{\varepsilon \Lambda (1 - y^*) + 1} + \alpha |\dot{\gamma}^*|} + \frac{\mu_s}{|\dot{\gamma}^*|} \right) \right) = 0 \quad (5.3)$$

Afin de pouvoir traiter facilement cette dernière équation, il faut se débarrasser de la valeur absolue qui s'applique au cisaillement  $\dot{\gamma}^*$ . Compte tenu de notre configuration géométrique, le cisaillement doit être positif, ce qui amène à écrire :

$$|\dot{\gamma}^*| = \dot{\gamma}^* \quad (5.4)$$

Cela nous permet d'obtenir :

$$\dot{\gamma}^* = - \frac{\Lambda I_0 \sqrt{\varepsilon \Lambda (1 - y^*) + 1} (\varepsilon \Lambda \mu_s y^* - \varepsilon \Lambda \mu_s - \mu_s + k_1)}{\alpha (\varepsilon \Lambda \mu_2 y^* - \varepsilon \Lambda \mu_2 - \mu_2 + k_1)} \quad (5.5)$$

En intégrant à nouveau cette équation, on obtient l'expression de la vitesse suivante :

$$\begin{aligned}
u^*(y^*) = k_2 + \frac{k_1^{3/2} I_0(\mu_s - \mu_2)}{\alpha \varepsilon \mu_2^{5/2}} \log \left( \frac{2 \mu_2 \sqrt{\Lambda \varepsilon (1 - y^*) + 1} - 2 \sqrt{\mu_2 k_1}}{2 \mu_2 \sqrt{\Lambda \varepsilon (1 - y^*) + 1} + 2 \sqrt{\mu_2 k_1}} \right) + \\
\frac{2 I_0}{3 \alpha \varepsilon \mu_2^2} \left( \mu_2 \mu_s (\varepsilon \Lambda (1 - y^*) + 1)^{\frac{3}{2}} + 3 k_1 (\mu_s - \mu_2) \sqrt{\varepsilon \Lambda (1 - y^*) + 1} \right)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Pour définir complètement le profil de vitesse, il est nécessaire de déterminer les constantes  $k_1$  et  $k_2$ . Ceci est fait dans la section suivante grâce aux conditions limites.

### 5.3.2 Conditions aux limites

Les deux conditions limites que nous avons dans la configuration Couette sont les suivantes :

- La vitesse de la plaque supérieure est égale à  $U_0$  et, puisque notre milieu ne glisse pas sur cette paroi, la vitesse du granulaire à ce niveau est égale à  $U_0$ . Pour  $y^* = 1$ ,  $u^*(y^*) = U_0$ .
- De même, la plaque inférieure a une vitesse nulle, ce qui entraîne que la vitesse du milieu granulaire au niveau de la plaque inférieure est nulle car il n'y a pas de glissement sur la paroi. Pour  $y^* = 0$ ,  $u^*(y^*) = 0$ .

Ces deux conditions nous permettent de trouver les valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  dans l'étape 4 de la résolution (vois section 5.2). Pour résoudre ce système non linéaire, nous exprimons  $k_2$  en fonction de  $k_1$ , puis nous utilisons la méthode de Newton (Nougier, 2001a,b) pour obtenir la valeur de  $k_1$ . Concernant cette recherche itérative, il est nécessaire de choisir une initiale de  $k_1$  adéquate. En effet, si l'on pose  $f(k_1) = 0$  l'équation à résoudre, la courbe  $f(k_1)$  présente une asymptote verticale au point d'abscisse  $k_1 = \mu_2$ , et pas de valeurs réelles pour  $k_1 > \mu_2$ . On choisira donc  $k_{1\text{init}} = \mu_2 - 10^{-4}$ .

On trouvera en annexe les feuilles de calcul Maxima qui ont servi à étudier cette configuration.

### 5.3.3 Résultats

Nous avons montré précédemment que la description de l'écoulement ne dépendait que de quatre paramètres  $\Lambda$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  et  $\phi$ . La compacité  $\phi$  étant prise comme une constante  $\phi = 0,6$ , nous nous limiterons à l'étude de l'influence des trois autres paramètres. Notons que par définition ces paramètres sont tous positifs et non nuls sauf  $\varepsilon$  qui peut être nul si la gravité n'est pas prise en compte. Dans un tel cas, le taux de cisaillement  $|\dot{\gamma}^*|$  (voir l'équation 5.5) se réduira à une constante

$|\dot{\gamma}^*| = -\frac{\Lambda I_0 (k_1 - \mu_s)}{\alpha (k_1 - \mu_2)}$  et le profil de vitesse devient linéaire avec  $y$ , comme le montre l'équation :

$$u^*(y^*) = -\frac{\Lambda I_0 (k_1 - \mu_s) y^*}{\alpha (k_1 - \mu_2)} + k_2.$$

Dans un premier temps nous avons affecté des valeurs à  $\varepsilon$  et  $\alpha$ , et nous avons fait varier  $\Lambda$  ce qui revient expérimentalement soit à faire varier la hauteur entre les plaques, soit à faire varier le diamètre des grains. Nous avons choisi des valeurs de  $\alpha$  et  $\varepsilon$  compatibles avec des situations expérimentales typiques. Ainsi, en choisissant  $\rho = 1,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $d = 0,5 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $P_0 = 1000 \text{ Pa}$  et  $U_0 = 100 \text{ mm/s}$  nous obtenons  $\varepsilon = 0,15$  et  $\alpha = 0,007$ .

La figure 5.2 montre les profils de vitesse pour différentes valeurs de  $\Lambda$ . Nous remarquons que pour des valeurs de  $\Lambda$  très petites, le profil de vitesse tend à être linéaire ( $\Lambda = 2$ ). Pour des valeurs plus importantes ( $\Lambda = 5$  et  $10$ ), nous constatons un profil de vitesse incurvé. La courbe caractérisée par le  $\Lambda_{critique}$  est la seule qui présente un écoulement sur toute la hauteur avec un cisaillement nul au niveau de la plaque inférieure. Ce n'est pas le cas pour les  $\Lambda < \Lambda_{critique}$  car leur cisaillement est supérieur à 0. Cette valeur de  $\Lambda_{critique}$  est calculée par dichotomie sur un intervalle de  $\Lambda$  donné.

Pour les valeurs de  $\Lambda$  supérieures à  $\Lambda_{critique}$ , si nous utilisons la relation (5.5), nous obtenons un cisaillement négatif sur une partie de l'écoulement ce qui rend l'équation (5.6) inappropriée car elle n'est valide que pour les cisaillements positifs (condition 5.4). Ceci nous amène à définir un profil de vitesse à deux zones (voir figure 5.2 pour  $\Lambda = 20, 40, \text{ et } 100$ ) : une zone où la vitesse d'écoulement est nulle (pour  $y^* \in \left[0, 1 - \frac{\Lambda_{critique}}{\Lambda}\right]$ ) et une autre zone où l'écoulement est identique à

celui du  $\Lambda_{critique}$ , mais sur une hauteur différente (pour  $y^* \in \left[1 - \frac{\Lambda_{critique}}{\Lambda}, 1\right]$ ). Cet écoulement à deux zones, où le cisaillement est localisé sur une portion du matériau granulaire; est également constaté dans les simulations de types éléments discrets (da Cruz, 2004; da Cruz et al., 2005) et dans les expériences (Amarouchene et al., 2001; Komatsu et al., 2001; GDRMiDi, 2004). Précisons néanmoins que dans ces cas, la zone statique ne l'est pas réellement : les grains se déplacent par intermittence (Crassous et al., 2008; Richard et al., 2008) et le profil moyen correspondant décroît exponentiellement avec la profondeur. Cette différence provient de la limitation de la rhéologie  $\mu(I)$  qui n'est pas en mesure de prendre en compte les effets non-locaux de l'écoulement.

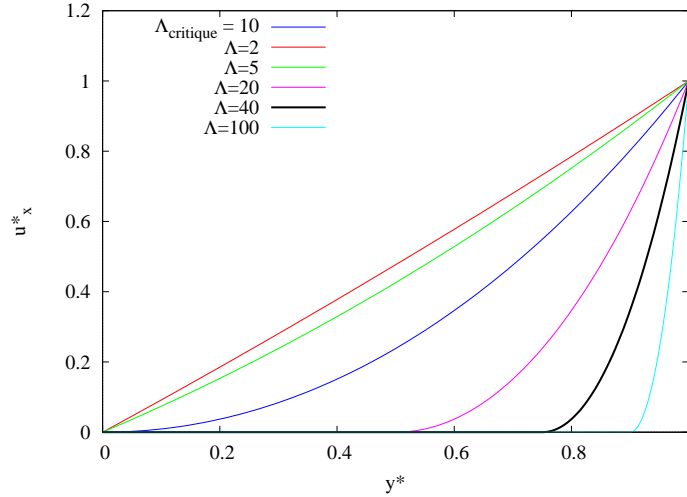
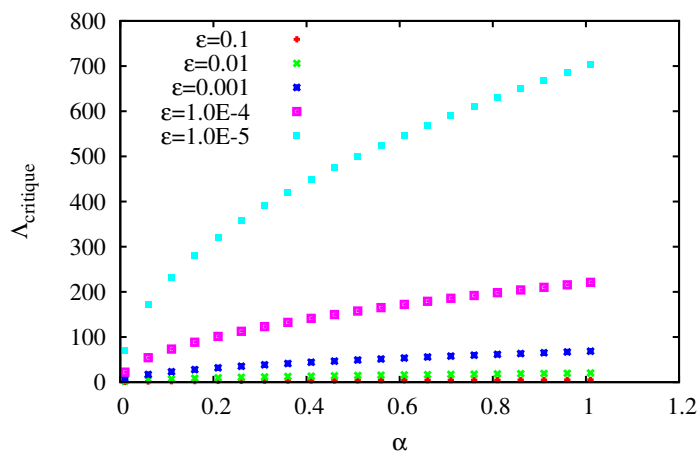


FIG. 5.2 – Profils de vitesse obtenus en variant  $\Lambda$  pour  $\varepsilon = 0,05$  et  $\alpha = 0,07$ . Pour  $\Lambda = \Lambda_{critique}$  le cisaillement en  $y^* = 0$  est nul. Pour  $\Lambda > \Lambda_{critique}$  il existe une zone pour laquelle la vitesse est nulle.

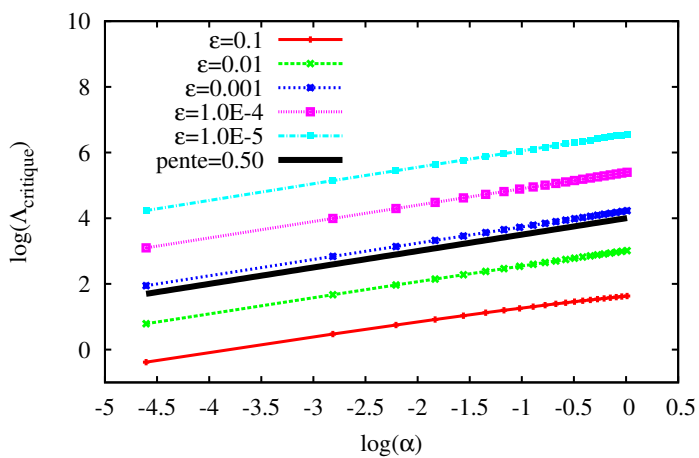
### 5.3.4 Discussions

#### Modèle proposé pour le $\Lambda_{critique}$

Nous allons maintenant chercher à savoir comment varie la valeur de  $\Lambda_{critique}$  avec les deux autres paramètres :  $\varepsilon$  et  $\alpha$ . La figure 5.3(a) montre les variations de  $\Lambda$  pour  $\alpha \in [0,01; 1]$  et pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ . Les courbes montrent



(a)



(b)

FIG. 5.3 – Variation du  $\Lambda_{critique}$  en fonction de  $\alpha$  en échelle linéaire-linéaire (a) et en échelle log-log (b). Pour un  $\epsilon$  donné,  $\Lambda$  est proportionnel à  $\alpha^{\frac{1}{2}}$ .

une évolution à très forte pente du  $\Lambda_{critique}$  en fonction de  $\alpha$  d'où l'application de l'échelle logarithmique sur la figure 5.3(b). Sur cette dernière nous constatons que les courbes ont une pente voisine de 0,5. La loi qui s'en déduit pourrait être la suivante :

$$\Lambda_{critique} \approx f(\varepsilon) \alpha^{\frac{1}{2}}. \quad (5.7)$$

La figure 5.4(a) montre les variations de  $\Lambda$  dans une plage des  $1/\varepsilon$  de 0 à 100 et pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Nous nous intéressons à  $1/\varepsilon$  car cela équivaut physiquement à s'intéresser à l'influence de  $P_0$ . Sur la figure 5.4(b), représentant ces variations en échelles logarithmique, nous constatons que les courbes ont une pente voisine de 0,5. La loi qui s'en déduit pourrait être la suivante :

$$\Lambda_{critique} \approx g(\alpha) 1/\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (5.8)$$

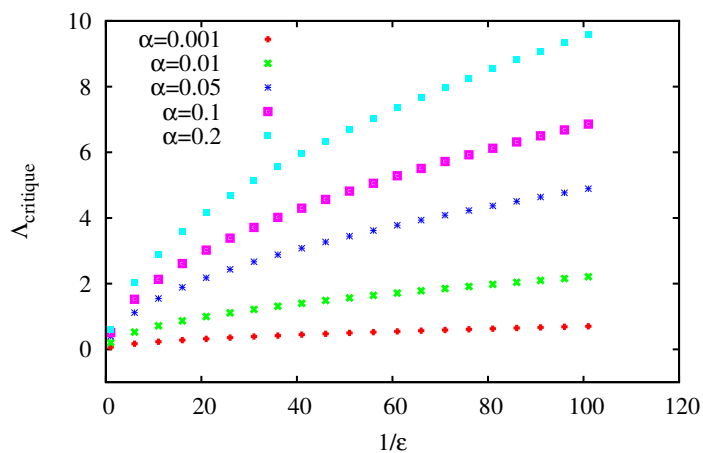
De l'équation (5.7) et (5.8) nous déduisons :

$$\Lambda_{critique} \approx 2,2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (5.9)$$

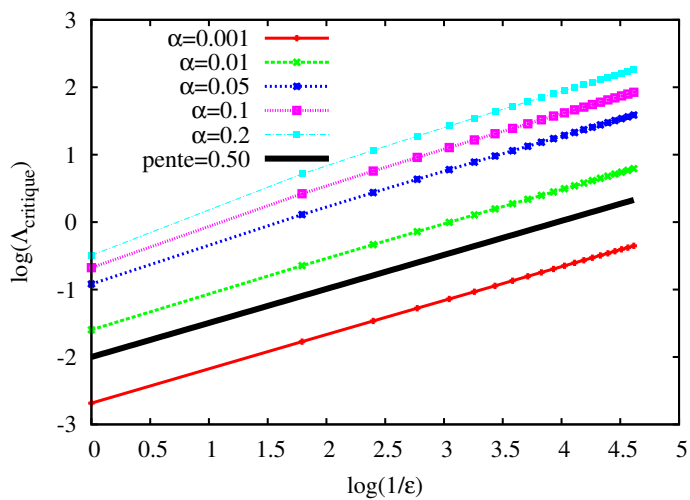
la constante 2.2 est calculée au point  $\alpha = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Dans les figures 5.3 et 5.4, nous avons pris des plages quelconques de  $\alpha$  et  $\varepsilon$ , or dans la relation (5.9), une contrainte physique se déduit facilement à savoir  $\Lambda_{critique} \geq 1$  car par définition  $\Lambda = H/d$  et comme la hauteur d'un système granulaire ne peut être inférieure au diamètre d'un grain, nous devons avoir  $H > d$ . Cette condition revient à  $2,2\sqrt{\alpha} \geq \sqrt{\varepsilon}$ . La figure 5.5 permet de voir le domaine de validité de la loi approchée (5.9), elle montre que la loi approchée ne marche pas pour de grandes valeurs de  $\varepsilon$  et  $\beta$  (pour  $\log_{10}(\varepsilon^{-1/2}) < 0,5$  et  $\log_{10}(\alpha^{1/2}) > -0,5$ ) par contre elle est parfaitement valable aux faibles valeurs de  $1/\varepsilon$  et  $\alpha$ .

### Justification du modèle simplifié pour $\Lambda_{critique}$

Afin de justifier la dépendance de  $\Lambda_{critique}$  en  $\sqrt{\alpha/\varepsilon}$  nous allons ci-dessous retrouver cette relation par une approche simplifiée. Ceci nous permettra de mieux



(a)



(b)

FIG. 5.4 – Variation du  $\Lambda_{critique}$  en fonction de  $\epsilon$  en échelle linéaire-linéaire (a) et en échelle log-log (b). Pour un  $\alpha$  donné,  $\Lambda$  est proportionnel à  $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$ .



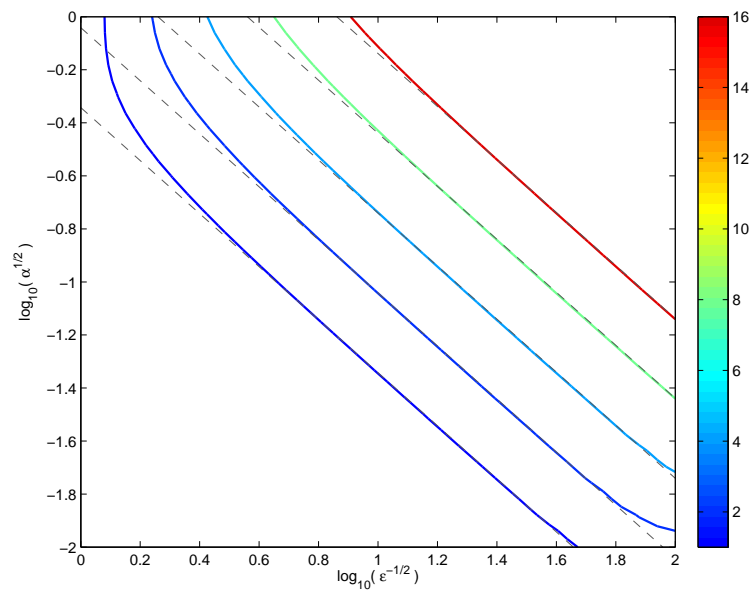


FIG. 5.5 – Lignes d’isovaleur de  $\Lambda_{critique} = 1, 2, 4, 8, 16$  (ligne en continue), comparaison avec la loi approchée (5.9) (tirets). La loi approchée ajuste bien les lignes d’isovaleur pour les faibles valeurs de  $1/\varepsilon$  et  $\alpha$ . La carte a été obtenue par un tracé d’isovaleurs d’une matrice de 30 par 30 points.

cerner l'origine de son domaine de validité (voir figure 5.5). Dans la configuration du cisaillement plan, le gradient horizontal de pression est nul  $\partial P(y)/\partial x = 0$ , l'équation du mouvement est donc  $\partial\tau(x, y)/\partial x = 0$ . Au lieu d'exprimer cette équation en fonction de la viscosité effective et de la dérivée du taux de cisaillement par rapport à  $x$  nous pouvons l'écrire comme une fonction de la pression et du coefficient de frottement effectif :

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} = \frac{\partial\mu(y)P(y)}{\partial y} = 0. \quad (5.10)$$

De façon équivalente, nous pouvons exprimer cette dernière équation sous la forme suivante

$$P(y)\frac{\partial\mu(y)}{\partial y} + \mu(y)\frac{\partial P(y)}{\partial y} = 0.$$

Après intégration, nous obtenons

$$\mu(y) = \frac{A}{P(y)}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

Une des hypothèses simplificatrices adoptées (voir section 5.1) est le caractère hydrostatique de la pression au sein du milieu granulaire. Ainsi, sous forme adimensionnée, nous avons  $P^*(y) = 1 + \varepsilon\Lambda(1 - y^*)$ . Nous pouvons alors écrire l'équation (5.10) sous la forme

$$\mu(y^*) = \frac{A}{1 + \varepsilon\Lambda(1 - y^*)}. \quad (5.11)$$

Dans la suite, nous nous placerons dans le cas où la hauteur d'écoulement est rigoureusement égale à la hauteur critique, pour laquelle le cisaillement devient nul au niveau de la plaque inférieure (en  $y^* = 0$ ). Dans ce cas, au niveau de cette même plaque, le système granulaire est à la limite de l'état statique et, par conséquence, nous avons  $\mu(y^* = 0) = \mu_s$ . En utilisant cette dernière relation dans l'équation (5.11) nous pouvons trouver l'expression de la constante  $A$  et obtenir pour  $\mu(y^*)$  l'expression suivante

$$\mu(y^*) = \mu_s \frac{1 + \varepsilon\Lambda_{critique}}{1 + \varepsilon\Lambda_{critique}(1 - y^*)}. \quad (5.12)$$

En  $y^* = 1$  cette dernière équation devient

$$\mu(y^* = 1) = \mu_s(1 + \varepsilon\Lambda_{critique}). \quad (5.13)$$

Nous avons ainsi une expression de la hauteur critique  $\Lambda_{critique}$  en fonction du coefficient de frottement effectif  $\mu(y^*)$ . Il suffit alors d'exprimer ce coefficient de frottement en fonction de  $\alpha$  et  $\varepsilon$  pour en déduire une expression de  $\Lambda_{critique}$  en fonction de ces quantités. Ceci peut être fait grâce à la formule empirique reliant le frottement effectif au nombre inertiel  $I$  :  $\mu(I) = \mu_s + (\mu_2 - \mu_s)/(1 + I_0/I)$ . Le nombre inertiel dépend de  $y$  via la pression et le taux de cisaillement :  $I(y^*) = \dot{\gamma}(y^*)\alpha/(\Lambda_{critique}\sqrt{P^*(y^*)})$ .

Nous connaissons la dépendance de la pression avec  $y$  (hypothèse hydrostatique) mais celle du taux de cisaillement nous est inconnue. Pour palier cette ignorance, nous pouvons supposer que le profil de vitesse est linéaire entre la surface située en  $y^* = 1$  et celle placée en  $y^* = 0$ . En agissant de la sorte, nous sous-estimons le cisaillement au niveau de la surface  $y^* = 1$  mais il nous semble raisonnable de penser que cette approximation ne modifie pas la dépendance de  $\dot{\gamma}$  vis-à-vis de  $\alpha$  et  $\varepsilon$ . Ainsi, dans le cadre de cette approximation, le cisaillement au niveau de la plaque supérieure est  $\dot{\gamma} = U_0/H_{critique}$  ce qui correspond à un cisaillement adimensionné  $\dot{\gamma}^*$  de l'ordre de 1. Ainsi, toujours en  $y^* = 1$ , nous avons, en tenant compte du fait que  $P^*(y^* = 1) = 1$ ,  $I \approx \alpha/\Lambda_{critique}$  ce qui conduit à

$$\mu(y^* = 1) \approx \mu_s + (\mu_2 - \mu_s) \frac{\alpha}{\alpha + I_0\Lambda_{critique}}.$$

Utilisons alors cette dernière équation pour remplacer  $\mu(y^* = 1)$  dans l'équation (5.12) pour laquelle  $y^* = 1$ . Nous obtenons l'équation du second ordre suivante

$$\Lambda_{critique}^2 + \frac{\alpha}{I_0}\Lambda_{critique} - \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0\mu_s} \frac{\alpha}{\varepsilon} = 0. \quad (5.14)$$

Cette équation a des solutions réelles seulement si

$$\alpha\varepsilon \geq -4 \left( \frac{\mu_2 - \mu_s}{\mu_s} \right).$$

Le terme de gauche de cette dernière équation étant négatif, les quantités  $\alpha$  et  $\beta$  étant positives cette condition est automatiquement vérifiée. La seule solution positive, donc physiquement acceptable est

$$\Lambda_{critique} = -\frac{\alpha}{2I_0} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4I_0^2} + \frac{(\mu_2 - \mu_s)\alpha}{\mu_s I_0} \frac{1}{\varepsilon}}.$$

La dépendance  $\Lambda_{critique} \propto \sqrt{\alpha/\varepsilon}$  est retrouvée si  $\alpha\varepsilon \ll 4I_0(\mu_2 - \mu_s)/\mu_s$ . Cette condition revient à négliger le terme du premier ordre en  $\Lambda_{critique}$  dans l'équation (5.14).

Dans ce cas, nous avons

$$\Lambda_{critique} = \sqrt{\frac{\mu_2 - \mu_s}{\mu_s I_0}} \sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon}} \approx 1,57 \sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon}}. \quad (5.15)$$

On notera la proximité du coefficient 1,57 avec le coefficient 2,2 de l'équation (5.9). La différence vient de l'approximation faite plus haut sur le taux de cisaillement au niveau de la plaque inférieure. En estimant ce taux de cisaillement plus justement à l'aide de la figure 5.2 nous retrouvons le bon facteur.

## 5.4 Poiseuille

La deuxième configuration sur laquelle nous avons appliqué la résolution semi-analytique est celle de Poiseuille. Le milieu granulaire est compris entre deux plaques toutes deux immobiles (vois figure 5.6) et pour avoir un écoulement, nous imposons une différence de pression non nulle entre l'entrée et la sortie du chenal. Dans cette configuration nous avons travaillé sans la gravité.

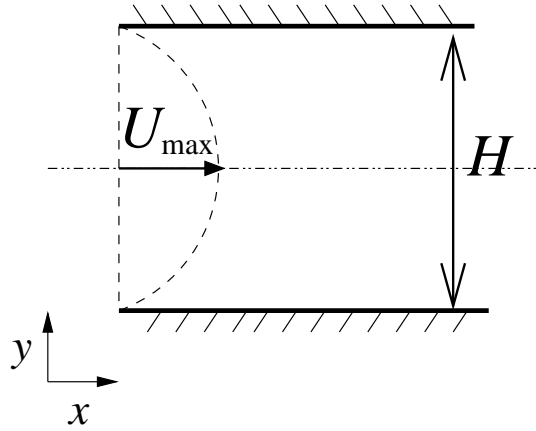


FIG. 5.6 – Configuration Poiseuille 2D.  $H$  représente la distance entre les deux plaques et  $U_{max}$  la vitesse maximale du profil de parabolique imposé en entrée.

#### 5.4.1 Formulation adimensionnelle

En suivant le même raisonnement que dans cas du Couette plan, dans le système à résoudre (5.1) nous avons 6 paramètres qui caractérisent notre écoulement, à savoir  $K$  (le gradient de pression, voir équation (5.2)),  $P_0$ ,  $H$ ,  $\rho$ ,  $\rho_s$  et  $d$ . Rappelons que la gravité n'est pas prise en compte. Pour adimensionner l'équation (5.1), nous nous donnons trois échelles : une échelle de longueur  $H$ , une échelle de vitesse  $\sqrt{-K \frac{H}{\rho_s}}$  ainsi qu'une échelle de pression  $P_0$ . Les variables adimensionnées

s'écrivent alors comme suit :  $y^* = \frac{y}{H}$ ,  $u^* = \frac{u}{\sqrt{-K \frac{H}{\rho_s}}}$  et  $P^* = \frac{P}{P_0}$ . Ceci nous permet d'avoir comme groupes adimensionnels :

$$\Lambda = \frac{H}{d}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-K H}}{\sqrt{P_0}} \quad \text{et} \quad \phi = \frac{\rho}{\rho_s}.$$

Les variables dépendant de  $y^*$  sont :  $P^*(y^*) = 1$ ,  $I(y^*) = \frac{\beta |\dot{\gamma}^*|}{\Lambda \sqrt{P^*(y^*)}}$ , et

$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0/I + 1}$ . Ainsi le système à résoudre sous forme adimensionnée est :

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \left( \frac{\beta |\dot{\gamma}^*| (\mu_2 - \mu_s)}{\Lambda I_0 + \beta |\dot{\gamma}^*|} + \mu_s \right) = -\beta^2 \quad (5.16)$$

avec

$$|\dot{\gamma}^*| = -\frac{\Lambda I_0 (\beta^2 y^* + \mu_s - k_1)}{\beta (\beta^2 y^* + \mu_2 - k_1)} \quad (5.17)$$

En intégrant cette équation en ajoutant les constante  $k_1$  et  $k_2$ , on obtient :

$$u^*(y^*) = k_2 - \frac{\Lambda I_0}{\beta^3} (y^* \beta^2 + (\mu_s - \mu_2) \log (\beta^2 y^* + \mu_2 - k_1)) \quad (5.18)$$

### 5.4.2 Conditions aux limites

Dans la configuration Poiseuille nous avons un axe de symétrie (figure 5.6), cette symétrie nous permet de diviser en deux notre domaine d'étude. Nous serons donc amené à résoudre notre équation sur une moitié de configuration. Les deux conditions limites que nous avons dans la demi-configuration Poiseuille sont les suivantes :

- le cisaillement sur l'axe de symetrie est nul. Pour  $y = 1/2$ ,  $\dot{\gamma}(y^*) = 0$ ,
- nous considérons en plus que le milieu granulaire ne glisse pas au niveau des plaques. Pour  $y^* = 0$  et  $y^* = 1$  nous avons  $u^*(y^*) = 0$ .

Ces deux conditions nous permettent de trouver la valeur de  $k_1$  et  $k_2$  dans l'étape 4 de la résolution (voir section 5.2), ainsi :

$$k_1 = \frac{2\mu_s + \beta^2}{2} \quad \text{et} \quad k_2 = -\frac{\Lambda I_0 (\mu_2 - \mu_s)}{\beta^3} \log \left( (\mu_2 - \mu_s) - \frac{\beta^2}{2} \right).$$

Nous obtenons ainsi l'expression de la vitesse suivante :

$$u^*(y^*) = -\frac{\Lambda I_0}{\beta^3} \left( \beta^2 y^* + (\mu_s - \mu_2) \log \left( -\frac{2\beta^2 y^* - 2\mu_s + 2\mu_2 - \beta^2}{2\mu_s - 2\mu_2 + \beta^2} \right) \right) \quad (5.19)$$

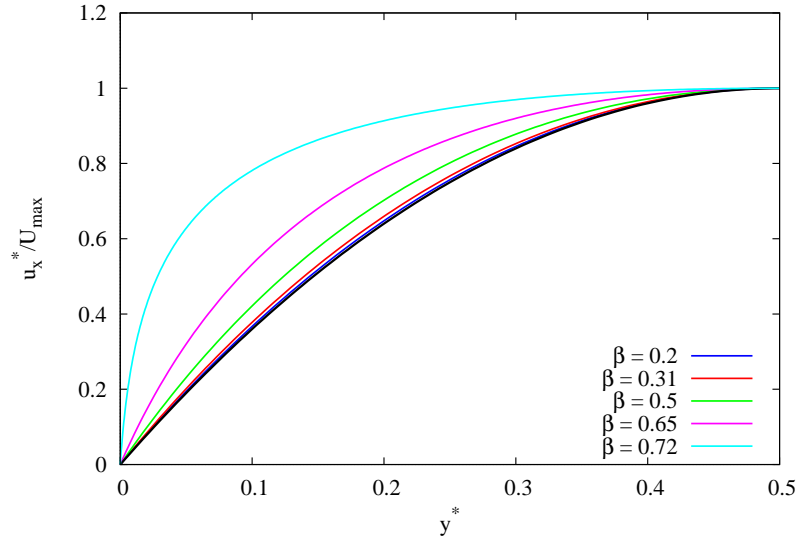


FIG. 5.7 – Variation du profil de vitesse pour différent  $\beta$ ,  $\Lambda = 20$ . Le profil tend à être parabolique (courbe noire) pour les  $\beta \rightarrow 0$ .

### 5.4.3 Résultats et discussions

Dans la configuration Poiseuille, la description de l'écoulement ne dépendait que de deux paramètres  $\Lambda$  et  $\beta$  car  $\phi$  est pris comme une constante ( $\phi = 0,6$ ). Pour un écoulement granulaire avec pour paramètres :  $\rho = 1,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $d = 0,5 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $H = 0,1 \text{ m}$ ,  $P_0 = 100 \text{ Pa}$  et  $K = -100 \text{ Pa/m}$ ; nous avons  $\Lambda = 20$  et  $\beta = 0,31$ . Nous étudions l'influence de ces paramètres sur le profil de vitesse de l'écoulement.

L'équation (5.19) montre clairement la dépendance de la vitesse par rapport à  $\Lambda$ . Multiplier  $\Lambda$  par un facteur  $k$  ne change pas le profil de vitesse  $U/U_{max}$  mais multiplie uniquement par  $k$  les valeurs de  $u^*$ . Ainsi l'étude de l'influence des paramètres se fera seulement pour le paramètre  $\beta$ . Nous fixons  $\Lambda$  à 20 et nous faisons varier  $\beta$ .

La figure 5.7 présente les profils obtenus pour différentes valeurs de  $\beta$ . Nous constatons que le profil de vitesse tend à être parabolique pour les  $\beta$  proches de 0 (pour  $\beta = 0,02$ ;  $0,31$ ) et s'aplatit pour les plus grand (pour  $\beta = 0,65$ ;  $0,72$ ). Notons que  $U_{max}$ , qui est égale à  $u^*(1/2)$ , a des valeurs de plus en grande lorsque

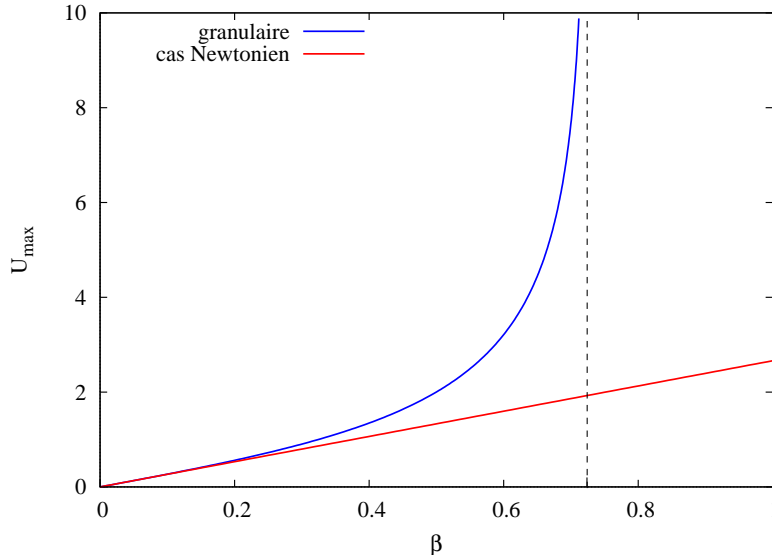


FIG. 5.8 – Variation de  $U_{max}$  en fonction de  $\beta$ ,  $\Lambda = 20$ . Comportement similaire pour le granulaires et le Newtonien quand  $\beta \rightarrow 0$  et divergence pour les  $\beta$  important car  $U_{max}$  reste linéaire pour le cas newtonien et  $U_{max} \rightarrow \infty$  quand  $\beta \rightarrow \sqrt{2(\mu_2 - \mu_s)}$  pour le cas granulaire.

$\beta$  croit et tend vers 0,723.

La figure 5.8 qui représente  $U_{max}$  en fonction de  $\beta$  montre une asymptote verticale au point d'abscisse  $\beta = \sqrt{2(\mu_2 - \mu_s)}$ . La présence de cette asymptote peut être expliquée à l'aide du raisonnement suivant. La conservation de la quantité de mouvement sur le demi-domaine étudié, nous permet d'écrire que le produit du gradient de pression  $K$  par la demi-largeur du domaine  $H/2$  est égal à la différence de contraintes de cisaillement à la paroi et au le centre du domaine. La contrainte de cisaillement est  $(\mu_s + (\mu_2 - \mu_s))P_0/(1 + I_0/I)$  à la paroi et  $\mu_s P_0$  au centre. Par conséquent,  $KH/2$  ne peut pas dépasser la différence maximale de ces deux contraintes, c'est à dire  $(\mu_2 - \mu_s)P_0$  obtenue lorsque  $I$  et  $U_{max}$  tendent vers l' infinie. Cette figure montre également que pour des  $\beta$  petits ( $\beta < 0.3$ ), la vitesse  $U_{max}$  est la même que dans le cas d'un fluide newtonien ceci bien que la viscosité ne soit pas constante.

Afin de justifier que le profil de vitesse tend à être parabolique pour les  $\beta$  proches de 0, nous allons faire une développement en série de l'équation (5.19)



quand  $\beta \rightarrow 0$ , nous obtenons pour un développement d'ordre 6 :

$$u^*(y^*) = -\frac{\beta \Lambda I_0}{2(\mu_s - \mu_2)} (y^* - y^{*2}) + O(\beta^3) \quad (5.20)$$

et

$$U_{max} = -\frac{\beta \Lambda I_0}{8(\mu_s - \mu_2)} \quad (5.21)$$

Ainsi le profil de vitesse devient parabolique quand  $\beta \rightarrow 0$ .

Le fait d'observer un profil parabolique lorsque le gradient de pression tend vers zéro amène naturellement à la question suivante : le fluide granulaire devient-il newtonien lorsque le gradient de pression est faible ? Afin de répondre à cette question cherchons tout d'abord à écrire une expression approchée de  $\dot{\gamma}^*$  lorsque  $\beta$  tend zéro. En utilisant l'expression de  $k_1$ , à savoir,  $k_1 = \mu_s + \beta^2/2$ , dans l'expression de  $\dot{\gamma}^*$  (équation 5.17), nous avons, en effectuant un développement limité jusqu'à l'ordre 2 en  $\beta$  :

$$|\dot{\gamma}^*| \approx -\frac{\beta \Lambda I_0}{\mu_2 - \mu_s} \left( y^* - \frac{1}{2} \right). \quad (5.22)$$

À partir du taux de cisaillement, nous pouvons avoir accès à la viscosité du milieu granulaire en écrivant

$$\eta^* = \frac{\mu(I)P^*}{\dot{\gamma}^*}. \quad (5.23)$$

Dans la géométrie utilisée les termes intervenant dans l'expression du nombre  $I$  sont tous constants à l'exception du taux de cisaillement <sup>1</sup>. Ce dernier étant proportionnel à  $\beta$ , est très petit. Le nombre  $I$  étant proportionnel au taux de cisaillement nous pouvons considérer que  $I$  est petit devant  $I_0$ . Dans ces conditions l'expression du coefficient de frottement effectif (équation 4.4) se réduit à

$$\mu(I) \approx \mu_s + (\mu_2 - \mu_s) \frac{I}{I_0}.$$

---

<sup>1</sup>En toute rigueur la pression est également une grandeur non constante, mais sa variation le long du chenal est considérée comme étant très faible

L'équation (5.23) devient alors

$$\eta^* = \frac{\mu(I)P^*}{\dot{\gamma}^*} = \frac{\mu_s P^*}{\dot{\gamma}^*} + (\mu_2 - \mu_s) \frac{I}{I_0} P^*. \quad (5.24)$$

Remplacer  $I$  par sa définition dans cette dernière équation conduit à

$$\eta^* = \frac{\mu_s P^*}{\dot{\gamma}^*} + (\mu_2 - \mu_s) \frac{\beta}{\Lambda I_0} \sqrt{P^*}. \quad (5.25)$$

La viscosité "dimensionnelle" est alors donnée par

$$\eta = \frac{\mu_s P}{\dot{\gamma}} + (\mu_2 - \mu_s) \frac{\sqrt{\rho_s P_0} d}{I_0}. \quad (5.26)$$

Nous trouvons ainsi une viscosité qui, contrairement au cas du fluide newtonien, n'est pas une constante. Elle présente en effet un terme constant ainsi qu'un terme proportionnel à  $1/\dot{\gamma}^*$ . Il peut alors sembler paradoxal d'observer, malgré tout, un profil de vitesse qui tend vers un profil parabolique lorsque  $\beta$  tend vers zéro. Pour lever ce paradoxe, remarquons que l'équation géométrant l'écoulement fait intervenir la dérivée de  $\eta\dot{\gamma}$  par rapport à  $y$ . Si la viscosité est de la forme  $\eta = A/\dot{\gamma} + B$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial y} (\eta\dot{\gamma}) = \frac{\partial A}{\partial y} + B \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial y} = B \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial y}, \quad (5.27)$$

qui correspond à l'équation géométrant l'écoulement d'un fluide newtonien de viscosité  $B$ . Ainsi, ce raisonnement nous montre que un fluide dont la viscosité peut s'exprimer comme  $A/\dot{\gamma} + B$  se comporte dans le cas d'un écoulement stationnaire et établi dans la géométrie de Poiseuille comme un fluide newtonien de viscosité  $B$ .

Revenons au cas de notre fluide granulaire. Bien que la viscosité de celui-ci ne tende pas vers une constante lorsque  $\beta$  tend zéro (en d'autres termes le fluide granulaire ne tend pas vers un fluide newtonien), son profil de vitesse tend vers le

profil qui serait obtenu dans la cas de fluide newtonien dont viscosité serait

$$\eta_{\text{newton}} = \frac{d\sqrt{P_0}\sqrt{\rho_s}(\mu_2 - \mu_s)}{I_0}. \quad (5.28)$$

Ainsi, lorsque le gradient de pression tend vers zéro, la viscosité du fluide granulaire peut alors s'écrire comme

$$\eta = \frac{\mu_s P}{\dot{\gamma}} + \eta_{\text{newton}} \quad (5.29)$$

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé une méthode semi-analytique pour étudier des écoulements granulaires stationnaires et établis dans deux géométries : la géométrie Couette plan et la géométrie Poiseuille. Nous avons obtenus les résultats résumés ci-dessous.

Dans la configuration Couette, nous avons montré que pour des paramètres bien choisis, l'écoulement se localise sur une certaine portion du système. Ceci est conforme à de nombreuses observations expérimentales. Nous avons également mis en évidence une loi permettant de caractériser l'écoulement, notamment  $\Lambda_{\text{critique}} \propto \sqrt{\alpha/\varepsilon}$  (voir équation (5.9) et (5.15)), autrement dit, la hauteur  $H$  sur laquelle le milieu granulaire est en mouvement, est proportionnelle au produit de la racine carrée de la vitesse  $U_0$  de la plaque supérieure et de la racine quatrième de la pression  $P_0$  sur cette plaque. Bien que cette loi ne soit pas valable pour toute valeur de  $\alpha$  et  $\varepsilon$  son domaine d'applicabilité semble très large. Ce résultat est riche et demande à être encore exploité.

Dans la configuration Poiseuille, nous avons décrit façon détaillée l'influence du paramètre  $\beta$  qui est fonction du gradient de pression dans l'écoulement. Nous avons mis en évidence que lorsque le gradient de pression tend vers 0, le profil de vitesse tend à être parabolique. Lorsque ce paramètre augmente, le profil de vitesse s'aplatit. Ces résultats sont qualitativement conformes à ceux du chapitre

4. Lorsque  $\beta$  tend vers zéro, la viscosité s'écrit  $\frac{\mu_s P}{\dot{\gamma}} + \eta_{\text{newton}}$ , où  $\eta_{\text{newton}}$  est une constante. Nous avons alors expliqué pourquoi cette viscosité, bien que non constante, conduit à un profil de vitesse parabolique.

# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Au cours de ce travail de thèse nous nous sommes intéressés à la modélisation numérique d'écoulements granulaires, ceci dans plusieurs configurations. L'objectif premier de ce travail consistait à étudier les écoulements granulaires dans un silo grâce aux simulations numériques de type "éléments discrets" décrits au chapitre 2. Cette étude nous a conduit à l'adaptation d'un code de dynamique moléculaire dans la configuration silo qui a été utilisé afin de comprendre l'influence de certains paramètres comme le coefficient de restitution et de frottement sur le débit et le profil de vitesse de l'écoulement granulaire. Nous avons montré que le coefficient de frottement influençait le débit d'écoulement des grains mais pas le profil de vitesse. Ainsi lorsqu'on augmente ce coefficient, le débit diminue. Cette diminution est la conséquence directe de la diminution de la compacité de granulaire au niveau de l'orifice. De même, lorsqu'on augmente le coefficient de restitution, le débit diminue également. Ceci est également dû à une compacité moindre au niveau de l'orifice.

Devant la puissance numérique nécessaire pour simuler des silos industriels, nous avons, dans un second temps, traité le milieu granulaire comme un fluide avec une viscosité effective déduite de la loi de friction  $\mu(I)$  dont la présentation a été faite au chapitre 4. Les géométries d'études utilisées pour ce propos ont été la géométrie Couette plan ainsi que la géométrie Poiseuille. Elle présentent toutes deux l'avantage d'être plus simples que la géométrie silo tout en conservant le caractère "écoulement confiné" (voir chapitre 1). Ce second volet de nos

travaux, nous a amené à modifier un code Matlab, initialement destiné à résoudre les équation de Navier-Stokes, pour étudier les écoulements de milieux granulaire en traitant ces derniers comme un fluide ayant une viscosité effective. Nous avons conservé, moyennant une approximation, une formulation de type Navier-Stokes. Cette approche a été validée par une étude semi-analytique de problème en utilisant quelques hypothèses simplificatrices.

Nos résultats ont montré d'une part que, dans la configuration Couette plan, selon les paramètres bien choisis, l'écoulement se localise sur une certaine portion du système. Ceci est conforme à de nombreuses observations expérimentales et numériques "discrètes". Nous avons également mis en évidence une loi permettant de caractériser l'écoulement. Cette loi montre que la hauteur  $H$  sur laquelle le milieu granulaire est en mouvement, est proportionnelle au produit de la racine carrée de la vitesse  $U_0$  de la plaque supérieure et de la racine quatrième de la pression  $P_0$  sur cette plaque.

D'autre part, en configuration Poiseuille, nous avons mis en évidence que lorsque le gradient de pression tend vers 0 ou pour de très faible vitesse entrée, le profil de vitesse tend à être parabolique, ce qui a été expliqué. Au contraire, pour de grandes valeurs de vitesse d'entrée ou de grandes valeurs de gradients de pression, le profil de vitesse s'aplatit.

## Perspectives

Ce travail ouvre de nombreuses perspectives à court, moyen et long terme. Tout d'abord rappelons qu'il a été motivé par la modélisation de silos de grains. Nous nous sommes heurté à une difficulté d'ordre technique qui nous a empêché de simuler des silos de taille importante. Le développement récent du calcul parallèle sur carte graphique permettra certainement dans un premier temps de simuler des silos de tailles plus conséquentes, voir à longue échéance, des situations industrielles.

À plus court terme, il serait intéressant d'utiliser le solver Gerris avec l'implémentation de la loi  $\mu(I)$  afin de simuler les écoulements granulaire en silo, ce qui

permettra peut-être de répondre aux questions suivantes. Peut-on reproduire la diminution du débit de vidange avec l'augmentation du coefficient de frottement et du coefficient de restitution ? Est-il nécessaire d'introduire une loi de variation de compacité en fonction des paramètres  $\mu_2$ ,  $\mu_s$  et  $I_0$ . Si oui, peut-on faire un lien avec les paramètres micromécaniques des grains, à savoir le coefficient de restitution et le coefficient de frottement ?

Enfin, comme indiqué lors de la présentation de la loi  $\mu(I)$ , celle-ci ne permet pas de prendre en compte correctement la transition liquide-solide. Ceci est notamment le cas pour la géométrie Couette-plan en présence de gravité où l'écoulement est localisé sur une région de la cellule, le reste du système étant complètement statique. Expérimentalement, la zone statique est en fait quasi-statique avec un profil de vitesse qui décroît exponentiellement avec la profondeur. Enfin, le modèle  $\mu(I)$  ne permet pas de prendre en compte ce phénomène, ni la présence d'hystérésis sur les seuils d'écoulement. Une réflexion vers la prise en compte d'effets non-locaux dans la rhéologie  $\mu(I)$  pourra être menée.





# Annexe A

## Code Matlab pour la résolution d'équation de Navier-Stokes : cas d'une viscosité effective

Dans cette annexe, nous présentons le code Matlab qui est décrit et utilisé au chapitre 4. Ce code est la résultante des modifications apportées au code écrit par (Seibold, 2008) (disponible sur <http://www-math.mit.edu/18086> ). Il résout l'équation de Navier-Stokes avec une viscosité effective (faisant intervenir la loi  $\mu(I)$ ) dans un domaine rectangulaire avec des conditions aux limites particulières (voir figure 4.4).

```
function navierstokes_Poiseuille

%-----
%Parametres du milieu granulaire
g=0; %sans gravité
teta=0; %sans inclinaison
P0=1000; %Pression
rhos = 2500; %masse volumique du grain
densite=0.6; %densité
rho=rhos*densite; %masse volumique du milieu granulaire
```

```

d=2.5e-3; %diametre du grain
I0=0.279; mus=0.3819; mu2=0.6435;%parametres de la loi mu de I
gammaMin=1e-5;
%-----
% Parametres de la configuraton
dt = 1e-4; % Pas de temps
tf = 8e-0; % Temps final
lx = 3; % Longueur
ly = 1; % Hauteur
nx = 3*30; % nombre de x-gridpoints
ny = 30; % nombre de y-gridpoints
nsteps =10; % nombre de fois où la figure en sortie est dessinee
U_max=1e-5; %vitesse maximal du profil parabolique
a=-4*U_max;b=4*U_max; c=0; %parametres du profil parabolique f(y)=a*y^2+b*y+c
%-----
% Parametres de maillage
nt = ceil(tf/dt); dt = tf/nt;
x = linspace(0,lx,nx+1); hx = lx/nx;
y = linspace(0,ly,ny+1); hy = ly/ny;
[Y,X] = meshgrid(y,x);
E=zeros(1,nt);
%-----
% Conditions initiales
U = zeros(nx,ny);
V = zeros(nx,ny-1);
P =ones(nx,ny)*P0;
% Conditions aux limites
NuE= avg(y)*0; NvE = y*0 ; %condition de Neumann
uN = x*0; vN = avg(x)*0; pN = zeros(1,nx+2);
uS = x*0; vS = avg(x)*0; pS = zeros(1,nx+2);
uW = avg(f(a,b,c,y)); vW = y*0; pW = zeros(1,ny);
uE = NuE; vE = NvE; pE = zeros(1,ny)+P0;
%-----
%vitesses et pression avec conditions aux limites
T=rho*g*avg(avg(Y)')'*cosd(teta);
Ubc = dt*([2*uS(2:end)' zeros(nx,ny-2) 2*uN(2:end)'])/hy^2+...

```

```

    [uW;zeros(nx-2,ny);NuE]/hx^2);
Vbc = dt*([vS' zeros(nx,ny-3) vN']/hy^2+...
    [2*vW(2:end-1);zeros(nx-2,ny-1);NvE(2:end-1)]/hx^2);
Pbc = ([pS(2:end-1)' zeros(nx,ny-2) pN(2:end-1)']/hy^2+...
    [pW; zeros(nx-2,ny);2*pE]/hx^2);

fprintf('Initialisation\n')
Lp = kron(speye(ny),K1(nx,hx,1,3))+kron(K1(ny,hy,1,1),speye(nx));
perp = symamd(Lp); Rp = chol(Lp(perp,perp)); Rpt = Rp';

fprintf(' , time loop\n--20%--40%--60%--80%-100%\n')
for k = 1:nt
    Ue = [uW;U]; Ue = [2*uS'-Ue(:,1) Ue 2*uN'-Ue(:,end)];
    Ve = [vS' V vN']; Ve = [2*vW-Ve(1,:);Ve;2*vE-Ve(end,:)];
    Pe=P+T;
    Pe = [Pe(1,:);Pe;2*pE-Pe(end,:)]; Pe = [Pe(:,1) Pe Pe(:,end)];
    E(k)=sqrt(sum(sum(avg(Ue')'.^2+avg(Ve.^2))));

    %contrainte et loi de mu
    gammaN = diff(Ue')'/hy + diff(Ve)/hx;
    gammaN = sqrt(gammaN.*gammaN);
    Pa=avg(avg(Pe)')';

    for i=1:ny+1
        for j=1:nx+1
            if Pa(j,i)==0
                KN(j,i)=0;
            else
                gammaN(j,i)=max(gammaMin,gammaN(j,i));
                I(j,i) = d*gammaN(j,i)/sqrt(Pa(j,i)*densite);
                MUI(j,i) = (mu2-mus)./(I0*(1./I(j,i))+1) + mus;
                KN(j,i) = MUI(j,i)*Pa(j,i)/gammaN(j,i);
            end
        end
    end
end
end

```

```

KNu=spdiags(reshape(avg(KN(2:end,:))'), [], 1), 0, nx*ny, nx*ny);
Lu = speye((nx)*ny)+dt*KNu*(kron(speye(ny), K1(nx, hx, 2, 1))+...
    kron(K1(ny, hy, 3, 3), speye(nx)) );
[LLu, ULu, peru, qu]=lu(Lu);
KNv=spdiags(reshape(avg(KN(:, 2:end-1))), [], 1), 0, nx*(ny-1), nx*(ny-1));
Lv = speye(nx*(ny-1))+dt*KNv*(kron(speye(ny-1), K1(nx, hx, 3, 1))+...
    kron(K1(ny-1, hy, 2, 2), speye(nx)) );
[LLv, ULv, perv, qv]=lu(Lv);

% Traitement des termes non linéaires
gamma = min(1.2*dt*max(max(max(abs(U)))/hx, max(max(abs(V)))/hy), 1);
Ua = avg(Ue')'; Ud = diff(Ue')'/2;
Va = avg(Ve); Vd = diff(Ve)/2;
UVx = diff(Ua.*Va-gamma*abs(Ua).*Vd)/hx;
UVy = diff((Ua.*Va-gamma*Ud.*abs(Va))')'/hy;
Ua = avg([Ue(:, 2:end-1); Ue(end, 2:end-1)+NuE]);
Ud = diff([Ue(:, 2:end-1); Ue(end, 2:end-1)+NuE])/2;
Va = avg(Ve(2:end-1,:))'; Vd = diff(Ve(2:end-1,:))'/2;
U2x = diff(Ua.^2-gamma*abs(Ua).*Ud)/hx;
V2y = diff((Va.^2-gamma*abs(Va).*Vd)')'/hy;
U = U-dt*(UVy(2:end,:)+U2x);
V = V-dt*(UVx(:, 2:end-1)+V2y);

% viscosité implicite
rhs = reshape(U, [], 1)+KNu*reshape(Ubc, [], 1);
u = qu*(ULu\ (LLu\ (peru*rhs)));
U = reshape(u, nx, ny);
rhs = reshape(V, [], 1)+KNv*reshape(Vbc, [], 1);
v = qv*(ULv\ (LLv\ (perv*rhs)));
V = reshape(v, nx, ny-1);

% Correction de la pression
rhs = reshape((diff([uW;U])/hx+diff([vS' V vN']')'/hy)/dt + Pbc, [], 1);
p(perp) = -Rp\ (Rpt\rhs(perp));
p = p + P0;
P = reshape(p, nx, ny);

```

```

U = U-dt*(diff([P;P(end,:)])/hx);
V = V-dt*(diff(P')'/hy);

% visualization
if floor(25*k/nt)>floor(25*(k-1)/nt), fprintf('.'), end
if k==1 || floor(nsteps*k/nt)>floor(nsteps*(k-1)/nt)
    rhs = reshape(diff(U(1:end-1,:))'/hy-diff(V)/hx,[],1);
    clf
    contourf(avg(x),avg(y),P',20,'w-'), hold on
    Ue = [uS' avg([uW;U]')' uN'];
    Ve = [vW;avg([vS' V vN'])];[0 V(end,:)] 0];
    Len = sqrt(Ue.^2+Ve.^2+eps);
    quiver(x,y,(Ue./Len)',(Ve./Len)',.4,'k-')
    hold off, axis equal, axis([0 lx 0 ly])
    p = sort(p); caxis(p([8 end-7]))
    title(sprintf('U_max = %0.4g   t = %0.2g',U_max,k*dt))
    drawnow
end
end
% Visualisation des profils de vitesses de U
    figure(2);
    subplot(2,2,1);plot([0 avg(y) 1],[0 U(1,:) 0])
title('Profil de vitesse U(1,:)')
    xlabel('y'); ylabel('U');
    subplot(2,2,2); plot([0 avg(y) 1],[0 U(round(nx/3),:) 0])
title(sprintf('Profil de vitesse U(%d,:)',round(nx/3 )))
    xlabel('y'); ylabel('U');
    subplot(2,2,3); plot([0 avg(y) 1],[0 U(round(nx*2/3),:) 0])
title(sprintf('Profil de vitesse U(%d,:)',round(nx*2/3)))
    xlabel('y'); ylabel('U');
    subplot(2,2,4); plot([0 avg(y) 1],[0 U(nx-1,:) 0])
title(sprintf('Profil de vitesse U(%d,:)', nx-1))
    xlabel('y'); ylabel('U');
%=====

function B = avg(A,k)

```

```
% Fonction calculant la moyenne des éléments de la matrice A
% avg([a1,a2,a3,...,an])=[(a1+a2)/2, (a2+a3)/2,...,(an-1+an)/2]
if nargin<2, k = 1; end
if size(A,1)==1, A = A'; end
if k<2, B = (A(2:end,:)+A(1:end-1,:))/2; else, B = avg(A,k-1); end
if size(A,2)==1, B = B'; end

function A = K1(n,h,a11,ann)
% a11: Neumann=1, Dirichlet=2, Dirichlet mid=3;
% ann: Neumann=1, Dirichlet=2, Dirichlet mid=3;
A = spdiags([-1 a11 0;ones(n-2,1)*[-1 2 -1];0 ann -1],-1:1,n,n)'/h^2;

function x = f(a,b,c,y)
% profil parabolique
x=a*y.^2+b*y+c;
```

# Annexe B

## Feuille de calcul MAXIMA : Couette Plan : Étude du Lambda critique

Dans cette annexe, nous présentons la feuille de calcul MAXIMA qui servi à calculer le  $\Lambda_{critique}$  dans un écoulement granulaire dense en configuration Couette plan. Grâce à ce  $\Lambda_{critique}$  nous avons ensuite calculer les profils en faisant varié les valeurs de  $\Lambda$ (voir figure 5.2).

### Feuille de calcul MAXIMA – Écoulement de Couette granulaire : Étude du Lambda\_critique

'mu\_Lcouette\_2909\_adim' version MD/EC 29/09/2011 11h30

Étude du Lambda\_critique en fonction des paramètres  $(\varepsilon, \alpha)$  et des profils de vitesse :

- 1) choisir des valeurs pour  $\varepsilon$  et  $\alpha$  (valeurs nominales 0.01 et 0.01)
- 2) activer le menu : 'Cell'  $\rightarrow$  'Evaluate All Cells' Remarque : le Lambda\_critique est quasiment proportionnel au rapport  $\sqrt{\alpha}/\sqrt{\varepsilon}$  Testé pour  $\varepsilon$  et  $\alpha$  compris dans  $[1e-4, 1]$

```
(%i1) kill(all);  
(%o0) done  
(%i1) epsilon_0 : 0.005;  
(%o1) 0.005  
(%i2) alpha_0 : 0.0002;  
(%o2) 2.0000000000000001 10-4  
(%i3) fpprintprec : 10;
```

```

(%o3) 10
(%i4) ratprint : false;
(%o4) false
Paramètre adimensionnels
(%i5) Lambda = H/d;
(%o5)  $\Lambda = \frac{H}{d}$ 
(%i6) epsilon = rho*g*d/P0;
(%o6)  $\varepsilon = \frac{d g \rho}{P_0}$ 
(%i7) alpha = U/sqrt(P0/rho_s);
(%o7)  $\alpha = \frac{U}{\sqrt{\frac{P_0}{\rho_s}}}$ 
(%i8) phi = rho/rho_s;
(%o8)  $\phi = \frac{\rho}{\rho_s}$ 
Système à résoudre avec les variables adimensionnées
(%i9) P(y) := 1 + epsilon*Lambda*(1-y);
(%o9)  $P(y) := 1 + \varepsilon \Lambda (1 - y)$ 
(%i10) I(y) := gamma*alpha/(Lambda*sqrt(P(y)));
(%o10)  $I(y) := \frac{\gamma \alpha}{\Lambda \sqrt{P(y)}}$ 
(%i11) assume(mu2>0);
      assume(mus>0);
(%o11) [ $\mu_2 > 0$ ]
(%o12) [ $\mu_s > 0$ ]
(%i13) mu(I) := mus + (mu2-mus)/(I0/I+1);
(%o13)  $\mu(I) := \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{I_0}{I} + 1}$ 
(%i14) 'diff('eta(u(y))*diff('u(y),y),y) = K;
(%o14)  $\frac{d}{dy} \left( \eta(u(y)) \left( \frac{d}{dy} u(y) \right) \right) = K$ 
(%i15) K : 0;

```



```

(%o15) 0
(%i16) eta(u) := mu(I(y))*P(y)/gamma;
(%o16)  η(u) :=  $\frac{\mu(I(y)) P(y)}{\gamma}$ 
(%i17) tau(y) := K*y+k1;
(%o17)  τ(y) := K y + k1
(%i18) assume(k1>0);
(%o18)  [k1 > 0]
(%i19) eq : gamma = tau(y)/eta(y);
(%o19)  γ =  $\frac{k_1 \gamma}{(\varepsilon \Lambda (1 - y) + 1) \left( \frac{\mu_2 - \mu_s}{\Lambda \sqrt{\varepsilon \Lambda (1 - y) + 1} I_0} + \mu_s \right)}$ 
(%i20) solve(eq,gamma);
(%o20)  [γ =  $-\frac{(\mu_s (-\varepsilon \Lambda^2 \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} - \Lambda \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1}) + \varepsilon \Lambda^2 \mu_s y \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} + k_1 \Lambda \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1}) I_0}{\alpha \varepsilon \Lambda \mu_2 y + (-\alpha \varepsilon \Lambda - \alpha) \mu_2 + \alpha k_1}$ , γ =
0]
(%i21) gamma : rhs(first(%));
(%o21)  -  $\frac{(\mu_s (-\varepsilon \Lambda^2 \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} - \Lambda \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1}) + \varepsilon \Lambda^2 \mu_s y \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} + k_1 \Lambda \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1}) I_0}{\alpha \varepsilon \Lambda \mu_2 y + (-\alpha \varepsilon \Lambda - \alpha) \mu_2 + \alpha k_1}$ 
(%i22) gamma : factor(gamma);
(%o22)  -  $\frac{\Lambda \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} (\varepsilon \Lambda \mu_s y - \varepsilon \Lambda \mu_s - \mu_s + k_1) I_0}{\alpha (\varepsilon \Lambda \mu_2 y - \varepsilon \Lambda \mu_2 - \mu_2 + k_1)}$ 
(%i23) u : integrate(gamma,y) + k2;
(%o23)  (2 ( $\frac{k_1^{\frac{3}{2}} (\mu_s - \mu_2) \log \left( \frac{2 \mu_2 \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} - 2 \sqrt{k_1} \sqrt{\mu_2}}{2 \mu_2 \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} + 2 \sqrt{k_1} \sqrt{\mu_2}} \right) + \mu_2 \mu_s (-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1)^{\frac{3}{2}} + (3 k_1 \mu_s - 3 k_1 \mu_2) \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1}}{2 \mu_2^{\frac{5}{2}}} + \frac{I_0}{3 \mu_2^2} \int (\alpha \varepsilon) +$ 

```

$k_2$

Plus bas, pour trouver par itération la valeur de  $k_1$  à partir de la condition limite en  $y=1$ , la valeur de départ doit satisfaire une contrainte pour que le l'argument du  $\log()$  reste positif :  $k_1 < \mu_2$

```
(%i24) subst(1,y,u);
```

$$2 \left( \frac{\mu_2 \mu_s + 3 k_1 \mu_s - 3 k_1 \mu_2}{3 \mu_2^2} + \frac{k_1^{\frac{3}{2}} \log\left(\frac{2 \mu_2 - 2 \sqrt{k_1} \sqrt{\mu_2}}{2 \mu_2 + 2 \sqrt{k_1} \sqrt{\mu_2}}\right) (\mu_s - \mu_2)}{2 \mu_2^{\frac{5}{2}}} \right) I_0$$

(%o24)  $\frac{\alpha \varepsilon}{\alpha \varepsilon} + k_2$

Application numérique : pour avoir une idée des valeurs de  $\varepsilon$  et  $\alpha$  qui devront être choisis au début du programme.

```
(%i25) mus:0.381; mu2:0.643; I0:0.279;
```

```
(%o25) 0.381
```

```
(%o26) 0.643
```

```
(%o27) 0.279
```

```
(%i28) d:0.5E-3; rho_s:2500; g:9.81; rho:rho_s*0.6; U:0.01; P0:1000;
```

```
(%o28) 5.0 10-4
```

```
(%o29) 2500
```

```
(%o30) 9.81
```

```
(%o31) 1500.0
```

```
(%o32) 0.01
```

```
(%o33) 1000
```

```
(%i34) epsilon : rho*g*d/P0;
```

```
(%o34) 0.0073575
```

```
(%i35) alpha : float(U/sqrt(P0/rho_s));
```

```
(%o35) 0.015811388
```

```
(%i36) load(mnewton);
```

```
(%o36) /usr/share/maxima/5.22.1/share/contrib/mnewton.mac
```

```
(%i37) epsilon : epsilon_0;
```

```
(%o37) 0.005
```

```
(%i38) alpha : alpha_0;
```

```
(%o38) 2.0 10-4
```

Détermination du  $\Lambda_{critique}$  (par itération) qui vérifie : cisaillement nul en  $y = 0$  (et strictement positif pour  $y > 0$ )

Une tolérance de  $1e-5$  semble raisonnable (une vingtaine d'itérations par dichotomie).

Pour prendre la valeur de  $\Lambda_{fin}$ , on a l'estimation :  $\Lambda_{critique} \approx 2, 2\sqrt{\alpha/\varepsilon}$

Attention : la valeur de démarrage de la recherche de  $k_1$  par Newton doit être impérativement très proche et inférieure à  $\mu_2$ , qui est une asymptote séparant la

zone valide de recherche d'une autre zone ( $k_1 > \mu_2$ ) où il n'y a pas de racines réelles.

```

--> Lambda_d : 0; Lambda_f : 3 * 2.2*sqrt(alpha/epsilon);
pos : 1; i : 0; k1_init : mu2 - 1.0e-6;
--> while abs(pos) > 1e-5 and i < 50 do (
    Lambda:(Lambda_d+Lambda_f)/2,
    i:i+1,
    k1:'k1, k2:'k2,
    print(concat("i = ",i)),
    print(concat("Lambda = ",float(Lambda))),
    eq1ev:subst(1,y,ev(u))=1,
    eq2ev:subst(0,y,ev(u))=0,
    k2:solve(eq2ev,k2), k2:rhs(k2[1]),
    k1:mnewton(ev(eq1ev),k1,k1_init), k1:k1[1], k1:rhs(k1[1]),
    print(concat("k1 = ",k1)),
    pos:subst(0,y,ev(gamma)),
    if pos<0 then Lambda_f:Lambda else Lambda_d:Lambda,
    print(concat("cisaillement [y=0] = ",pos)),
    print("-----")
);

```

Enregistrement d'une série de profils pour différentes valeurs de Lambda : deux valeurs en dessous de Lambda critique ; trois valeurs au dessus.

```

--> Lambda_0:Lambda; u_0:ev(u); u_0:ev(u_0);
--> k1:'k1; k2:'k2;
--> Lambda:Lambda_0/4;
--> eq1ev:subst(1,y,ev(u))=1;
--> eq2ev:subst(0,y,ev(u))=0;
--> k2:solve(eq2ev,k2); k2:rhs(k2[1]);
--> k1:mnewton(ev(eq1ev),k1,k1_init); k1:k1[1]; k1:rhs(k1[1]);
--> u_1:ev(u); u_1:ev(u_1); Lambda_1:Lambda;
--> k1:'k1; k2:'k2;
--> Lambda:Lambda_0/2;
--> eq1ev:subst(1,y,ev(u))=1;
--> eq2ev:subst(0,y,ev(u))=0;
--> k2:solve(eq2ev,k2);k2:rhs(k2[1]);
--> k1:mnewton(ev(eq1ev),k1,k1_init);k1:k1[1];k1:rhs(k1[1]);
--> u_2:ev(u); u_2:ev(u_2); Lambda_2:Lambda;

```

```

--> Lambda:'Lambda;
--> y_bar : (Lambda-Lambda_0)/Lambda;
--> y_tilde : ( y - y_bar ) / ( 1 - y_bar );
--> Lambda:Lambda_0*2;
--> new : subst( ev(y_tilde),y,u_0 );
--> u_3: if y < ev(y_bar) then 0 else new; Lambda_3:Lambda;
--> Lambda:Lambda_0*4;
--> new : subst( ev(y_tilde),y,u_0);
--> u_4:if y < ev(y_bar) then 0 else new; Lambda_4:Lambda;
--> Lambda:Lambda_0*10;
--> new : subst( ev(y_tilde),y,u_0);
--> u_5:if y < ev(y_bar) then 0 else new; Lambda_5:Lambda;

```

Tracés, à la fois sur l'écran et dans un fichier EPS des profils de vitesse pour les différents Lambda choisis.

```

--> plot2d([u_0,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5],[y,0,1],[ylabel,"u_x"],[legend,
concat("Lambda crit. = ",float(Lambda_0)),float(Lambda_1),float(Lambda_2),
float(Lambda_3),float(Lambda_4),float(Lambda_5)]);

--> plot2d([u_0,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5],[y,0,1],[ylabel,"u_x"],[legend,
concat("Lambda_{ critique} = ",float(Lambda_0)),float(Lambda_1),
float(Lambda_2),float(Lambda_3),float(Lambda_4),float(Lambda_5)],
[gnuplot_term,ps],[gnuplot_out_file,concat("vitesses_eps=",epsilon,
"_alpha=",alpha,".eps")]);

```

# Annexe C

## Feuille de calcul MAXIMA : Lambda critique fonction de $(\varepsilon, \alpha)$

Dans cette annexe, nous présentons la feuille de calcul MAXIMA qui d'avoir le fichier contenant le  $\Lambda_{critique}$  en fonction de  $\varepsilon$  et de  $\alpha$ . Ce fichier nous permettra de tracer la figure figure 5.5.

**Feuille de calcul MAXIMA –  
Écoulement de Couette granulaire : Tracé de la carte du Lambda\_critique  
en fonction des paramètres  $(\varepsilon, \alpha)$**

'carte\_epsilon\_alpha' version MD/EC 26/10/2011 11h12

```
(%i1) kill(all);
```

```
(%o0) done
```

```
(%i1) fpprintprec : 10;
```

```
(%o1) 10
```

```
(%i2) ratprint : false;
```

```
(%o2) false
```

Paramètre adimensionnels

```
(%i3) Lambda = H/d;
```

```
(%o3)  $\Lambda = \frac{H}{d}$ 
```

```
(%i4) epsilon = rho*g*d/P0;
```

```
(%o4)  $\varepsilon = \frac{d g \rho}{P_0}$ 
```

```
(%i5) alpha = U/sqrt(P0/rho_s);
```

```
(%o5)  $\alpha = \frac{U}{\sqrt{\frac{P_0}{\rho_s}}}$ 
```

```
(%i6) phi = rho/rho_s;
```

$$(\%o6) \quad \phi = \frac{\rho}{\rho_s}$$

Système à résoudre avec les variables adimensionnées

$$(\%i7) \quad P(y) := 1 + \varepsilon \Lambda (1 - y);$$

$$(\%o7) \quad P(y) := 1 + \varepsilon \Lambda (1 - y)$$

$$(\%i8) \quad I(y) := \frac{\gamma \alpha}{\Lambda \sqrt{P(y)}};$$

$$(\%o8) \quad I(y) := \frac{\gamma \alpha}{\Lambda \sqrt{P(y)}}$$

$$(\%i9) \quad \text{assume}(\mu_2 > 0);$$

$$\text{assume}(\mu_s > 0);$$

$$(\%o9) \quad [\mu_2 > 0]$$

$$(\%o10) \quad [\mu_s > 0]$$

$$(\%i11) \quad \mu(I) := \mu_s + (\mu_2 - \mu_s) / (I_0 / I + 1);$$

$$(\%o11) \quad \mu(I) := \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{I_0}{I} + 1}$$

$$(\%i12) \quad 'diff('eta(u(y))*diff('u(y),y),y) = K;$$

$$(\%o12) \quad \frac{d}{dy} \left( \eta(u(y)) \left( \frac{d}{dy} u(y) \right) \right) = K$$

$$(\%i13) \quad K : 0;$$

$$(\%o13) \quad 0$$

$$(\%i14) \quad \eta(u) := \frac{\mu(I(y)) P(y)}{\gamma};$$

$$(\%o14) \quad \eta(u) := \frac{\mu(I(y)) P(y)}{\gamma}$$

$$(\%i15) \quad \tau(y) := K y + k_1;$$

$$(\%o15) \quad \tau(y) := K y + k_1$$

$$(\%i16) \quad \text{assume}(k_1 > 0);$$

$$(\%o16) \quad [k_1 > 0]$$

$$(\%i17) \quad \text{eq} : \gamma = \frac{k_1 \gamma}{(\varepsilon \Lambda (1 - y) + 1) \left( \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{\Lambda \sqrt{\varepsilon \Lambda (1 - y) + 1} I_0}{\alpha \gamma} + 1} + \mu_s \right)}$$

$$(\%o17) \quad \gamma = \frac{k_1 \gamma}{(\varepsilon \Lambda (1 - y) + 1) \left( \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{\Lambda \sqrt{\varepsilon \Lambda (1 - y) + 1} I_0}{\alpha \gamma} + 1} + \mu_s \right)}$$

$$(\%i18) \quad \text{solve}(\text{eq}, \gamma);$$

```

(%o18) [ $\gamma = -\frac{(\mu_s (-\varepsilon \Lambda^2 \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} - \Lambda \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1}) + \varepsilon \Lambda^2 \mu_s y \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} + k_1 \Lambda \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1}) I_0}{\alpha \varepsilon \Lambda \mu_2 y + (-\alpha \varepsilon \Lambda - \alpha) \mu_2 + \alpha k_1}$ ,  $\gamma =$ 
0]
(%i19) gamma : rhs(first(%));
(%o19) 
$$-\frac{(\mu_s (-\varepsilon \Lambda^2 \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} - \Lambda \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1}) + \varepsilon \Lambda^2 \mu_s y \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} + k_1 \Lambda \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1}) I_0}{\alpha \varepsilon \Lambda \mu_2 y + (-\alpha \varepsilon \Lambda - \alpha) \mu_2 + \alpha k_1}$$

(%i20) gamma : factor(gamma);
(%o20) 
$$-\frac{\Lambda \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} (\varepsilon \Lambda \mu_s y - \varepsilon \Lambda \mu_s - \mu_s + k_1) I_0}{\alpha (\varepsilon \Lambda \mu_2 y - \varepsilon \Lambda \mu_2 - \mu_2 + k_1)}$$

(%i21) u : integrate(gamma, y) + k2;
(%o21) 
$$2 \left( \frac{k_1^{\frac{3}{2}} (\mu_s - \mu_2) \log\left(\frac{2 \mu_2 \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} - 2 \sqrt{k_1} \sqrt{\mu_2}}{2 \mu_2 \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1} + 2 \sqrt{k_1} \sqrt{\mu_2}}\right) + \frac{\mu_2 \mu_s (-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1)^{\frac{3}{2}} + (3 k_1 \mu_s - 3 k_1 \mu_2) \sqrt{-\varepsilon \Lambda y + \varepsilon \Lambda + 1}}{3 \mu_2^2}}{2 \mu_2^{\frac{5}{2}}} \right) I_0 + k_2$$


```

Plus bas, pour trouver par itération la valeur de  $k_1$  à partir de la condition limite en  $y = 1$ , la valeur de départ doit satisfaire une contrainte pour que le l'argument du `log()` reste positif :  $k_1 < \mu_2$

Application numérique

```

(%i22) load("mnewton.mac");
(%o22) /usr/share/maxima/5.22.1/share/contrib/mnewton.mac
(%i23) phi:0.6;
(%o23) 0.6
(%i24) mu_s:0.381; mu_2:0.643; IO:0.279; d:0.5E-3; rho_s:2500; g:9.81; rho:rho_s*phi;
(%o24) 0.381
(%o25) 0.643
(%o26) 0.279

```

```
(%o27) 5.0 10-4
```

```
(%o28) 2500
```

```
(%o29) 9.81
```

```
(%o30) 1500.0
```

```
LX : log10 de X LY : log10 de Y
```

```

--> LX_min:0.25; LX_max:1.75; n_max:29;
--> LY_min:-1.75; LY_max:-0.25; m_max:29;
--> k1_init : mu_2-1.0e-6;
--> for m:0 step 1 thru m_max do (
  print("=== m ==="),print(m),
  LY:LY_min+m*(LY_max-LY_min)/m_max,
  Y:10^LY, alpha:Y^2, print(alpha),
  for n:0 step 1 thru n_max do (
    print("--- n ---"),print(n),
    LX:LX_min+n*(LX_max-LX_min)/n_max,
    X:10^LX, epsilon:1/X^2, print(epsilon),
    Lambda_d:0, Lambda_f : 3 * 2.2*sqrt(alpha/epsilon), pos:1,i:0,
    while abs(pos)>2e-5 and i<50 do (
      Lambda:(Lambda_d+Lambda_f)/2, i:i+1,
      k1:'k1, k2:'k2,
      eq1ev:subst(1,y,ev(u))=1, eq2ev:subst(0,y,ev(u))=0,
      k2:solve(eq2ev,k2), k2:rhs(k2[1]),
      k1:mnewton(ev(eq1ev),k1,k1_init), k1:k1[1], k1:rhs(k1[1]),
      pos:subst(0,y,ev(gamma)),
      if pos<0 then Lambda_f:Lambda else Lambda_d:Lambda
    ),
    print(Lambda),L[n,m]:float(Lambda) )
  );
--> arrayinfo(L);
--> listarray(L);
--> write_data( listarray(L), "Lambda_c.dat" );

```



# Annexe D

## Feuille de calcul MAXIMA : Poiseuille granulaire

Dans cette annexe, nous présentons la feuille de calcul MAXIMA qui de calculer les profils de vitesse dans une configuration Poiseuille. Ce fichier nous permettra de tracer la figure figure 5.7.

```
Feuille de calcul MAXIMA –  
Écoulement granulaire de type Poiseuille  
'poiseuille_granulaire_adim' version MD/EC 28/10/2011 10h12  
--> kill(all);  
(%o0) done  
--> fpprintprec : 10;  
(%o1) 10  
--> assume(mu2>0);assume(mus>0);assume(rho_s>0);  
    assume(P0>0);assume(rho>0);assume(H>0);  
(%o2) [ $\mu_2 > 0$ ]  
(%o3) [ $\mu_s > 0$ ]  
(%o4) [ $\rho_s > 0$ ]  
(%o5) [ $P_0 > 0$ ]  
(%o6) [ $\rho > 0$ ]  
(%o7) [ $H > 0$ ]  
--> assume(gamma>0);assume(I0>0);  
(%o8) [ $\gamma > 0$ ]  
(%o9) [ $I_0 > 0$ ]  
Paramètre adimensionnels  
--> Lambda = H/d;
```

```

(%o16)  $\Lambda = \frac{H}{d}$ 
--> beta = sqrt(-K*H)/sqrt(P0);
(%o30)  $\beta = \frac{\sqrt{H} \sqrt{-K}}{\sqrt{P_0}}$ 
--> phi = rho/rho_s;
(%o20)  $\phi = \frac{\rho}{\rho_s}$ 
Système à résoudre avec les variables adimensionnées
--> P(y) := 1;
(%o21) P(y) := 1
--> I(y) := gamma*beta/(Lambda*sqrt(P(y)));
(%o22)  $I(y) := \frac{\gamma \beta}{\Lambda \sqrt{P(y)}}$ 
--> \mu(I) := mus + (mu2-mus)/(I0/I+1);
(%o23)  $\mu(I) := \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{I_0}{I} + 1}$ 
--> 'diff('eta(u(y))*diff('u(y),y),y) = -beta^2;
(%o31)  $\left( \eta(u(y)) \left( u(y) \frac{d}{dy} \right) \right) \frac{d}{dy} = -\beta^2$ 
--> eta(y) := mu(I(y))*P(y)/gamma;
(%o32)  $\eta(y) := \frac{\mu(I(y)) P(y)}{\gamma}$ 
--> tau(y) := -beta^2*y+k1;
(%o33)  $\tau(y) := (-\beta^2) y + k_1$ 
--> assume(k1>0);
(%o34) [redundant]
--> eq: gamma = tau(y)/eta(y);
(%o36)  $\gamma = \frac{(k_1 - \beta^2 y) \gamma}{\frac{\mu_2 - \mu_s}{\beta \gamma} + \mu_s}$ 
--> solve(eq,gamma);
(%o37) [ $\gamma = -\frac{(\beta^2 \Lambda y + \Lambda \mu_s - k_1 \Lambda) I_0}{\beta^3 y + \beta \mu_2 - \beta k_1}, \gamma = 0$ ]
--> gamma:rhs(first(%));
(%o38)  $-\frac{(\beta^2 \Lambda y + \Lambda \mu_s - k_1 \Lambda) I_0}{\beta^3 y + \beta \mu_2 - \beta k_1}$ 
--> gamma:factor(gamma);
(%o39)  $-\frac{\Lambda (\beta^2 y + \mu_s - k_1) I_0}{\beta (\beta^2 y + \mu_2 - k_1)}$ 

```

```

--> eq1:subst(1/2,y,gamma)=0;
(%o40) 
$$-\frac{\Lambda\left(\mu_s - k_1 + \frac{\beta^2}{2}\right) I_0}{\beta\left(\mu_2 - k_1 + \frac{\beta^2}{2}\right)} = 0$$

--> solve(eq1,k1);
(%o41) 
$$[k_1 = \frac{2\mu_s + \beta^2}{2}]$$

--> k1:rhs(%[1]);
(%o42) 
$$\frac{2\mu_s + \beta^2}{2}$$

--> u : integrate(gamma,y)+k2;
(%o43) 
$$k_2 - \frac{\Lambda\left(\frac{(\mu_s - \mu_2)\log(\beta^2 y + \mu_2 - k_1)}{\beta^2} + y\right) I_0}{\beta}$$

--> eq2:subst(0,y,u)=0;
(%o44) 
$$k_2 - \frac{\Lambda\log(\mu_2 - k_1)(\mu_s - \mu_2) I_0}{\beta^3} = 0$$

--> solve(eq2,k2);
(%o45) 
$$[k_2 = \frac{(\Lambda\log(\mu_2 - k_1)\mu_s - \Lambda\mu_2\log(\mu_2 - k_1)) I_0}{\beta^3}]$$

--> k2:rhs(%[1]);
(%o46) 
$$\frac{(\Lambda\log(\mu_2 - k_1)\mu_s - \Lambda\mu_2\log(\mu_2 - k_1)) I_0}{\beta^3}$$

--> u:ev(ev(u));
(%o47) 
$$\frac{I_0\left(\Lambda\mu_s\log\left(\mu_2 - \frac{2\mu_s + \beta^2}{2}\right) - \Lambda\mu_2\log\left(\mu_2 - \frac{2\mu_s + \beta^2}{2}\right)\right)}{\beta^3} - \frac{I_0\Lambda\left(\frac{(\mu_s - \mu_2)\log\left(\beta^2 y - \frac{2\mu_s + \beta^2}{2} + \mu_2\right)}{\beta^2} + y\right)}{\beta}$$

--> u:logcontract(u);
(%o48) 
$$-\frac{\left(\Lambda\mu_2\log\left(-\frac{2\mu_s - 2\mu_2 + \beta^2}{2\beta^2 y - 2\mu_s + 2\mu_2 - \beta^2}\right) + \Lambda\mu_s\log\left(-\frac{2\beta^2 y - 2\mu_s + 2\mu_2 - \beta^2}{2\mu_s - 2\mu_2 + \beta^2}\right) + \beta^2\Lambda y\right) I_0}{\beta^3}$$

--> u_max:subst(1/2,y,u);

```

```

(%o49) - 
$$\frac{\left(\Lambda \mu_s \log\left(-\frac{2\mu_2-2\mu_s}{2\mu_s-2\mu_2+\beta^2}\right) + \Lambda \mu_2 \log\left(-\frac{2\mu_s-2\mu_2+\beta^2}{2\mu_2-2\mu_s}\right) + \frac{\beta^2\Lambda}{2}\right) I_0}{\beta^3}$$

--> ev(u_max);
(%o50) - 
$$\frac{\left(\Lambda \mu_s \log\left(-\frac{2\mu_2-2\mu_s}{2\mu_s-2\mu_2+\beta^2}\right) + \Lambda \mu_2 \log\left(-\frac{2\mu_s-2\mu_2+\beta^2}{2\mu_2-2\mu_s}\right) + \frac{\beta^2\Lambda}{2}\right) I_0}{\beta^3}$$

Application numérique
--> mus:0.381; mu2:0.643; IO:0.279;
(%o51) 0.381
(%o52) 0.643
(%o53) 0.279
--> Lambda:20; beta:0.72; phi:0.6;
(%o105) 20
(%o106) 0.72
(%o107) 0.6
beta maximum admissible 0.7238
La valeur théorique semble être :  $\sqrt{2(\mu_s - \mu_2)}$  0.7238
--> u_0:ev(ev(u));
(%o108) - 0.74749228  $\left(12.86 \log\left(\frac{0.0056}{1.0368y + 0.0056}\right) + 7.62 \log(178.5714286(1.0368y + 0.0056)) + 10.368y\right)$ 
--> u_0_max : ev(u_max);
(%o109) 13.90254878
--> a : -4*u_0_max; b : 4*u_0_max;
(%o110) - 55.61019513
(%o111) 55.61019513
--> u_0_parabole : a*y^2 + b*y;

```

```

(%o112) 55.61019513 y - 55.61019513 y^2
--> plot2d([u_0,u_0_parabole],[y,0,1/2],[legend,"granular","parabole réf."],[legend,concat(
"granulaire {/Symbol a} = ",float(beta)),concat("parabole {/Symbol a} = ",float(beta))]);
(%o113)
--> plot2d([u_0,u_0_parabole],[y,0,1/2],[ylabel,"u_x"],[legend,concat("granulaire {/Symbol a} =
",float(beta_0)),concat("parabole {/Symbol a} = ",float(beta_0))],[gnuplot_preamble,"set
key left top"],[style,[lines,2]],[gnuplot_term,ps],[gnuplot_ps_term_command,"set term
postscript enhanced color solid lw 1 'Times-Roman' 20"],[gnuplot_out_file,
concat("vitesses_beta=",beta_0,".eps")]);
(%o52)
--> beta:0.005;
(%o53) 0.005
--> u_1:ev(ev(u));beta_1:beta;
(%o54) - 2232000.0 (0.005 y + 76.2 log (1.908488 (5.0 10^-5 y + 0.523975)) + 128.6 log (
0.523975
5.0 10^-5 y + 0.523975))
(%o55) 0.005
--> u_0_max : ev(u_max);
(%o56) .1331149515
--> plot2d([u_0,u_1,u_0_parabole],[y,0,1/2],[ylabel,"u_x"],[legend,concat("granulaire {/Symbol a} = ",
float(beta_0)),concat("granulaire {/Symbol a} = ",float(beta_1)),concat("parabole {/Symbol a} =
",float(beta_0))],[gnuplot_preamble,"set key left top"],[style,[lines,2]], [gnuplot_term,ps],
[gnuplot_ps_term_command,"set term postscript enhanced color solid lw 1 'Times-Roman' 20"],
[gnuplot_out_file,"vitesses.eps"]);
(%o57)

```



# Table des figures

1	Mise en évidence de la répartition hétérogène des contraintes au sein d'un milieu granulaire (ici le milieu granulaire est cisailé dans une cellule de Couette annulaire) par une expérience de photoélasticité. Plus la couleur du grain est rouge, plus le grain est contraint. Au contraire, plus la couleur du grain est bleue, moins le grains est contraints. Figure extraite de (Howell, Behringer & Veje, 1999).	7
1.1	Les trois états de la matière granulaire : gazeux, solide et liquide. Figure extraite de (Jop, 2006).	12
1.2	Les six principales configurations d'écoulements granulaires : (a) cisaillement plan, (b) cisaillement de couette cylindrique, (c) silo vertical, (d) plan incliné, (e) écoulement sur un tas avec une alimentation ponctuelle, (f) tambour tournant. Figure extraite de (GDRMiDi, 2004)	15
2.1	Illustration d'un collision entre deux sphères dures $i$ et $j$ .	23
2.2	Illustration d'une collision entre deux sphères molles. Le chevauchement des sphères est noté $\delta$ .	30
2.3	Liste de Verlet : la particule $i$ est éventuellement en contact avec les particules situées à un rayon $r_v$ .	35
2.4	Illustration bidimensionnelle de la méthode des cellules. L'espace granulaire divisé en cellules virtuelles de côté $R_{cell}$ . La recherche des grains voisins s'effectue dans sa case et dans les cases voisines (8 à deux dimensions).	36
2.5	Illustration de la méthode liées sur un cas 2D.	38
3.1	Schéma d'un écoulement au sein d'un silo. À proximité des bords inférieurs et loin de l'orifice il existe des zones mortes où les grains sont statiques. En dehors de ces zones, les grains s'écoulent plus ou moins rapidement en fonction de leur distance à l'orifice.	44

3.2	Schémas de deux types de silos cylindriques : (a) base circulaire de rayons $R$ et (b) base rectangulaire de côtés $Lx$ et $Ly$ . La hauteur des grains est donnée par $h$ et le tenseur des contraintes par $\sigma_{ij}$ .	47
3.3	Contrainte verticale adimensionnée par $\rho g H$ en fonction de la hauteur d'écoulement adimensionnée par la hauteur de saturation : $H$ .	48
3.4	Masse pesée $M_{\text{pesee}}$ calculée en fonction de la masse versée $M_{\text{versee}}$ dans le modèle de Janssen. Les résultats des calculs sont remis à l'échelle par rapport à $M_{\text{sat}}$ (d'après (Ovarlez, 2002)).	49
3.5	Schéma du silo utilisé lors des simulations. La hauteur du parallélépipède rectangle est $Lz = 50d$ , sa largeur $Lx = 25d$ et sa profondeur $Ly = 25d$ . Les dimensions de l'orifice, $Ltx$ et $Lty$ sont comprises entre $4d$ et $18d$ .	53
3.6	Ordonnancement des particules à la hauteur $H_{\text{max}}$ dans le but d'éviter le chevauchement des grains.	55
3.7	(a) Évolution du débit en fonction de la hauteur des grains ainsi que les ajustements exponentiels correspondants. Lorsque la hauteur augmente, le débit sature vers une valeur qui dépend de la taille de l'orifice (ici $Ltx = Lty = 6d$ ). (b) Évolution du débit adimensionné par le débit obtenu pour des grandes hauteurs de grains ( $Q_0$ ) en fonction de la hauteur des grains ainsi que les ajustements exponentiels correspondants.	57
3.8	(a) Évolution du débit $Q$ en fonction de la taille de l'orifice pour différentes hauteurs de grains au sein du silo. Les ajustements des ces données par la loi de Beverloo sont également représentées. (b) Évolution de $Q^{2/5}$ en fonction de la taille de l'orifice montrant la pertinence de la loi de Beverloo.	59
3.9	Évolution du débit en fonction du coefficient de frottement pour une hauteur d'écoulement $H = 25,4d$ et une taille d'orifice $6d \times 6d$ . Le coefficient de restitution entre grains est maintenu constant ( $e_n = 0,885$ ).	60
3.10	Évolution du débit en fonction de la compacité mesurée au niveau de l'orifice pour une hauteur d'écoulement $H = 25,4d$ et une taille d'orifice $6d \times 6d$ . Ces données ont été obtenues en modifiant le coefficient de frottement entre grains, le coefficient de restitution restant constant : $e_n = 0,885$ . Les tirets représentent l'ajustement linéaire des données.	62



3.11 Évolution du débit en fonction du coefficient de restitution pour une hauteur d'écoulement  $H = 25,4d$  et une taille d'orifice  $6d \times 6d$ . Le coefficient de frottement entre grains est maintenu constant  $\mu = 0,5$  . . . . . 63

3.12 Évolution du débit en fonction de la compacité mesurée au niveau de l'orifice pour une hauteur d'écoulement  $H = 25,4d$  et une taille d'orifice  $6d \times 6d$ . Ces données ont été obtenues en modifiant le coefficient de restitution, le coefficient de frottement entre grains restant constant :  $\mu = 0,5$ . Les tirets représentent l'ajustement linéaire des données. L'insert regroupe les données obtenues en modifiant le coefficient de frottement, puis le coefficient de restitution. Ici aussi l'ajustement linéaire est satisfaisant. . . . . 64

3.13 (a) Profils de vitesse ( $v_z$ ) obtenus par simulation numérique (symboles) et par le modèle cinématique (lignes) à différentes hauteurs de  $z$ .  $\mu = 0,5$ ,  $e_n = 0,885$ ,  $Lx = Ly = 25d$ ,  $Ltx = Lty = 6d$  et  $H = 25,4d$ . Insert : évolution du paramètre  $b$  obtenu par l'ajustement des données numériques en fonction de  $z$ . (b) Mêmes données en échelle semi-logarithmique montrant la qualité de l'ajustement par le modèle cinématique. . . . . 66

3.14 Profils de des vitesse  $v_y$  en fonction de  $x$  obtenus par simulation numérique (symboles) à différents hauteurs de  $z$ . Les lignes représentent le modèle cinématique en utilisant comme paramètre  $b$  la valeur moyenne de la courbe  $b(z)$ . Le mauvais ajustement pour  $z = d/2$  montre la nécessité d'utiliser un coefficient  $b$  non constant. 67

3.15 Profils de vitesse obtenus par simulation numérique (symboles) et par le modèle cinématique (lignes) à la hauteur  $z = d/2$  pour différentes hauteurs de grains dans le silo.  $\mu = 0,5$ ,  $e_n = 0,885$ ,  $Lx = Ly = 25d$  et  $Ltx = Lty = 6d$ . L'insert représente l'évolution de  $b$  avec  $H$ . Nous observons une saturation du profil de vitesse pour  $H \geq 20d$ , ce qui est cohérent avec nos résultats sur les débits. 69

3.16 Profils de vitesse obtenus par simulation numérique (symboles) et par le modèle cinématique (lignes) à la hauteur  $z = d/2$  pour différents  $L_y$ .  $\mu = 0,5$ ,  $e_n = 0,885$ ,  $Lx = 25d$ ,  $Ltx = Lty = 6d$  et  $H = 25,4d$ . L'insert représente l'évolution du paramètre du modèle cinématique  $b$  en fonction de la largeur du silo  $L_y$ . . . . . 70

3.17	Profils de vitesse obtenus par simulation numérique (symboles) et par le modèle cinématique (lignes) à la hauteur $z = d/2$ pour différents coefficients de frottement $\mu$ . $e_n = 0,885$ , $Lx = Ly = 25d$ , $Ltx = Lty = 6d$ et $H = 25,4d$ . L'insert représente l'évolution du paramètre du modèle cinématique $b$ en fonction du coefficient de frottement. . . . .	72
3.18	Profils de vitesse obtenus par simulation numérique (symboles) et par le modèle cinématique (lignes) à la hauteur $z = d/2$ pour différents coefficients de restitution $e_n$ . $\mu = 0,5$ , $Lx = Ly = 25d$ , $Ltx = Lty = 6d$ et $H = 25,4d$ . L'insert représente l'évolution du paramètre du modèle cinématique en fonction du coefficient de restitution. . . . .	74
4.1	Cisaillement plan homogène. Figure extraite de (Jop, 2006) . . . .	78
4.2	Allure de la courbe du coefficient de friction $\mu(I)$ . Figure extraite de (Jop, 2006) . . . . .	80
4.3	Grilles croisées avec des cellules frontières. Les ronds pleins représentent les positions de calcul de $U$ , Les ronds creux représentent les positions de calcul de $V$ et les croix représentent les positions de calcul de $P$ . Le noir représente les inconnue à déterminer et le gris les points utilisés par les conditions aux limites. . . . .	86
4.4	Schéma 2D de la configuration utilisée lors des simulations. . . . .	87
4.5	Profils de vitesse obtenus pour un fluide newtonien à différents temps $t = 4s$ (a) et $t = 16s$ (b) et pour différent nombre de Reynolds. 89	89
4.6	(a) Profils de vitesse obtenus sur un granulaire (fluide non newtonien avec une viscosité effective) au temps $t = 8s$ pour différent $U_{max}$ , (b) Profils des viscosités effectives correspondants aux différents $U_{max}$ . Nous observons que le profil de vitesse s'aplatit de plus en plus pour des $U_{max}$ de plus en plus grand car la viscosité effective en son milieu devient de plus en plus constant. . . . .	91
5.1	Schéma de la configuration Couette 2D. $H$ représente la distance entre les deux plaques, $P_0$ la pression résultante d'une contrainte verticale sur la plaque supérieure et $U_0$ la vitesse de déplacement de la plaque supérieure. . . . .	95

5.2	Profils de vitesse obtenus en variant $\Lambda$ pour $\varepsilon = 0,05$ et $\alpha = 0,07$ . Pour $\Lambda = \Lambda_{critique}$ le cisaillement en $y^* = 0$ est nul. Pour $\Lambda > \Lambda_{critique}$ il existe une zone pour laquelle la vitesse est nulle. . . . .	99
5.3	Variation du $\Lambda_{critique}$ en fonction de $\alpha$ en échelle linéaire-linéaire (a) et en échelle log-log (b). Pour un $\varepsilon$ donné, $\Lambda$ est proportionnel à $\alpha^{\frac{1}{2}}$ . . . . .	100
5.4	Variation du $\Lambda_{critique}$ en fonction de $\varepsilon$ en échelle linéaire-linéaire (a) et en échelle log-log (b). Pour un $\alpha$ donné, $\Lambda$ est proportionnel à $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ . . . . .	102
5.5	Lignes d'isovaleur de $\Lambda_{critique} = 1, 2, 4, 8, 16$ (ligne en continue), comparaison avec la loi approchée (5.9) (tirets). La loi approchée ajuste bien les lignes d'isovaleur pour les faibles valeurs de $1/\varepsilon$ et $\alpha$ . La carte a été obtenue par un tracé d'isovaleurs d'une matrice de 30 par 30 points. . . . .	103
5.6	Configuration Poiseuille 2D. $H$ représente la distance entre les deux plaques et $U_{max}$ la vitesse maximale du profil de parabolique imposé en entrée. . . . .	107
5.7	Variation du profil de vitesse pour différent $\beta$ , $\Lambda = 20$ . Le profil tend à être parabolique (courbe noire) pour les $\beta \rightarrow 0$ . . . . .	109
5.8	Variation de $U_{max}$ en fonction de $\beta$ , $\Lambda = 20$ . Comportement similaire pour le granulaires et le Newtonien quand $\beta \rightarrow 0$ et divergence pour les $\beta$ important car $U_{max}$ reste linéaire pour le cas newtonien et $U_{max} \rightarrow \infty$ quand $\beta \rightarrow \sqrt{2(\mu_2 - \mu_s)}$ pour le cas granulaire. . .	110



# Bibliography

- Allen, M. & Tildesley, D. (1987). *Computer Simulation of Liquids*. Clarendon Press Oxford.
- Amarouchene, Y., Boudet, J. F. & Kellay, H. (2001). Dynamic sand dunes. *Phys. Rev. Lett.*, *86*, 4286–4289.
- Armfield, S. (1991). Finite difference solutions of the navier-stokes equations on staggered and non-staggered grids. *Computers Fluids*, *20(1)*, 1 – 17.
- Azanza, E., Chevoir, F. & Foucheront, P. (1999). Experimental study of collisional granular flows down an inclined plane. *Journal of Fluid Mechanics*, *400*, 199–227.
- Bertho, Y., Becco, C. & Vandewalle, N. (2006). Dense bubble flow in a silo : An unusual flow of a dispersed medium. *Phys. Rev. E*, *73*, 056309.
- Bertho, Y., Brunet, T., Giorgiutti-Dauphiné, F. & Hulin, J.-P. (2004). Influence of humidity on granular packings with moving walls. *EPL (Europhysics Letters)*, *67(6)*, 955.
- Bertho, Y., Giorgiutti-Dauphiné, F. & Hulin, J.-P. (2003). Dynamical janssen effect on granular packing with moving walls. *Phys. Rev. Lett.*, *90*, 144301.
- Beverloo, W., Leniger, H. & van de Velde, J. (1961). The flow of granular solids through orifices. *Chem. Eng. Science*, *15*, 206–269.
- Buckingham, E. (1914). On physically similar systems ; illustrations of the use of dimensional equations. *Phys. Rev.*, *4*, 345–376.
- Cheney, W. & Kincaid, D. (2008). *Numerical mathematics and computing*. THOMSON BROOKS/COLE.
- Choi, J., Kudrolli, A. & Bazant, M. Z. (2005). Velocity profile of granular flows inside silos and hoppers. *Journal of Physics : Condensed Matter*, *17(24)*, S2533.
- Choi, J., Kudrolli, A., Rosales, R. R. & Bazant, M. Z. (2004). Diffusion and mixing in gravity-driven dense granular flows. *Phys. Rev. Lett.*, *92*, 174301.

- Crassous, J., Metayer, J.-F., Richard, P. & Laroche, C. (2008). Experimental study of a creeping granular flow at very low velocity. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2008(03), P03009.
- da Cruz, F. (2004). *Écoulement des grains sec : Frottement et blocage*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et chaussées.
- da Cruz, F., Emam, S., Prochnow, M., Roux, J.-N. & Chevoir, F. m. c. (2005). Rheophysics of dense granular materials : Discrete simulation of plane shear flows. *Phys. Rev. E*, 72, 021309.
- Cundall, P. A. & Strack, O. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29, 47.
- D. Zhang, C. N. & Rozier, O. (2010). Morphodynamics of barchan and transverse dunes using a cellular automaton model. *Journal Geophysical Research*, 115, (p. F03041).
- Dippel, S. (1998). *Microscopic dynamics of granular materials*. PhD thesis, Forschungszentrum jülich.
- Dippel, S., Batrouni, G. G. & Wolf, D. E. (1996). Collision-induced friction in the motion of a single particle on a bumpy inclined line. *Phys. Rev. E*, 54, 6845–6856.
- Dippel, S., Batrouni, G. G. & Wolf, D. E. (1997). How transversal fluctuations affect the friction of a particle on a rough incline. *Phys. Rev. E*, 56, 3645–3656.
- Forterre, Y. & Pouliquen, O. (2003). Long-surface-wave instability in dense granular flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 486, 21–50.
- Frenkel, D. & Smit, B. (1996). *Understanding Molecular Simulation From Algorithms to Applications*. Academic press.
- GDRMiDi (2004). On dense granular flows. *The European Physical Journal E : Soft Matter and Biological Physics*, 14, 341–365. 10.1140/epje/i2003-10153-0.
- Goda, T. J. & Ebert, F. (2005). Three-dimensional discrete element simulations in hoppers and silos. *Powder Technology*, 158(1-3), 58 – 68. [jce :title](#);[Prof. Dr.-Ing. Otto Molerus 70th birthday](#);/ce :title; [jce :subtitle](#);[Congratulations to Prof. Dr.-Ing. Otto Molerus on the occasion of his 70th birthday on June 18th 2004](#);/ce :subtitle;.
- Goldhirsch, I. (2003). Rapid granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35, 267–293.

- Haff, P. K. & Werner, B. T. (1986). Computer simulation of the mechanical sorting of grains. *Powder technology*, *48(3)*, 239–245. eng.
- Hilton, J. E. & Cleary, P. W. (2011). Granular flow during hopper discharge. *Phys. Rev. E*, *84*, 011307.
- Howell, D., Behringer, R. P. & Veje, C. (1999). Stress fluctuations in a 2d granular couette experiment : A continuous transition. *Phys. Rev. Lett.*, *82*, 5241–5244.
- Iordanoff, I. & Khonsari, M. M. (2004). Granular lubrication : Toward an understanding of the transition between kinetic and quasi-fluid regime. *Journal of Tribology*, *126(1)*, 137–145.
- Jaeger, H. M., Nagel, S. R. & Behringer, R. P. (1996). Granular solids, liquids, and gases. *Rev. Mod. Phys.*, *68*, 1259–1273.
- Janda, A., Zuriguel, I., Garcimartín, A., Pagnaloni, L. A. & Maza, D. (2008). Jamming and critical outlet size in the discharge of a two-dimensional silo. *EPL (Europhysics Letters)*, *84(4)*, 44002.
- Janssen, H. A. & Vereines, Z. (1895). Versuche ueber getreidedruck in silozellen. *Dtsch. Ing.*, *39*, 1045–1049.
- Jean, M. (1999). The non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *177(3-4)*, 235 – 257.
- Jenkins, J. & Berzi, D. (2010). Dense inclined flows of inelastic spheres : tests of an extension of kinetic theory. *Granular Matter*, *12*, 151–158. 10.1007/s10035-010-0169-8.
- Jenkins, J. T. & Richman, M. W. (1985). Kinetic theory for plane flows of a dense gas of identical, rough, inelastic, circular disks. *Physics of Fluids*, *28(12)*, 3485–3494.
- Jenkins, J. T. & Richman, M. W. (1986). Boundary conditions for plane flows of smooth, nearly elastic, circular disks. *Journal of Fluid Mechanics*, *171*, 53–69.
- Jop, P. (2006). *Écoulements granulaire sur fond meuble*. PhD thesis, Université de Provence : École Polytechnique Universitaire Marseille.
- Jop, P., Forterre, Y. & Pouliquen, O. (2005). Crucial role of sidewalls in granular surface flows : consequences for the rheology. *Journal of Fluid Mechanics*, *541*, 167–192.
- Jop, P., Forterre, Y. & Pouliquen, O. (2006). A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, *441*, 727–730.

- Komatsu, T. S., Inagaki, S., Nakagawa, N. & Nasuno, S. (2001). Creep motion in a granular pile exhibiting steady surface flow. *Phys. Rev. Lett.*, *86*, 1757–1760.
- Lagrée, P.-Y., Staron, L. & Popinet, S. (2011). The granular column collapse as a continuum : validity of a two-dimensional navier-stokes model with a  $\mu(i)$ -rheology. *Journal of Fluid Mechanics*, *686*, 378–408.
- Landry, J. W., Grest, G. S., Silbert, L. E. & Plimpton, S. J. (2003). Confined granular packings : Structure, stress, and forces. *Phys. Rev. E*, *67*(4), 041303.
- Langtangen, H. P., Mardal, K.-A. & Winther, R. (2002). Numerical methods for incompressible viscous flow. *Advances in Water Resources*, *25*(8-12), 1125 – 1146.
- Mankoc, C., Garcimartín, A., Zuriguel, I., Maza, D. & Pugnali, L. A. (2009). Role of vibrations in the jamming and unjamming of grains discharging from a silo. *Phys. Rev. E*, *80*, 011309.
- Mankoc, C., Janda, A., Arévalo, R., Pastor, J., Zuriguel, I., Garcimartín, A. & Maza, D. (2007). The flow rate of granular materials through an orifice. *Granular Matter*, *9*, 407–414. 10.1007/s10035-007-0062-2.
- McNamara, S. & Young, W. R. (1996). Dynamics of a freely evolving, two-dimensional granular medium. *Phys. Rev. E*, *53*, 5089–5100.
- Moreau, J. J. (1993). New computation methods in granular dynamics. In *Powders & Grains 93* (p. 227). Rotterdam : Balkema.
- Moreau, J. J. (1994). Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials. *European journal of mechanics. A. Solids*, *13*(2), 93–114. eng.
- Mueth, D. M., Jaeger, H. M. & Nagel, S. R. (1998). Force distribution in a granular medium. *Phys. Rev. E*, *57*, 3164–3169.
- Müller, D. (1996). *Techniques informatiques efficaces pour la simulation de milieux granulaires par des méthodes d ' éléments distincts*. PhD thesis, lausanne.
- Nedderman, R. & Tüzün, U. (1979). A kinematic model for the flow of granular materials. *Powder Technology*, *22*(2), 243 – 253.
- Nougier, J.-P. (2001a). *Méthodes de calcul numérique 1 - Systèmes d'équations*. Hermès science.
- Nougier, J.-P. (2001b). *Méthodes de calcul numérique 2 - Fonctions, équations aux dérivées*. Hermès science.



- Ovarlez, G. (2002). *Statique et rhéologie d'un milieu granulaire confiné*. PhD thesis, Université Paris XI U.F.R Scientifique d'orsay.
- Pica Ciamarra, M., Pastore, R., Nicodemi, M. & Coniglio, A. (2011). Jamming phase diagram for frictional particles. *Phys. Rev. E*, *84*, 041308.
- Pouliquen, O. (1999a). On the shape of granular fronts down rough inclined planes. *Physics of Fluids*, *11*, 1956.
- Pouliquen, O. (1999b). Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Physics of Fluids*, *11*, 542.
- Pouliquen, O. (2004). Velocity correlations in dense granular flows. *Phys. Rev. Lett.*, *93*, 248001.
- Prado, C. P. C. & Olami, Z. (1992). Inertia and break of self-organized criticality in sandpile cellular-automata models. *Phys. Rev. A*, *45*, 665–669.
- Prochnow, M. (2002). *Ecoulements dense de grains secs*. PhD thesis, Ecole nationale des ponts et chaussées.
- Quarteroni, A., Sacco, R. & Saleri, F. (2000). *Numerical Mathematics*. Springer.
- Radjai, F. (1995). *Dynamique des rotations frottement collectif dans les systèmes granulaires*. PhD thesis, Université de Paris-Sud.
- Radjai, F., Jean, M., Moreau, J.-J. & Roux, S. (1996). Force distributions in dense two-dimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, *77*, 274–277.
- Rajchenbach, J. (2003). Dense, rapid flows of inelastic grains under gravity. *Phys. Rev. Lett.*, *90*(14), 144302.
- Richard, P., Valance, A., Métayer, J.-F., Sanchez, P., Crassous, J., Louge, M. & Delannay, R. (2008). Rheology of confined granular flows : Scale invariance, glass transition, and friction weakening. *Phys. Rev. Lett.*, *101*, 248002.
- Ristow, G. H. (1992). Simulating granular flow with molecular dynamics. *J. Phys. I France*, *2*(5), 649–662.
- Romero-Rochín, V., Lomnitz-Adler, J., Morales-Gamboa, E. & Peralta-Fabi, R. (1995). Avalanches in a cellular automaton. *Phys. Rev. E*, *51*, 3968–3976.
- Rycroft, C. H., Orpe, A. V. & Kudrolli, A. (2009). Physical test of a particle simulation model in a sheared granular system. *Phys. Rev. E*, *80*(3), 031305.
- Schafer, J., Dippel, S. & Wolf, D. E. (1996). Force schemes in simulation of granular materials. *J. Phys. I France*, *6*, 5–20.
- Seibold, B. (2008). A compact and fast matlab code solving the incompressible navier-stokes equation on rectangular domain.

- Silbert, L. E., Ertas, D., Grest, G. S., Halsey, T. C., Levine, D. & Plimpton, S. J. (2001). Granular flow down an inclined plane : Bagnold scaling and rheology. *Phys. Rev. E*, *64*(5), 051302.
- Sperl, M. (2006). Experiments on corn pressure in silo cells? translation and comment of janssen's paper from 1895. *Granular Matter*, *8*(2), 59–65.
- Staron, L. (2008). Mobility of long-runout rock flows : a discrete numerical investigation. *Geophys. J. Int.*, *172*, 455–463.
- Strang, G. (2007). *Computational Science and Engineering*. Wellesley-Cambridge Press, U.S.
- Taberlet, N., Richard, P., Henry, E. & Delannay, R. (2004). The growth of a super stable heap : An experimental and numerical study. *EPL (Europhysics Letters)*, *68*(4), 515–521.
- Taberlet, N., Richard, P., Jenkins, J. T. & Delannay, R. (2007). Density inversion in rapid granular flows : the supported regime. *The European Physical Journal E : Soft Matter and Biological Physics*, *22*(1).
- Taberlet, N., Richard, P. & John Hinch, E. (2006). s shape of a granular pile in a rotating drum. *Phys. Rev. E*, *73*(5), 050301.
- Taberlet, N., Richard, P., Valance, A., Losert, W., Pasini, J. M., Jenkins, J. T. & Delannay, R. (2003). Superstable granular heap in a thin channel. *Phys. Rev. Lett.*, *91*, 264301.
- To, K., Lai, P.-Y. & Pak, H. K. (2001). Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper. *Phys. Rev. Lett.*, *86*, 71–74.
- Vaschy, A. (1892). Sur les lois de similitude en physique. *Annales Télégraphiques*, *19*, 25–28.
- Verlet, L. (1967). Computer "experiments" on classical fluids. i. thermodynamical properties of lennard-jones molecules. *Phys. Rev.*, *159*, 98–103.
- Verlet, L. (1968). Computer "experiments" on classical fluids. ii. equilibrium correlation functions. *Phys. Rev.*, *165*, 201–214.
- Walton, O. R. (1983). *Particle-dynamics calculations of shear flow in : Mechanics of Granular media*. Jenkins, J. T. and Satake M.
- Weeks, E. R. & Weitz, D. A. (2002). Properties of cage rearrangements observed near the colloidal glass transition. *Phys. Rev. Lett.*, *89*, 095704.
- Wolf, D. E. (1996). *Modelling and computer simulation of granular media*. Wolf, D. E.

- Yanagita, T. (1999). Three-dimensional cellular automaton model of segregation of granular materials in a rotating cylinder. *Phys. Rev. Lett.*, *82*, 3488–3491.
- Zhu, H. P. & Yu, A. B. (2005). Steady-state granular flow in a 3d cylindrical hopper with flat bottom : macroscopic analysis. *Granular Matter*, *7*, 97–107. 10.1007/s10035-004-0191-9.
- Zuriguel, I., Garcimartín, A., Maza, D., Pugnaloni, L. A. & Pastor, J. M. (2005). Jamming during the discharge of granular matter from a silo. *Phys. Rev. E*, *71*, 051303.
- Zuriguel, I., Pugnaloni, L. A., Garcimartín, A. & Maza, D. (2003). Jamming during the discharge of grains from a silo described as a percolating transition. *Phys. Rev. E*, *68*, 030301.



## Résumé

De par leurs applications industrielles et géophysiques, les écoulements de matériaux granulaires ont une place prépondérante dans notre environnement. Cette thèse a pour objet l'étude de ces écoulements par simulation numérique de type "éléments discrets" (où les grains sont traités de manière explicite) et de type "milieu continu" (où le matériau se comporte comme un milieu effectif obéissant à une rhéologie donnée). Nous avons tout d'abord étudié par la méthode "éléments discrets" des écoulements granulaires en silo. En modifiant les propriétés micromécaniques des grains (restitution et de frottement) nous avons montré qu'elles avaient une influence significative sur le débit de vidange. Une étude fine du comportement des grains a montré que cette influence incombaît à une variation de compacité au niveau de l'orifice de sortie, les vitesses des grains étant très peu modifiées. Bien que les modélisations de type "éléments discrets" permettent d'accéder à toutes les propriétés individuelles des grains, elles ont un inconvénient majeur : le temps de calcul est très important ce qui proscrit la modélisation de situations géophysiques ou industrielles. Afin de pallier ce défaut, nous avons utilisé l'approche "milieu continu" en considérant que le milieu granulaire étudié obéissait à une rhéologie récemment proposée dans la littérature. Après avoir discuté son implémentation numérique, nous avons étudié de façon semi-analytique cette rhéologie pour des écoulements stationnaires et établis et cela dans deux configurations : une cellule de cisaillement et un chenal. Cela nous a permis de mettre en évidence les différences entre un milieu granulaire et un fluide newtonien.

## Abstract

Because of their industrial and geophysical applications, granular flows have a prominent place in our environment. In this thesis, we study these flows by numerical simulation of type "discrete elements" (where the grains are treated explicitly) and of type "continuous medium" (where the granular material behaves as an effective medium obeying a given rheology). We first studied the granular flows by the "discrete elements" method in silo geometries. By changing the micro-mechanical properties of the grains (restitution and friction) we showed that they had a significant influence on the flow discharge. A detailed study of the behavior of grains has shown that this influence comes from a variation of the packing fraction at the outlet of the silo, the grains velocity experiencing very little change. Although models such as "discrete elements" provide access to all the individual properties of the grains, they have one major drawback : the computation time is very important that prohibits the modeling of geophysical and industrial situations. To overcome this problem, we used the "continuous medium" approach, which consider that the granular medium studied follows a rheology recently proposed in the literature. After discussing the numerical implementation, we have studied this rheology for steady and fully developed flows with a semi-analytical method in two configurations : a shear cell and a channel. This allowed us to highlight the differences between a granular medium and a Newtonian fluid.