Pertinence de marches aléatoires classiques

pour l'étude des transformations complètement positives

Dimitri Petritis

Institut de recherche mathématique de Rennes
Université de Rennes 1 et CNRS (UMR 6625)

Cergy, 5 décembre 2013

Variables aléatoires I

- **Espace mesurable abstrait** $(\Omega, \mathcal{F})$.
- **Espace mesurable concret** $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$.
- **V.a. à valeurs dans** $\mathbb{X}$ application $(\mathcal{F}, \mathcal{X})$-mesurable $X : \Omega \to \mathbb{X}$.
- **Mesure de probabilité** $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{F})$.

Remarque

$\mathbb{P}$ n'intervient pas directement dans définition de X. Induit cependant **loi** de X :

$$\mathcal{X} \ni A \mapsto \mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}).$$

Remarque

Important dans définition de X : espace concret $\mathbb{X}$, pas espace abstrait Ω.

$$\mathbb{X} = \{0, 1\}, \mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathbb{X}), \mathbb{P}_X = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1).$$

Question primordiale : Comment joue-t-on au « pile ou face » ?

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Réponse du mathématicien

- D'après Kolmogorov : il existe
  - un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et
  - une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{X}$,

  tels que $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}) = 1/2$.
- Il est même capable de vous donner des exemples explicites d'espaces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de variables X !
- On peut jouer au « pile ou face » mais comment joue-t-on vraiment ?

Réponse de l'informaticien

- On appelle indéfiniment générateur de nombres aléatoires (U_n) (uniformément distribués sur $[0,1]$). On construit la suite

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{si } U_n < 1/2 \\ 1 & \text{si } U_n \geq 1/2. \end{cases}$$

  (X_n) est une suite i.i.d. de « pile ou face » honnêtes.
- Exemple d'un « bon » générateur de nombre aléatoires :
  - Choisir entier N_0 arbitraire entre 1 et m, où $m = 2^{31} - 1$.
  - Construire, pour $n \geq 0$, récurrence $N_{n+1} = 16807 N_n \mod m$.
  - Retourner $U_n = N_n / m$.
  - (U_n) est la suite des uniformes sur $[0,1]$ de l'informaticien.
- Mais comment joue-t-on vraiment au « pile ou face » ?

Réponse du physicien (classique) I

- Pièce de monnaie = corps solide $\Rightarrow$ suit équations de Newton.
- Sol approximativement plastique $\Rightarrow$ pièce s'immobilise.
- $\Omega = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2)$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$.
- Pièce lancée avec condition initiale distribuée selon $\mathbb{P}$ à « petit support », suit flot newtonien.
- $T = \inf\{t > 0 : Z_t = 0, \mathbf{V}_t = 0, \mathbf{M}_t = 0\}$.
- $$X = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{N}_T \cdot \mathbf{e}_3 \leq 0 \\ 1 & \text{si } \mathbf{N}_T \cdot \mathbf{e}_3 > 0. \end{cases}$$
- Donc aléa classique = réductible.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Réponse du physicien (classique) II

[Diaconis, Holmes, Montgomery, Dynamical bias in the coin toss, SIAM Review 2007.]

Mais comment joue-t-on vraiment au « pile ou face » ?

Réponse de Kolmogorov

Définition

$\mathbb{B} = \{0, 1\}$, $\mathbb{B}^* = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{B}^n$, $\mathcal{T}$ machines de Turing, $K : \mathcal{T} \to \mathbb{B}^*$ leur codage en binaire. **Complexité de Kolmogorov** de $\beta \in \mathbb{B}^*$:

$$C(\beta) := \inf\{|K(t)\alpha| : t \in \mathcal{T}, t \text{ sur entrée } \alpha \text{ s'arrête donnant } \beta\}.$$

Suite β est dite **aléatoire**, si

$$C(\beta) = \mathcal{O}(|\beta|).$$

Corollaire

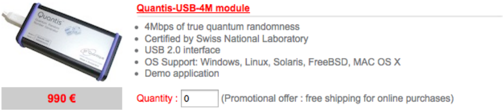
Il n'existe

- *ni d'algorithme informatique*
- *ni de système physique (classique) fini*

permettant de jouer au « pile ou face ». ***Réductibilité de l'aléa classique.***

Systèmes quantiques

- On joue au « pile ou face » à l'aide d'un GQVNA.



- Systèmes classiques = cas particulier des systèmes quantiques.
- Aucune expérience n'a mis la mécanique quantique en défaut.
- 1/3 de l'économie mondiale basée sur phénomènes quantiques.
- Théorie riche et intéressante mais fortement contre-intuitive.
- Localité, contextualité, irréductibilité de l'aléa quantique, perturbation irréversible de l'état par la mesure, certains états purs ont des marginales non extrémales, etc.
- Plusieurs tentatives de faire rentrer MQ dans cadre probabiliste classique (variables cachées).

Inégalités de Bell

Si variables cachées $\Rightarrow$ théorie de Kolmogorov valide.

Proposition (Inégalité de Bell à quatre variables)

X_1, X_2, Y_1, Y_2 quadruplet arbitraire de v.a. à valeurs dans $\{0, 1\}$. Alors

$$\mathbb{P}(X_1 = Y_1) \leq \mathbb{P}(X_1 = Y_2) + \mathbb{P}(X_2 = Y_2) + \mathbb{P}(X_2 = Y_1).$$

Démonstration.

Les v.a. étant à valeurs dans $\{0, 1\}$, suffisant de vérifier sur les 16 réalisations possibles du quadruplet $(X_1(\omega), X_2(\omega), Y_1(\omega), Y_2(\omega))$ que

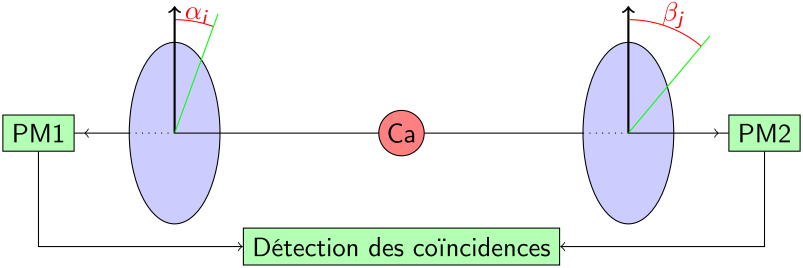
$$\{X_1 = Y_1\} \subseteq \{[X_1 = Y_2] \vee [X_2 = Y_2] \vee [X_2 = Y_1]\}.$$

$\square$

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

L'expérience d'Orsay

[Aspect, Dalibard, Roger. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers, Phys. Rev. Lett., 49 : 1804–1807 (1982).]



Expérience admet explication quantique mais pas classique.
Établit impossibilité de description classique de l'aléa quantique sans violation de localité.

Réfutation expérimentale
de l'hypothèse de variables cachées

- $X_\alpha := 1 \Leftrightarrow \{$photon gauche traverse si polariseur orienté $\alpha\}$.
- $Y_\beta := 1 \Leftrightarrow \{$photon droit traverse si polariseur orienté $\beta\}$.
- Fait expérimental : $\mathbb{P}(X_\alpha = Y_\beta) = \sin^2(\alpha - \beta)$.
- Inégalités de Bell :

$$\mathbb{P}(X_{\alpha_1} = Y_{\beta_1}) \leq \mathbb{P}(X_{\alpha_1} = Y_{\beta_2}) + \mathbb{P}(X_{\alpha_2} = Y_{\beta_1}) + \mathbb{P}(X_{\alpha_2} = Y_{\beta_2}).$$

- En choisissant $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/3$, $\beta_1 = \pi/2$ et $\beta_2 = \pi/6$:

$$\sin^2(\pi/2) \leq \sin^2(-\pi/6) + \sin^2(-\pi/6) + \sin^2(\pi/6);$$

autrement dit $\Rightarrow 1 \leq 1/4 + 1/4 + 1/4$.

Mesure physique . . .

. . . vue comme modèle statistique abstrait

Postulat

- *Soient* **S** *un ensemble abstrait d'***états** *et* **O** *un ensemble abstrait d'***observables***.*
- *Pour toute observable $M \in$* **O** *il existe un ensemble*[a] $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$ *de* ***valeurs*** *possibles de M.*
- ***Mesurer*** *M dans état ρ signifie déterminer mesure de probabilité $\pi := \pi_M^\rho$ sur $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$.*

a. $\mathbb{X}$ peut être non-dénombrable ; pour cet exposé, $\mathbb{X}$ dénombrable (fini or infini).

Remarque

À M et ρ fixés, pour toute valeur possible $x \in \mathbb{X}$ de l'observable,

$\pi_M^\rho(x) = \mathbb{P}(\text{observable } M \text{ prend valeur } x \text{ tandis que système dans état } \rho)$.

Rappel sur noyaux stochastiques I

Définition

$(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ espaces mesurables. Application

$$K : \Omega \times \mathcal{X} \to [0, 1]$$

est un **noyau stochastique** de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ si

- $\forall \omega \in \Omega, K(\omega, \cdot)$ probabilité sur $\mathcal{X}$ et
- $\forall A \in \mathcal{X}, K(\cdot, A)$ fonction mesurable.

Rappel sur noyaux stochastiques II

- $K(\omega, \cdot)$ probabilité ; définit foncteur contravariant $b\mathcal{X} \ni f \mapsto Kf \in b\mathcal{F}$ par
$$Kf(\omega) := \int_{\mathbb{X}} K(\omega, dx) f(x).$$
- $K(\cdot, A)$ fonction mesurable (bornée) ; définit foncteur covariant $\mathcal{M}_1(\mathcal{F}) \ni \mu \mapsto \mu K \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ par
$$\mu K(A) := \int_{\Omega} \mu(d\omega) K(\omega, A).$$

$$\begin{tikzcd}
b\mathcal{F} & b\mathcal{X} \arrow[l, "\boldsymbol{b}(\boldsymbol{K}) := \boldsymbol{K}"'] \\
(\Omega, \mathcal{F}) \arrow[u, "\boldsymbol{b}"] \arrow[r, "\boldsymbol{K}"] \arrow[d, "\mathcal{M}_1"'] & (\mathbb{X}, \mathcal{X}) \arrow[u, "\boldsymbol{b}"'] \arrow[d, "\mathcal{M}_1"] \\
\mathcal{M}_1(\mathcal{F}) \arrow[r, "\mathcal{M}_1(\boldsymbol{K}) := \boldsymbol{K}"] & \mathcal{M}_1(\mathcal{X}).
\end{tikzcd}$$

Parier avec un dé classique I

- dé montre face $\omega \in \Omega := \{1, 2, \dots, 6\}$.
- Gain net du parieur déterminé par v.a.

$$X(\omega) = [(\omega - 1 \mod 3) - 1] \in \mathbb{X} := \{-1, 0, 1\}.$$

- Deux manières de représenter information véhiculée par X :
  - comme vecteur 6-dimensionnel V,
  - comme **matrice 6×3 stochastique déterministe** $K(\omega, x) := K(\omega, \{x\})$:

$$V := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Parier avec un dé classique II

Observable X équivalente à la famille $M = (M_x)_{x \in \mathbb{X}}$ d'observables élementaires

$$M_x(\omega) := K(\omega, x) = \mathbb{1}_x(X(\omega)) = \mathbb{1}_{X^{-1}(\{x\})}(\omega) = \delta_{X(\omega)}(\{x\}).$$

$$M_{-1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; M_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; M_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Remarque

- $\forall x \in \mathbb{X}, \omega \in \Omega$, $M_x(\omega) \geq 0$ et $M_x^2(\omega) = M_x(\omega)$. (i.e. M_x projections).
- $\sum_{x \in \mathbb{X}} M_x = 1$. ($(M_x)_{x \in \mathbb{X}}$ résolution de l'identité).
- $X = \sum_{x \in \mathbb{X}} M_x x$. (« Décomposition spectrale » de X).

Définition

Mesure physique ci-dessus appelée **franche**.

Parier avec un dé classique III

- **États**

  $$\mathbf{S} \simeq \mathrm{PV} := \{\rho \in \mathbb{R}_+^{\mathrm{card}\Omega} : \sum_{\omega\in\Omega} \rho(\omega) = 1\} \simeq \mathcal{M}_1(\Omega) = \{\sum_{\omega\in\Omega} \rho(\omega)\delta_\omega, \rho \in \mathrm{PV}\}.$$

  $\mathbf{S}$ convexe ; $\mathbf{S}_p := \mathrm{Extr}\,\mathbf{S} \simeq \{\delta_\omega, \omega \in \Omega\} \simeq \{\rho \in \mathrm{PV} : \exists\omega_0, \rho(\omega_0) = 1\}$.

- **Mesure physique** détermine probabilité $\pi_M^\rho \in \mathcal{M}_1(\mathbb{X})$ par

  $$\begin{aligned} \pi_M^\rho(x) &= \rho(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = \sum_{\omega\in X^{-1}(\{x\})} \rho(\omega) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} \rho(\omega) M_x(\omega) = \langle \rho, M_x \rangle. \end{aligned}$$

- Mesure avec filtrage = probabilité conditionnelle :

  $$\rho_x(\omega) := \frac{M_x \rho M_x}{\langle \rho, M_x \rangle}(\omega) = \mathbb{P}(\text{le dé montre face } \omega | X = x).$$

Parier avec un dé classique IV

- Exemple de 2 **préparations** différentes du système « dé » :

$$\rho_1 = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}); \ \rho_2 = (\frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

- Probabilités correspondantes dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{X})$:

$$\pi_M^{\rho_1} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}); \ \pi_M^{\rho_2} = (\frac{5}{32}, \frac{9}{32}, \frac{18}{32}).$$

- Espérance de gain $\mathbb{E}_\rho(X) = \sum_{x \in \mathbb{X}} \pi_M^\rho(x) x$:

$$\mathbb{E}_{\rho_1}(X) = 0; \ \mathbb{E}_{\rho_2}(X) = -\frac{5}{32} + \frac{18}{32} = \frac{13}{32}.$$

Parier stochastiquement avec un dé classique I

Gain net du parieur (observable) $\leftrightarrow K$, mais maintenant K **matrice stochastique non-déterminisite**, ex.

$$K = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} ; \; M_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Remarque

$$V(\omega) = \mathbb{E}(X | \text{dé montre face } \omega).$$

Parier stochastiquement avec un dé classique II

Remarque

- $\forall x \in \mathbb{X}$, $\omega \in \Omega$, $M_x(\omega) \geq 0$ mais $M_x^2(\omega) \leq M_x(\omega)$. (i.e. M_x ne sont pas de projections).
- $\sum_{x\in\mathbb{X}} M_x = 1$. ($(M_x)_{x\in\mathbb{X}}$ résolution de l'identité).
- $\pi_M^\rho(x) = \langle \rho, M_x \rangle = \sum_{\omega\in\Omega} \rho(\omega) M_x(\omega)$. (Mais (M_x) ne fournissent pas décomposition spectrale de X).
- Mais espérance de gain dans état ρ exprimé par $\mathbb{E}_\rho X = \sum_{x\in\mathbb{X}} \pi_M^\rho(x) x$.

Définition

Famille $M = (M_x)$ avec M_x variables ≥ 0 mais non nécessairement des projections appelée **mesure floue ou probabiliste**.

Parier stochastiquement avec un dé classique III

Avec ρ_1 and ρ_2 précédents :

$$\pi_M^{\rho_1} = \rho_1 K = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3});$$

$$\pi_M^{\rho_2} = \rho_2 K = (\frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = (\frac{38}{160}, \frac{45}{160}, \frac{77}{160}).$$

$$\mathbb{E}_{\rho_1}(X) = 0; \mathbb{E}_{\rho_2}(X) = \frac{39}{160}.$$

Mesures quantiques de von Neumann (i.e. projectives) I

Observables opérateurs auto-adjoints sur $\mathbb{H}$. e.g. $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & -2 \end{pmatrix}$.

Élémentaire de calculer

Valeurs propres x	Vecteurs propres $\mathbf{u}_x$	Orthoprojections $M_x = \mid \mathbf{u}_x \rangle\langle \mathbf{u}_x \mid$
-3	$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{pmatrix}$
2	$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$

Vérifier

- $M_x \geq 0$ (donc auto-adjoints) et $M_x^2 = M_x$ (i.e. M_x orthoprojections).
- $\sum_{x \in \mathrm{spec}\, X} M_x = I_{\mathbb{H}}$ (résolution de l'identité).
- $X = \sum_{x \in \mathrm{spec}\, X} M_x x$ (décomposition spectrale).

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mesures quantiques de von Neumann (i.e. projectives) II

- **États** correspondent à des opérateurs densité :

$$\mathbf{S} = \{\rho : \rho \in \mathcal{B}(\mathbb{H}), \rho^* = \rho, \rho \geq 0, \mathrm{tr}(\rho) = 1\} = \mathcal{D}(\mathbb{H}).$$

  $\mathbf{S}$ convexe ; $\mathbf{S}_p := \mathrm{Extr}\,\mathbf{S} = \{\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{H}) : \rho^2 = \rho\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{H})$.

- **Mesure** $(M_x)_{x \in \mathrm{spec}\, X}$ dans état ρ détermine π_M^ρ sur $\mathbb{X} = \mathrm{spec}\, X$:

$$\pi_M^\rho(x) = \mathrm{tr}(\rho M_x) = \langle \rho, M_x \rangle.$$

- **Espérance** de X dans état ρ :

$$\mathbb{E}_\rho(X) = \sum_x \pi_M^\rho(x) x = \sum_x \mathrm{tr}(\rho M_x) x = \mathrm{tr}[\rho(\sum_x M_x x)] = \mathrm{tr}(\rho X) = \langle \rho, X \rangle.$$

- **Loi conditionnelle avec filtrage** à M_x dans état ρ :

$$\rho_x = \frac{M_x \rho M_x}{\langle \rho, M_x \rangle}$$ (très contre-intuitive malgré similitude avec classique) !

Mesures quantiques de von Neumann (i.e. projectives) III

Définition

- Résolution de l'identité en famille d'orthoprojections orthogonales $M = (M_x)_{x \in \mathbb{X}}$ est dite **mesure quantique franche**.
- À toute mesure franche correspond operateur auto-adjoint X admettant famille M comme décomposition spectrale $X = \sum_{x \in \mathbb{X}} M_x x$.

Remarque

Comme en classique,

$$X \leftrightarrow (M_x)_{x \in \mathbb{X}},$$

où maintenant $\mathbb{X} = \operatorname{spec} X$.

Mesures à valeurs operateurs positifs (MVOP)

Définition

- $M = (M_x)_{x \in \mathbb{X}}$ famille d'opérateurs auto-adjoints de $\mathcal{B}(\mathbb{H})$
  - formant résolution de l'identité (i.e. $\sum_{x \in \mathbb{X}} M_x = I_{\mathbb{H}}$)
  - en termes d'opérateurs [a] $M_x \geq 0$

  appelée **mesure floue** ou **MVOP**.
- Dans état $\rho \in \mathbf{S}$, mesure floue détermine probabilité π_M^ρ sur $\mathbb{X}$ par

$$\pi_M^\rho(x) = \mathrm{tr}(\rho M_x).$$

$\sum_{x \in \mathbb{X}} \pi_M^\rho(x) x$ correspond à l'**espérance** de l'observable M.

a. $B \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{spec}\, B \subseteq \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \forall \psi \in \mathbb{H}, \langle\, \psi \,|\, B\psi \,\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{B}(\mathbb{H}) : B = A^* A$.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Transformation de Kraus I

Remarque

Mesures franches $\subseteq$ des mesures floues $\subseteq$ des mesures floues généralisées (i.e. ne vérifiant pas $\sum_x M_x = I_{\mathbb{H}}$).

- $M_x \geq 0 \Leftrightarrow \exists A_x \in \mathcal{B}(\mathbb{H}) : M_x = A_x^* A_x$.
- $\pi_M^\rho(x) = \mathrm{tr}(\rho M_x) = \mathrm{tr}(\rho A_x^* A_x) = \mathrm{tr}(A_x \rho A_x^*)$.
- État conditionné à ce que observable prenne valeur x : $\rho_x = \phi_x(\rho) := \frac{A_x \rho A_x^*}{\mathrm{tr}(A_x \rho A_x^*)}$.
- État moyenné : $\Phi(\rho) = \sum_x \pi_M^\rho(x) \phi_x(\rho) = \sum_x A_x \rho A_x^*$.
- Second mesure dans état ρ_x. État conditionnel à valeur observée y : $\rho_{xy} = \frac{A_y \rho_x A_y^*}{\mathrm{tr}(A_y \rho_x A_y^*)} = \frac{A_y A_x \rho A_x^* A_y^*}{\mathrm{tr}(A_y A_x \rho A_x^* A_y^*)}$.
- État moyenné : $\Phi(\Phi(\rho)) = \Phi^{\circ 2}(\rho) = \sum_{x,y} A_y A_x \rho A_x^* A_y^*$.

Transformation de Kraus II

- Φ définie initialement sur $\mathcal{D}(\mathbb{H})$ peut-être étendue à $\mathcal{B}(\mathbb{H})$:

$$\mathcal{B}(\mathbb{H}) \ni T \mapsto \Phi(T) := \sum_{x \in \mathbb{X}} A_x T A_x^* \in \mathcal{B}(\mathbb{H}).$$

- $\Phi \geq 0$ signifie $T \geq 0 \Rightarrow \Phi(T) \geq 0$.
- Φ **complètement positive** (cp) signifie [1]

$$\mathrm{id}_k \otimes \Phi : \mathbb{M}_k \otimes \mathcal{B}(\mathbb{H}) \to \mathbb{M}_k \otimes \mathcal{B}(\mathbb{H}) \geq 0, \forall k \geq 1.$$

Théorème (de Kraus pour applications cp)

Si $\Phi : \mathcal{B}(\mathbb{H}) \to \mathcal{B}(\mathbb{H})$ est normale et cp, il existe famille $(A_x)_{x \in \mathbb{X}}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{H})$, t.q.

$$\Phi(T) := \sum_{x \in \mathbb{X}} A_x T A_x^*.$$

1. En dimension finie, Φ est cp ssi matrice de Choi C_k^Φ de Φ :

$$C_k^\Phi := \mathrm{id}_k \otimes \Phi(\sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ij}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes \Phi(E_{ij}) \geq 0, \forall k \geq 1.$$

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Transformations de Kraus III

Définition

- Famille (A_x) appelée famille **d'opérateurs de Kraus** de l'application cp Φ.
- $\mathcal{A} = \mathrm{vect}(A_x, A_x^*, x \in \mathbb{X})$.
  $\mathcal{A}' = \{T \in \mathcal{B}(\mathbb{H}) : [T, A_x] = [T, A_x^*] = 0, \forall x \in \mathbb{X}\}$.
- Φ **préserve l'identité** si $\sum_x A_x A_x^* = I_{\mathbb{H}}$.
- Φ **préserve la trace** si $\sum_x A_x^* A_x = I_{\mathbb{H}}$.
- préserve l'unité = **opération quantique** ou **Markovienne** ;
  préserve l'identité et la trace = **canal quantique**.
- **Frontière de Poisson** de Φ : $\mathrm{Fix}(\Phi) := \{T \in \mathcal{B}(\mathbb{H}) : \Phi(T) = T\}$.

Remarque

- $\Phi(T) = \sum_{x \in \mathbb{X}} A_x T A_x^*, \; M_x = A_x^* A_x$
- $\rho \in \mathbf{S}$. Définir $S_0 = \rho \in \mathbf{S}$, récursivement $S_{n+1} = \Phi(S_n)$.
- S_n converge-t-elle ? Si oui, en quel sens ? Quelle relation avec $\mathrm{Fix}(\Phi)$?

Intermède

pour mesures projectives

Commencer par état initial $S_0 \in \mathbf{S}$, répéter mesures projectives (P_x) pour obtenir suite d'états moyennés $S_1, S_2, \ldots$ après mesure.

- Classiquement (pour $\Omega \simeq \mathbb{X}$) (S_i) sont mesures de probabilité avec
  - $S_0 = \mathbb{P}$ et $S_1 = \sum_x \mathbb{P}(\cdot|X = x)\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\cdot)$,
  - Donc $\mathbb{P} = S_0 = S_1 = S_2 = \ldots$.
- Quantiquement S_i sont opérateurs densité avec
  - $S_0 = \rho$ et $\rho' = \sum_x P_x \rho P_x$ (diagonale i.e. probabilité classique exprimée comme matrice densité) et $S_n = S_1, n \geq 1$.
  - Donc $S_0 = \rho$ et $\rho' = S_1 = S_2 = \ldots$
- Inintéressant tant classiquement que quantiquement.

Intermède

pour mesures floues

- Classiquement
  - $S_0 = \mathbb{P}$ et $S_1 = \sum_x \mathbb{P} M_x(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot)$,
  - Donc $\mathbb{P} = S_0 = S_1 = S_2 = \dots$ (inintéressant).
- Quantiquement S_i sont opérateurs densité avec
  - $S_0 = \rho$ et $S_1 = \sum_x A_x \rho A_x^*$ (ρ et A_x ne commutent pas !)
  - Donc $S_n = \sum_{x_1,\dots,x_n} A_{x_n} \cdots A_{x_1} \rho A_{x_1}^* \cdots A_{x_n}^*$.

Transformation de Kraus IV

- En écrivant $\Phi(\rho) = \sum_x \pi^\rho_M(x)\phi_x(\rho)$,
- on observe que (S_n) est une chaîne de Markov classique sur $\mathbf{S}$:

$$P(\rho, B) := \mathbb{P}(S_{n+1} \in B | S_n = \rho) = \sum_x \pi^\rho_M(x)\delta_{\phi_{\mathbf{x}}(\rho)}(B).$$

- Introduire chaîne de Markov augmentée $Z_n := (S_n, X_n) \in \mathbf{S} \times \mathbb{X}$.

$$Q((\rho, x), B \times J) := \mathbb{P}(Z_{n+1} \in B \times J | Z_n = (\rho, x)) = \sum_{y \in \mathbb{X}} \pi^\rho_M(B)\delta_{\phi_{\mathbf{y}}(\rho)}(B)\delta_y(J).$$

(X_n) est une **chaîne de Markov cachée** :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | Z_n = (\rho, x)) = \pi^\rho_M(y).$$

Résultats I

La suite (S_n) ne converge pas en général. Cependant.

Théorème

Soit $\tau_n^{(m)} = \mathrm{tr}(S_n^m) \in [0,1]$, *avec* $m \geq 2$. *Pour* $m \geq 2$ *fixé, la suite* $\tau_n^{(m)}$ *est une sousmartingale uniformément bornée. Il existe v.a.* $\tau^{(m)}$ *à valeurs dans* $[0,1]$ *t.q.*

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n^{(m)} \overset{p.s.,L^1}{=} \tau^{(m)}.$$

Remarque

$\mathbb{P}_\rho(\tau^{(m)} = 1) = 1 \Leftrightarrow$ **purification** asymptotique de l'état initial ρ. Sinon suite (S_n) non purifiante.

Dimension finie : Maassen-Kümmerer (2006).

Dimension infinie : thèse de Jacques-Bunrith Lim (2011) tel-0063763.

Résultats II

Théorème (ergodique)

Il existe v.a. $S \in Fix(\Phi) \subset \mathbf{S}$ *t.q.*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} S_n \overset{w^* ot}{=} S \ p.s.$$

Monoïdes et marches aléatoires

Structure combinatoire algébrique

- Alphabet $\mathbb{A} = \{E, N, W, S\}$; $\mathbb{A}^* = \cup_{n=0}^{\infty} \mathbb{A}^n$, où

$$\mathbb{A}^0 = \{()\}, \ \mathbb{A}^n = \{w = (w_1, \ldots, w_n), w_i \in \mathbb{A}\}, n \in \mathbb{N}.$$

- $(\mathbb{A}^*, \circ)$ où $w \circ u$ concaténation des mots w est u un monoïde combinatoire.

Exemple : $e = ()$, $u = NWSWE$, $v = ESEEN$

$$e \circ u = u = u \circ e,$$

$$e \circ v = v = v \circ u,$$

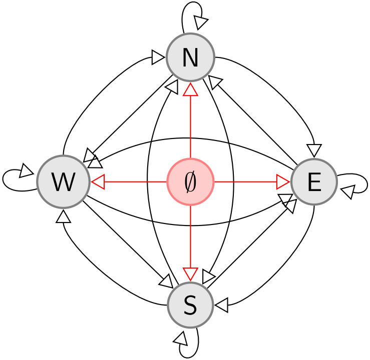
$$u \circ v = NWSWE|ESEEN,$$

$$v \circ u = ESEEN|NWSWE.$$

The complete graphs $\mathbb{K}_{\mathbb{A}}$ and $\hat{\mathbb{K}}_{\mathbb{A}}$

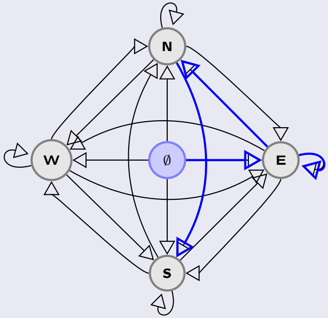
$$\mathbb{A} = \{E, N, W, S\}.$$

$\mathbb{K}_{\mathbb{A}}$
$\hat{\mathbb{K}}_{\mathbb{A}}$ $=$

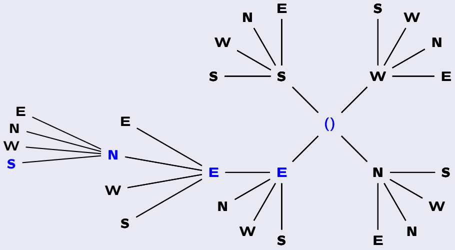


Path space tree generated by a finite automaton $\mathbb{K}_{\mathbb{A}}$

A path on $\hat{\mathbb{K}}_{\mathbb{A}}$



The path on PS($\hat{\mathbb{K}}_{\mathbb{A}}$)



The path on $\mathbb{A}^*$

()EENS

Monoïdes et marches aléatoires

Structure probabiliste

ν probabilité supportée par $\mathbb{A}$.

$$P(\alpha, \beta) = \mathbb{P}(X_{n+1} = \beta | X_n = \alpha) = \begin{cases} \nu(a), & \text{if } \beta = \alpha a \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Représentation de S_n en termes des marches aléatoires

- Poser $\mathbb{A} = \mathbb{X}$ (considérer uniquement cas fini).
- $\xi \in \mathbb{X}^* \Rightarrow \exists n \geq 0 : \xi \in \mathbb{X}^{\boldsymbol{n}}$.
- $\mathbb{X}^{\boldsymbol{n}} = \{(x_{\boldsymbol{1}}, \ldots, x_{\boldsymbol{n}}) : x_i \in \mathbb{X}\}$.
- Pour $\xi = (x_{\boldsymbol{1}}, \ldots, x_{\boldsymbol{n}})$, définir
  - $A^*_\xi = A^*_{x_{\boldsymbol{1}}} \cdots A^*_{x_{\boldsymbol{n}}}$ et $A_\xi = A_{x_{\boldsymbol{n}}} \cdots A_{x_{\boldsymbol{1}}}$.
  - $\phi_{\xi\restriction_{\boldsymbol{n-1}}}(\rho) = \phi_{x_{\boldsymbol{n-1}}} \circ \cdots \circ \phi_{x_{\boldsymbol{1}}}(\rho)$.

Théorème

Soient $\rho \in \mathbf{S}$ et $S_{\boldsymbol{n}} = \Phi^{\circ \boldsymbol{n}}(\rho)$. Alors

- $\forall n \geq 1, S_{\boldsymbol{n}} = \sum_{\xi \in \mathbb{X}^{\boldsymbol{n}}} A_\xi \rho A^*_\xi$.
- $\mathbb{P}((X_{\boldsymbol{1}}, \ldots, X_{\boldsymbol{n}}) = \xi) = \pi_{\boldsymbol{M}}^{\phi_{\xi\restriction_{\boldsymbol{n-1}}}(\rho)}(x_{\boldsymbol{n}})$.

Remarque

Processus $(S_{\boldsymbol{n}})$ déterminé uniquement par trajectoire combinatoire ξ ; $(X_{\boldsymbol{n}})$ par marche aléatoire dynamique sur $\mathbb{X}^*$ avec probabilité de transition $\phi_{\xi_{|\xi|-\boldsymbol{1}}}(\rho)$.

Généralisation aux semi-groupoïdes

Graphes dirigés

Example

- Graphe dirigé : $\mathbb{G} = (\mathbb{G}^0, \mathbb{G}^1, s, t)$ avec $\mathbb{G}^0$ et $\mathbb{G}^1$ ensembles dénombrables (finis ou infinis) de sommets (trajectoires de longueur 0) et d'arêtes (trajectoires de longueur 1) et $s, t : \mathbb{G}^1 \to \mathbb{G}^0$ les applications source et terminus.
- Pour $n \geq 2$ définir

$$\mathbb{G}^n = \{\alpha = \alpha_n \ldots \alpha_1, \alpha_i \in \mathbb{G}^1, s(\alpha_{i+1}) = t(\alpha_i)\} \subseteq (\mathbb{G}^1)^n,$$

et $\mathrm{PS}(\mathbb{G}) = \cup_{n\geq 0}\mathbb{G}^n$ l'espace des trajectoires de $\mathbb{G}$. s, t s'étendent trivialement sur $\mathrm{PS}(\mathbb{G})$.
- En définissant $\Gamma = \mathrm{PS}(\mathbb{G})$, $\Gamma^2 = \{(\beta, \alpha) \in \Gamma \times \Gamma : s(\beta) = t(\alpha)\}$ et $\cdot : \Gamma^2 \to \mathbb{G}$ la concaténation admissible gauche, $(\Gamma, \Gamma^2, \cdot)$ est un semigroupoïde avec unités $\mathbb{G}^0$.

Représentation hilbertienne de PS($\mathbb{G}$)

- Graphe dirigé localement fini : $\mathbb{G} = (\mathbb{G}^0, \mathbb{G}^1, s, t)$ (donc PS($\mathbb{G}$)),
- Mots de PS($\mathbb{G}$) non libres $\Rightarrow$ contextualité.
- Espace de Fock : $\mathbb{H}_{\mathbb{G}} = \ell^2(\mathrm{PS}(\mathbb{G}))$, avec $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{PS}(\mathbb{G})}$ b.o.n.
- Pour $\beta \in \mathrm{PS}(\mathbb{G})$, $a \in \mathbb{G}^1$ et $v \in \mathbb{G}^0$, définir

$$\begin{aligned} L_a | \psi_\beta \rangle &= \begin{cases} | \psi_{a\beta} \rangle & s(a) = t(\beta), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ L_v | \psi_\beta \rangle &= \begin{cases} | \psi_{v\beta} \rangle = | \psi_\beta \rangle & v = t(\beta), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

- **Algèbre semigroupoïdale gauche libre :**

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{G}} = \overline{\mathrm{Alg}}^{\mathrm{wot}} \{L_v, L_a, v \in \mathbb{G}^0, a \in \mathbb{G}^1\}.$$

Représentation de PS($\mathbb{G}$)

- Pour $a \in \mathbb{G}^1$, et $v \in \mathbb{G}^0$,

$$L_a = \sum_{\beta \in t^{-1}(s(a))} |\,\psi_{a\beta}\,\rangle\langle\,\psi_\beta\,|, \quad L_v = \sum_{\beta \in t^{-1}(v)} |\,\psi_\beta\,\rangle\langle\,\psi_\beta\,|.$$

- L_v est auto-adjoint, positif, $L_v^* L_v = L_v^2 = L_v$ (projection).
- L_a^* est un opérateur d'annihilation ; $L_a^* L_a = L_{s(a)}$.
- L_a est une isométrie partielle.
- $L_a L_a^* = \sum_{\beta \in t^{-1}(s(a))} |\,\psi_{a\beta}\,\rangle\langle\,\psi_{a\beta}\,|$, donc $\sum_{a \in t^{-1}(v)} L_a L_a^* = L_v$.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

C^*-algèbre de Cuntz-Krieger de $\mathbb{G}$

- Soient $\{R_a, a \in \mathbb{G}^1\}$ isométries partielles et $\{P_v, v \in \mathbb{G}^0\}$ projections t.q. :

$$\begin{aligned}
u, v \in \mathbb{G}^0, u \neq v &\Rightarrow P_u P_v = 0,\\
a, b \in \mathbb{G}^1, a \neq b &\Rightarrow R_a^* R_b = 0,\\
a \in \mathbb{G}^1 &\Rightarrow R_a^* R_a = P_{s(a)},\\
a \in \mathbb{G}^1 &\Rightarrow R_a R_a^* \leq P_{t(a)},\\
v \in \mathbb{G}^0, |t^{-1}(v)| \neq 0, \infty &\Rightarrow \sum_{a \in t^{-1}(v)} R_a R_a^* = P_v.
\end{aligned}$$

- Alors il existe C^*-algèbre universelle de $\mathbb{G}$, $C^*(\mathbb{G})$, l'algèbre de Cuntz-Krieger.

  [Cuntz-Krieger (1980), Raeburn-Szymański (2004)].

- For $\alpha \in \mathrm{PS}(\mathbb{G})$, $|\alpha| \geq 1$, $R_\alpha = R_{\alpha_{|\alpha|}} \cdots R_{\alpha_1}$.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Causalité quantique

[Markopoulou-Smolin (1997), Kribs-Markopoulou (2005), Malyshev (2001).]

Soit $\mathbb{G} = (\mathbb{G}^0, \mathbb{G}^1, s, t)$ **acyclique** et $u, v \in \mathbb{G}^0$.

- Ordre partiel induit :

$$[u \prec v] \Leftrightarrow [\exists \alpha \in \mathrm{PS}(\mathbb{G}) : s(\alpha) = u, t(\alpha) = v],$$

- **Structure causale quantique :**
  - À tout $v \in \mathbb{G}^0$ associer $\mathbb{H}_v$ fini-dimensionnel.
  - If $u \not\prec v$ and $v \not\prec u$, alors $u \sim v$ (u et v sont non-reliés causalement) ; espace de Hilbert conjoint $\mathbb{H}_u \otimes \mathbb{H}_v$.
  - $\forall a \in \mathbb{G}^1$, il existe canal quantique $\Phi_a : \mathbb{M}_{s(a)} \to \mathbb{M}_{t(a)}$, où $\mathbb{M}_v$ l'algèbre des matrices agissant sur $\mathbb{H}_x$.
  - Ensemble parallèle : $\xi \subset \mathbb{G}^0$ t.q. $\forall u, v \in \xi \Rightarrow u \sim v$. Algèbre des matrices $\mathbb{M}_\xi = \otimes_{v \in \xi} \mathbb{M}_v$ agit sur $\mathbb{H}_\xi = \otimes_{v \in \xi} \mathbb{H}_v$.
  - Si ξ et ζ ensembles parallèles t.q. toute trajectories vers le futur de ξ intersecte ζ et toute trajectoire émanant du passé arrivant à ζ a nécessairement intersecté ξ, correspondent à l'évolution d'un système fermé : $U_{\xi,\zeta} : \mathbb{H}_\xi \to \mathbb{H}_\zeta$.