Files d'attente avec régénération aléatoire: un cas avec une région de récurrence nulle épaisse

Rennes, 3 octobre 2011

Travail en commun

Avec I. MacPhee, M. Menshikov, and S. Popov:
On a queueing network with a single server and varying regimes, I et II, Ann. Appl. Probab. (2007) et (2008).

Motivation

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marche aléatoire aux proches voisins sur $\mathbb{N}$: p à gauche, $1-p$ à droite, réflexion au point 0:

$$X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+,$$

avec $X_0 = x$ et (ξ_n) i.i.d.

$$\mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1 - \mathbb{P}(\xi_n = +1) = p.$$

- Temps de premier passage à 0.

$$\tau := \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}.$$

- Paramètre classifiant $h := \ln \frac{p}{1-p}$.

Motivation

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marche aléatoire aux proches voisins sur $\mathbb{N}$: p à gauche, $1-p$ à droite, réflexion au point 0:

$$X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+,$$

avec $X_0 = x$ et (ξ_n) i.i.d.

$$\mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1 - \mathbb{P}(\xi_n = +1) = p.$$

- Temps de premier passage à 0.

$$\tau := \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}.$$

- Paramètre classifiant $h := \ln \frac{p}{1-p}$.

Motivation

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marche aléatoire aux proches voisins sur $\mathbb{N}$: p à gauche, $1-p$ à droite, réflexion au point 0:
$$X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+,$$
avec $X_0 = x$ et (ξ_n) i.i.d.
$$\mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1 - \mathbb{P}(\xi_n = +1) = p.$$

- Temps de premier passage à 0.
$$\tau := \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}.$$

- Paramètre classifiant $h := \ln \frac{p}{1-p}$.

Comportement asymptotique (étude du type)

Exercice M2

- Récurrence positive:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1.]$$

- Transience:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.]$$

- Récurrence nulle $=$ non transience et non récurrence positive:

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive et de transience $=$ variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle $=$ variété de dimension 0.

Comportement asymptotique (étude du type)

Exercice M2

- Récurrence positive:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1.]$$

- Transience:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.]$$

- Récurrence nulle = non transience et non récurrence positive:

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive et de transience = variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle = variété de dimension 0.

Comportement asymptotique (étude du type)

Exercice M2

- Récurrence positive:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1.]$$

- Transience:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.]$$

- Récurrence nulle = non transience et non récurrence positive:

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive et de transience = variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle = variété de dimension 0.

Comportement asymptotique (étude du type)

Exercice M2

- Récurrence positive:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1.]$$

- Transience:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.]$$

- Récurrence nulle = non transience et non récurrence positive:

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive et de transience = variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle = variété de dimension 0.

Comportement asymptotique (étude du type)

Exercice M2

- Récurrence positive:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1.]$$

- Transience:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.]$$

- Récurrence nulle = non transience et non récurrence positive:

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive et de transience = variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle = variété de dimension 0.

Comportement asymptotique (étude du type)

Exercice M2

- Récurrence positive:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1.]$$

- Transience:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.]$$

- Récurrence nulle = non transience et non récurrence positive:

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive et de transience = variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle = variété de dimension 0.

Comportement asymptotique (étude du type)

Exercice M2

- Récurrence positive:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1.]$$

- Transience:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.]$$

- Récurrence nulle $=$ non transience et non récurrence positive:

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive et de transience $=$ variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle $=$ variété de dimension 0.

Comportement asymptotique (étude du type)

Exercice M2

- Récurrence positive:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1.]$$

- Transience:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.]$$

- Récurrence nulle = non transience et non récurrence positive:

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive et de transience = variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle = variété de dimension 0.

Comportement asymptotique (étude du type)

Exercice M2

- Récurrence positive:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1.]$$

- Transience:

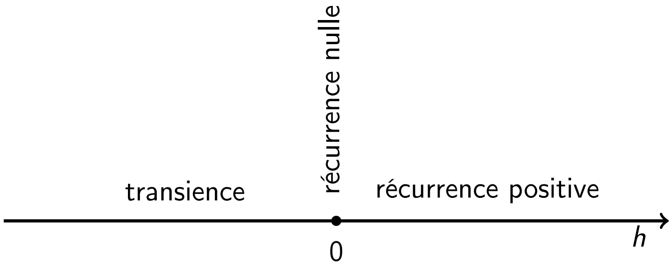
$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.]$$

- Récurrence nulle = non transience et non récurrence positive:

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive et de transience = variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle = variété de dimension 0.

Forme qualitative du diagramme des types



Grande robustesse aux perturbations aléatoires

- Environnement: $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $[0,1]$ (définies sur le même espace de probabilité avec les (ξ_n)); leur loi sans atomes aux bords 0, 1.

$$X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+.$$

- Information sur l'environnement: $\mathcal{E} = \sigma(p_x, x \in \mathbb{N})$.
- Information sur le passé: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$:

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = -1|\mathcal{F}_n) = 1 - \mathbb{P}(\xi_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) = p_{X_n}.$$

- Paramètre classifiant:

$$h := \mathbb{E}(\ln \frac{p_1}{1-p_1}).$$

Grande robustesse aux perturbations aléatoires

- Environnement: $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $[0,1]$ (définies sur le même espace de probabilité avec les (ξ_n)); leur loi sans atomes aux bords 0, 1.

$$X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+.$$

- Information sur l'environnement: $\mathcal{E} = \sigma(p_x, x \in \mathbb{N})$.
- Information sur le passé: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$:

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = -1 | \mathcal{F}_n) = 1 - \mathbb{P}(\xi_{n+1} = 1 | \mathcal{F}_n) = p_{X_n}.$$

- Paramètre classifiant:

$$h := \mathbb{E}(\ln \frac{p_1}{1-p_1}).$$

Grande robustesse aux perturbations aléatoires

- Environnement: $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $[0,1]$ (définies sur le même espace de probabilité avec les (ξ_n)); leur loi sans atomes aux bords 0, 1.

$$X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+.$$

- Information sur l'environnement: $\mathcal{E} = \sigma(p_x, x \in \mathbb{N})$.
- Information sur le passé: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$:

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = -1 | \mathcal{F}_n) = 1 - \mathbb{P}(\xi_{n+1} = 1 | \mathcal{F}_n) = p_{X_n}.$$

- Paramètre classifiant:

$$h := \mathbb{E}(\ln \frac{p_1}{1-p_1}).$$

Grande robustesse aux perturbations aléatoires

- Environnement: $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $[0,1]$ (définies sur le même espace de probabilité avec les (ξ_n)); leur loi sans atomes aux bords 0, 1.

$$X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+.$$

- Information sur l'environnement: $\mathcal{E} = \sigma(p_x, x \in \mathbb{N})$.
- Information sur le passé: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$:

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = -1|\mathcal{F}_n) = 1 - \mathbb{P}(\xi_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) = p_{X_n}.$$

- Paramètre classifiant:

$$h := \mathbb{E}(\ln \frac{p_1}{1-p_1}).$$

Comportement asymptotique en environnement aléatoire

Sinai (1982), Solomon (1975)

- Récurrence positive pour presque tout environment:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty|\mathcal{E}) = 1].$$

- Transience pour presque tout environment:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty].$$

- Récurrence nulle pour presque tout environment = non transience et non récurrence positive p.s.

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive (p.s.) et de transience (p.s.): variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle (p.s.): variété de dimension 0.

Comportement asymptotique en environnement aléatoire
Sinai (1982), Solomon (1975)

- Récurrence positive pour presque tout environment:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty|\mathcal{E}) = 1].$$

- Transience pour presque tout environment:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty].$$

- Récurrence nulle pour presque tout environment = non transience et non récurrence positive p.s.

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive (p.s.) et de transience (p.s.): variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle (p.s.): variété de dimension 0.

Comportement asymptotique en environnement aléatoire

Sinai (1982), Solomon (1975)

- Récurrence positive pour presque tout environment:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty|\mathcal{E}) = 1].$$

- Transience pour presque tout environment:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty].$$

- Récurrence nulle pour presque tout environment = non transience et non récurrence positive p.s.

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive (p.s.) et de transience (p.s.): variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle (p.s.): variété de dimension 0.

Comportement asymptotique en environnement aléatoire
Sinai (1982), Solomon (1975)

- Récurrence positive pour presque tout environment:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty|\mathcal{E}) = 1].$$

- Transience pour presque tout environment:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty].$$

- Récurrence nulle pour presque tout environment = non transience et non récurrence positive p.s.

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive (p.s.) et de transience (p.s.): variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle (p.s.): variété de dimension 0.

Comportement asymptotique en environnement aléatoire

Sinai (1982), Solomon (1975)

- Récurrence positive pour presque tout environment:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty|\mathcal{E}) = 1].$$

- Transience pour presque tout environment:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty].$$

- Récurrence nulle pour presque tout environment = non transience et non récurrence positive p.s.

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive (p.s.) et de transience (p.s.): variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle (p.s.): variété de dimension 0.

Comportement asymptotique en environnement aléatoire

Sinai (1982), Solomon (1975)

- Récurrence positive pour presque tout environment:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty|\mathcal{E}) = 1].$$

- Transience pour presque tout environment:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty].$$

- Récurrence nulle pour presque tout environment = non transience et non récurrence positive p.s.

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive (p.s.) et de transience (p.s.): variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle (p.s.): variété de dimension 0.

Comportement asymptotique en environnement aléatoire

Sinai (1982), Solomon (1975)

- Récurrence positive pour presque tout environment:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty|\mathcal{E}) = 1].$$

- Transience pour presque tout environment:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty].$$

- Récurrence nulle pour presque tout environment = non transience et non récurrence positive p.s.

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive (p.s.) et de transience (p.s.): variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle (p.s.): variété de dimension 0.

Comportement asymptotique en environnement aléatoire
Sinai (1982), Solomon (1975)

- Récurrence positive pour presque tout environment:

$$h > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) < \infty \quad [\Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau < \infty|\mathcal{E}) = 1].$$

- Transience pour presque tout environment:

$$h < 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) > 0 \quad [\Rightarrow \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty].$$

- Récurrence nulle pour presque tout environment $=$ non transience et non récurrence positive p.s.

$$h = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau = \infty|\mathcal{E}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}_x(\tau|\mathcal{E}) = \infty.$$

- Régions de récurrence positive (p.s.) et de transience (p.s.): variétés de dimension 1.
- Région critique de récurrence nulle (p.s.): variété de dimension 0.

Grande robustesse aux perturbations quasi-périodiques
Guillotin (1997)

Soient $f : \mathbb{T} \to [0,1], \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, s \in \mathbb{T}$. On définit

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \ni t &\mapsto Tt := t + \alpha \mod 1 \in \mathbb{T}, \\ p_x(s) &= f(T^x s), \quad x \in \mathbb{N} \\ h &= \int_{\mathbb{T}} \ln\left(\frac{f(t)}{1-f(t)}\right) \lambda(dt). \end{aligned}$$

Théorème (N. Guillotin, thèse UR1 (1997), pp 78–81.)

- *Récurrence positive:* $h > 0 \Rightarrow \forall_\lambda s, \mathbb{E}_x(\tau) < \infty$.
- *Transience:* $h < 0 \Rightarrow \forall_\lambda s, \mathbb{P}_x(\tau = \infty) > 0$.
- *Récurrence nulle:* $h = 0 \Rightarrow \forall_\lambda s, \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1$ *et* $\mathbb{E}_x(\tau) = \infty$.

Grande robustesse aux perturbations quasi-périodiques
Guillotin (1997)

Soient $f : \mathbb{T} \to [0,1], \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, s \in \mathbb{T}$. On définit

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \ni t &\mapsto Tt := t + \alpha \mod 1 \in \mathbb{T}, \\ p_x(s) &= f(T^x s), \quad x \in \mathbb{N} \\ h &= \int_{\mathbb{T}} \ln\left(\frac{f(t)}{1-f(t)}\right) \lambda(dt). \end{aligned}$$

Théorème (N. Guillotin, thèse UR1 (1997), pp 78–81.)

- *Récurrence positive:* $h > 0 \Rightarrow \forall_\lambda s, \mathbb{E}_x(\tau) < \infty$.
- *Transience:* $h < 0 \Rightarrow \forall_\lambda s, \mathbb{P}_x(\tau = \infty) > 0$.
- *Récurrence nulle:* $h = 0 \Rightarrow \forall_\lambda s, \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1$ *et* $\mathbb{E}_x(\tau) = \infty$.

Diagramme de phases en mécanique statistique

Même résultat pour les diagrammes de phase en mécanique statistique:

- Onsager (1944): modèle d'Ising en dimension 2 avec champ externe h.
- Pirogov et Sinai (1975) dans *Phase diagrams of classical lattice systems* généralisent le diagramme de phase de l'eau.
- Koukiou, P, Zahradník (1988) *Extension of the Pirogov-Sinai theory to a class of quasiperiodic interactions*.
- Cas d'interactions aléatoires à courte portée reste toujours ouvert.

Diagramme de phases en mécanique statistique

Même résultat pour les diagrammes de phase en mécanique statistique:

- Onsager (1944): modèle d'Ising en dimension 2 avec champ externe h.
- Pirogov et Sinai (1975) dans *Phase diagrams of classical lattice systems* généralisent le diagramme de phase de l'eau.
- Koukiou, P, Zahradník (1988) *Extension of the Pirogov-Sinai theory to a class of quasiperiodic interactions*.
- Cas d'interactions aléatoires à courte portée reste toujours ouvert.

Diagramme de phases en mécanique statistique

Même résultat pour les diagrammes de phase en mécanique statistique:

- Onsager (1944): modèle d'Ising en dimension 2 avec champ externe h.
- Pirogov et Sinai (1975) dans *Phase diagrams of classical lattice systems* généralisent le diagramme de phase de l'eau.
- Koukiou, P, Zahradník (1988) *Extension of the Pirogov-Sinai theory to a class of quasiperiodic interactions*.
- Cas d'interactions aléatoires à courte portée reste toujours ouvert.

Diagramme de phases en mécanique statistique

Même résultat pour les diagrammes de phase en mécanique statistique:

- Onsager (1944): modèle d'Ising en dimension 2 avec champ externe h.
- Pirogov et Sinai (1975) dans *Phase diagrams of classical lattice systems* généralisent le diagramme de phase de l'eau.
- Koukiou, P, Zahradník (1988) *Extension of the Pirogov-Sinai theory to a class of quasiperiodic interactions*.
- Cas d'interactions aléatoires à courte portée reste toujours ouvert.

Une file d'attente (en temps continu) avec régénération aléatoire

- **d Stations:** indexés par $\mathbb{Z}_d = \{0, \ldots, d-1\}$. Chaque station a sa propre file de capacité ∞.
- **Clients:** arrivent à la station $m \in \mathbb{Z}_d$ à des moments aléatoires distribués selon une loi expon(λ_m).
- **Serveur:** visite les stations par ordre cyclique; 0 temps de passage de station à station.
  - *Service:* exhaustif, par lots.
  - *Temps de service:* distribué selon une loi expon(μ).
  - *Clients servis:* soit quittent, soit re-dirigés vers file différente avec probabilité donnée.
  - *Probabilités de re-direction:* $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$.
  - *Paramètres de chaque lot:* $(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$ choisis aléatoirement au début de chaque lot.

Une file d'attente (en temps continu) avec régénération aléatoire

- **d Stations:** indexés par $\mathbb{Z}_d = \{0, \ldots, d-1\}$. Chaque station a sa propre file de capacité ∞.
- **Clients:** arrivent à la station $m \in \mathbb{Z}_d$ à des moments aléatoires distribués selon une loi expon(λ_m).
- **Serveur:** visite les stations par ordre cyclique; 0 temps de passage de station à station.
  - *Service:* exhaustif, par lots.
  - *Temps de service:* distribué selon une loi expon(μ).
  - *Clients servis:* soit quittent, soit re-dirigés vers file différente avec probabilité donnée.
  - *Probabilités de re-direction:* $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$.
  - *Paramètres de chaque lot:* $(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$ choisis aléatoirement au début de chaque lot.

Une file d'attente (en temps continu) avec régénération aléatoire

- **d Stations:** indexés par $\mathbb{Z}_d = \{0, \ldots, d-1\}$. Chaque station a sa propre file de capacité ∞.
- **Clients:** arrivent à la station $m \in \mathbb{Z}_d$ à des moments aléatoires distribués selon une loi expon(λ_m).
- **Serveur:** visite les stations par ordre cyclique; 0 temps de passage de station à station.
  - *Service:* exhaustif, par lots.
  - *Temps de service:* distribué selon une loi expon(μ).
  - *Clients servis:* soit quittent, soit re-dirigés vers file différente avec probabilité donnée.
  - *Probabilités de re-direction:* $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$.
  - *Paramètres de chaque lot:* $(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$ choisis aléatoirement au début de chaque lot.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Une file d'attente (en temps continu) avec régénération aléatoire

- **d Stations:** indexés par $\mathbb{Z}_d = \{0, \ldots, d-1\}$. Chaque station a sa propre file de capacité ∞.
- **Clients:** arrivent à la station $m \in \mathbb{Z}_d$ à des moments aléatoires distribués selon une loi expon(λ_m).
- **Serveur:** visite les stations par ordre cyclique; 0 temps de passage de station à station.
    - *Service:* exhaustif, par lots.
    - *Temps de service:* distribué selon une loi expon(μ).
    - *Clients servis:* soit quittent, soit re-dirigés vers file différente avec probabilité donnée.
    - *Probabilités de re-direction:* $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$.
    - *Paramètres de chaque lot:* $(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$ choisis aléatoirement au début de chaque lot.

Une file d'attente (en temps continu) avec régénération aléatoire

- **d Stations:** indexés par $\mathbb{Z}_d = \{0, \ldots, d-1\}$. Chaque station a sa propre file de capacité ∞.
- **Clients:** arrivent à la station $m \in \mathbb{Z}_d$ à des moments aléatoires distribués selon une loi expon(λ_m).
- **Serveur:** visite les stations par ordre cyclique; 0 temps de passage de station à station.
  - *Service:* exhaustif, par lots.
  - *Temps de service:* distribué selon une loi expon(μ).
  - *Clients servis:* soit quittent, soit re-dirigés vers file différente avec probabilité donnée.
  - *Probabilités de re-direction:* $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$.
  - *Paramètres de chaque lot:* $(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$ choisis aléatoirement au début de chaque lot.

Une file d'attente (en temps continu) avec régénération aléatoire

- **d Stations:** indexés par $\mathbb{Z}_d = \{0, \ldots, d-1\}$. Chaque station a sa propre file de capacité ∞.
- **Clients:** arrivent à la station $m \in \mathbb{Z}_d$ à des moments aléatoires distribués selon une loi expon(λ_m).
- **Serveur:** visite les stations par ordre cyclique; 0 temps de passage de station à station.
  - *Service:* exhaustif, par lots.
  - *Temps de service:* distribué selon une loi expon(μ).
  - *Clients servis:* soit quittent, soit re-dirigés vers file différente avec probabilité donnée.
  - *Probabilités de re-direction:* $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$.
  - *Paramètres de chaque lot:* $(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$ choisis aléatoirement au début de chaque lot.

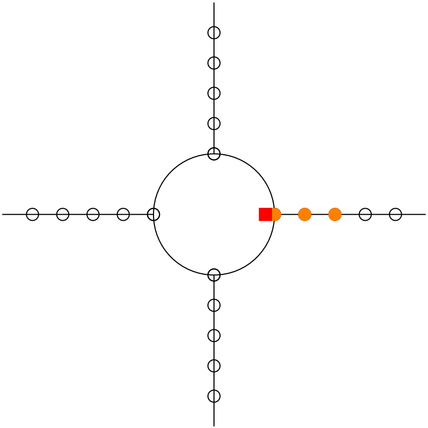
Une file d'attente (en temps continu) avec régénération aléatoire

- **d Stations:** indexés par $\mathbb{Z}_d = \{0, \ldots, d-1\}$. Chaque station a sa propre file de capacité ∞.
- **Clients:** arrivent à la station $m \in \mathbb{Z}_d$ à des moments aléatoires distribués selon une loi expon(λ_m).
- **Serveur:** visite les stations par ordre cyclique; 0 temps de passage de station à station.
  - *Service:* exhaustif, par lots.
  - *Temps de service:* distribué selon une loi expon(μ).
  - *Clients servis:* soit quittent, soit re-dirigés vers file différente avec probabilité donnée.
  - *Probabilités de re-direction:* $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$.
  - *Paramètres de chaque lot:* $(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$ choisis aléatoirement au début de chaque lot.

Une file d'attente (en temps continu) avec régénération aléatoire

- **d Stations:** indexés par $\mathbb{Z}_d = \{0, \ldots, d-1\}$. Chaque station a sa propre file de capacité ∞.
- **Clients:** arrivent à la station $m \in \mathbb{Z}_d$ à des moments aléatoires distribués selon une loi expon(λ_m).
- **Serveur:** visite les stations par ordre cyclique; 0 temps de passage de station à station.
  - *Service:* exhaustif, par lots.
  - *Temps de service:* distribué selon une loi expon(μ).
  - *Clients servis:* soit quittent, soit re-dirigés vers file différente avec probabilité donnée.
  - *Probabilités de re-direction:* $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$.
  - *Paramètres de chaque lot:* $(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1})$ choisis aléatoirement au début de chaque lot.

Le système files-serveur



La régénération aléatoire

Espace de configurations pour les paramètres des lots:

$$\mathbb{M} := \{(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1}) : \mu > 0, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

d probabilités: $(\nu_m)_{m \in \mathbb{Z}_d}$ on $\mathbb{M}$.

Régénération aléatoire: serveur arrive à station $m \in \mathbb{Z}_d$ et choisit réalisation $(\mu, \gamma) \sim \nu_m$.

Durant tout le lot en m**:**

- *Clients* servis avec temps $\sim \text{expon}(\mu)$.
- *Clients servis* re-dirigés à la file $[l + m]$ avec probabilité γ_l, for $l = 1, \ldots, d-1$, et quittent avec probabilité $1 - \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i$.
- Pour raisons techniques: place $\emptyset$ si pas de clients (état de repos).

La régénération aléatoire

Espace de configurations pour les paramètres des lots:

$$\mathbb{M} := \{(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1}) : \mu > 0, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

d probabilités: $(\nu_m)_{m \in \mathbb{Z}_d}$ on $\mathbb{M}$.

Régénération aléatoire: serveur arrive à station $m \in \mathbb{Z}_d$ et choisit réalisation $(\mu, \gamma) \sim \nu_m$.

Durant tout le lot en m:

- *Clients* servis avec temps $\sim$ expon(μ).
- *Clients servis* re-dirigés à la file $[l + m]$ avec probabilité γ_l, for $l = 1, \ldots, d-1$, et quittent avec probabilité $1 - \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i$.
- Pour raisons techniques: place $\emptyset$ si pas de clients (**état de repos**).

La régénération aléatoire

Espace de configurations pour les paramètres des lots:

$$\mathbb{M} := \{(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1}) : \mu > 0, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

d probabilités: $(\nu_m)_{m \in \mathbb{Z}_d}$ on $\mathbb{M}$.
Régénération aléatoire: serveur arrive à station $m \in \mathbb{Z}_d$ et choisit réalisation $(\mu, \gamma) \sim \nu_m$.
Durant tout le lot en m:

- *Clients* servis avec temps $\sim$ expon(μ).
- *Clients servis* re-dirigés à la file $[l + m]$ avec probabilité γ_l, for $l = 1, \ldots, d-1$, et quittent avec probabilité $1 - \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i$.
- Pour raisons techniques: place $\emptyset$ si pas de clients (état de repos).

La régénération aléatoire

Espace de configurations pour les paramètres des lots:

$$\mathbb{M} := \{(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1}) : \mu > 0, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

d probabilités: $(\nu_m)_{m \in \mathbb{Z}_d}$ on $\mathbb{M}$.

Régénération aléatoire: serveur arrive à station $m \in \mathbb{Z}_d$ et choisit réalisation $(\mu, \gamma) \sim \nu_m$.

Durant tout le lot en m:

- *Clients* servis avec temps $\sim$ expon(μ).
- *Clients servis* re-dirigés à la file $[l + m]$ avec probabilité γ_l, for $l = 1, \ldots, d-1$, et quittent avec probabilité $1 - \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i$.
- Pour raisons techniques: place $\emptyset$ si pas de clients (état de repos).

La régénération aléatoire

Espace de configurations pour les paramètres des lots:

$$\mathbb{M} := \{(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1}) : \mu > 0, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

d probabilités: $(\nu_m)_{m \in \mathbb{Z}_d}$ on $\mathbb{M}$.
Régénération aléatoire: serveur arrive à station $m \in \mathbb{Z}_d$ et choisit réalisation $(\mu, \gamma) \sim \nu_m$.
Durant tout le lot en m:

- *Clients* servis avec temps $\sim$ expon(μ).
- *Clients servis* re-dirigés à la file $[l + m]$ avec probabilité γ_l, for $l = 1, \ldots, d-1$, et quittent avec probabilité $1 - \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i$.
- Pour raisons techniques: place $\emptyset$ si pas de clients (**état de repos**).

La régénération aléatoire

Espace de configurations pour les paramètres des lots:

$$\mathbb{M} := \{(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1}) : \mu > 0, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

d probabilités: $(\nu_m)_{m \in \mathbb{Z}_d}$ on $\mathbb{M}$.
Régénération aléatoire: serveur arrive à station $m \in \mathbb{Z}_d$ et choisit réalisation $(\mu, \gamma) \sim \nu_m$.
Durant tout le lot en m**:**

- *Clients* servis avec temps $\sim$ expon(μ).
- *Clients servis* re-dirigés à la file $[l + m]$ avec probabilité γ_l, for $l = 1, \ldots, d-1$, et quittent avec probabilité $1 - \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i$.
- Pour raisons techniques: place $\emptyset$ si pas de clients (état de repos).

La régénération aléatoire

Espace de configurations pour les paramètres des lots:

$$\mathbb{M} := \{(\mu; \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1}) : \mu > 0, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

d probabilités: $(\nu_m)_{m \in \mathbb{Z}_d}$ on $\mathbb{M}$.
Régénération aléatoire: serveur arrive à station $m \in \mathbb{Z}_d$ et choisit réalisation $(\mu, \gamma) \sim \nu_m$.
Durant tout le lot en m**:**

- *Clients* servis avec temps $\sim$ expon(μ).
- *Clients servis* re-dirigés à la file $[l + m]$ avec probabilité γ_l, for $l = 1, \ldots, d-1$, et quittent avec probabilité $1 - \sum_{i=1}^{d-1} \gamma_i$.
- Pour raisons techniques: place $\emptyset$ si pas de clients (**état de repos**).

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Hypothèses

H1: Le serveur n'est jamais submergé: $\exists \epsilon_0 > 0 : \forall m \in \mathbb{Z}_d$,

$$\nu_m(\{(\mu, \gamma) : \mu \geq \lambda_m + \epsilon_0\}) = 1.$$

H2: Borne uniforme (peut être affaiblie): $\exists M_0 > 0 : \forall m \in \mathbb{Z}_d$,

$$\nu_m(\{(\mu, \gamma) : \mu \leq M_0\}) = 1.$$

Hypothèses

H1: Le serveur n'est jamais submergé: $\exists \epsilon_0 > 0 : \forall m \in \mathbb{Z}_d$,

$$\nu_m(\{(\mu, \gamma) : \mu \geq \lambda_m + \epsilon_0\}) = 1.$$

H2: Borne uniforme (peut être affaiblie): $\exists M_0 > 0 : \forall m \in \mathbb{Z}_d$,

$$\nu_m(\{(\mu, \gamma) : \mu \leq M_0\}) = 1.$$

Hypothèses (suite)

- Définir pour tout $m \in \mathbb{Z}_d$:

$$A^{(m)} := \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{[m+1]}+\gamma_1\mu}{\mu-\lambda_m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda_{[m+2]}+\gamma_2\mu}{\mu-\lambda_m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\lambda_{[m+d-1]}+\gamma_{d-1}\mu}{\mu-\lambda_m} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(d-1)}(\mathbb{R}_+).$$

- Étant donnée que $(\mu, \gamma) \sim \nu_m$ de manière indépendante, les $A^{(m)}$ indépendantes pour des m différents.
- Définir $A := A^{(d-1)} \cdots A^{(0)}$; loi de A totalement déterminé par probabilités $(\nu_m)_{m \in \mathbb{Z}_d}$ et paramètres $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1})$.

H3: La matrice A vraiment aléatoire. (Il n'existe pas $B \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R}_+)$ déterministe: $A = B$ p.s.)

Hypothèses (suite)

- Définir pour tout $m \in \mathbb{Z}_d$:

$$A^{(m)} := \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{[m+1]}+\gamma_1\mu}{\mu-\lambda_m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda_{[m+2]}+\gamma_2\mu}{\mu-\lambda_m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\lambda_{[m+d-1]}+\gamma_{d-1}\mu}{\mu-\lambda_m} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(d-1)}(\mathbb{R}_+).$$

- Étant donnée que $(\mu, \gamma) \sim \nu_m$ de manière indépendante, les $A^{(m)}$ indépendantes pour des m différents.
- Définir $A := A^{(d-1)} \cdots A^{(0)}$; loi de A totalement déterminé par probabilités $(\nu_m)_{m \in \mathbb{Z}_d}$ et paramètres $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1})$.

H3: La matrice A vraiment aléatoire. (Il n'existe pas $B \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R}_+)$ déterministe: $A = B$ p.s.)

Hypothèses (suite)

- Définir pour tout $m \in \mathbb{Z}_d$:

$$A^{(m)} := \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{[m+1]}+\gamma_1\mu}{\mu-\lambda_m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda_{[m+2]}+\gamma_2\mu}{\mu-\lambda_m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\lambda_{[m+d-1]}+\gamma_{d-1}\mu}{\mu-\lambda_m} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(d-1)}(\mathbb{R}_+).$$

- Étant donnée que $(\mu, \gamma) \sim \nu_m$ de manière indépendante, les $A^{(m)}$ indépendantes pour des m différents.
- Définir $A := A^{(d-1)} \cdots A^{(0)}$; loi de A totalement déterminé par probabilités $(\nu_m)_{m\in\mathbb{Z}_d}$ et paramètres $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1})$.

H3: La matrice A vraiment aléatoire. (Il n'existe pas $B \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R}_+)$ déterministe: $A = B$ p.s.)

Hypothèses (suite)

- Définir pour tout $m \in \mathbb{Z}_d$:

$$A^{(m)} := \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{[m+1]}+\gamma_1\mu}{\mu-\lambda_m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda_{[m+2]}+\gamma_2\mu}{\mu-\lambda_m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\lambda_{[m+d-1]}+\gamma_{d-1}\mu}{\mu-\lambda_m} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(d-1)}(\mathbb{R}_+).$$

- Étant donnée que $(\mu, \gamma) \sim \nu_m$ de manière indépendante, les $A^{(m)}$ indépendantes pour des m différents.
- Définir $A := A^{(d-1)} \cdots A^{(0)}$; loi de A totalement déterminé par probabilités $(\nu_m)_{m \in \mathbb{Z}_d}$ et paramètres $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1})$.

H3: La matrice A vraiment aléatoire. (Il n'existe pas $B \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R}_+)$ déterministe: $A = B$ p.s.)

Paramètre classifiant

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de matrices aléatoires de $\mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R}_+)$ telles que $A_n \sim A$. Définir [Guivarc'h (2006)]

$$\kappa(s) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}(\|A_n \cdots A_1\|^s)\right)^{1/n}, s \in \mathbb{R}_+.$$

Lemme

1. *$\kappa(s)$ existe et est log-convexe,*
2. *ne peut pas être constante en s,*
3. *$\kappa(0) = 1, \kappa'(0) = \Lambda_1$ (l'exposant de Lyapunov maximal).*

Comportement qualitatif de $\kappa(s)$

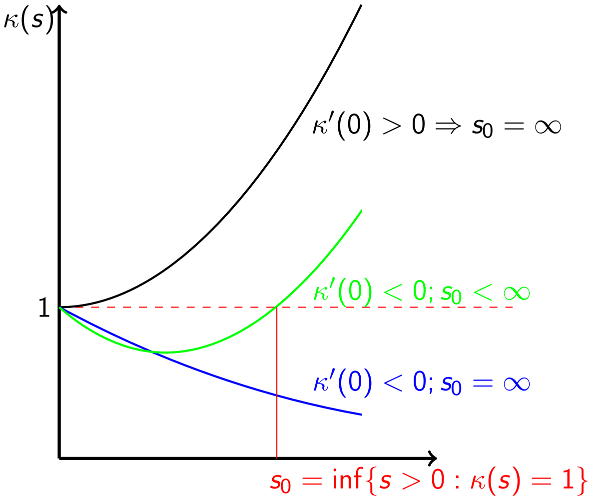


Diagramme des types

Définition

$s_0 := \inf\{s > 0 : \kappa(s) = 1\}$ avec $\inf \emptyset = \infty$.
$\tau := \inf\{t > 0 : \text{toutes les files sont vides}\}$.

Théorème

1. *Si* $\kappa'(0) > 0$ *alors* $\mathbb{P}(\tau = \infty) > 0$ *(transience).*
2. *Si* $\kappa'(0) < 0$ *alors* $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$ *(récurrence).*
3. *Si* $s \in]0, s_0[$*, alors* $\mathbb{E}(\tau^s) < \infty$.
4. *Si* $s > s_0$*, alors* $\mathbb{E}(\tau^s) = \infty$.

Diagramme des types

Définition

$s_0 := \inf\{s > 0 : \kappa(s) = 1\}$ avec $\inf \emptyset = \infty$.
$\tau := \inf\{t > 0 :$ toutes les files sont vides$\}$.

Théorème

1. *Si* $\kappa'(0) > 0$ *alors* $\mathbb{P}(\tau = \infty) > 0$ *(transience).*
2. *Si* $\kappa'(0) < 0$ *alors* $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$ *(récurrence).*
3. *Si* $s \in]0, s_0[$, *alors* $\mathbb{E}(\tau^s) < \infty$.
4. *Si* $s > s_0$, *alors* $\mathbb{E}(\tau^s) = \infty$.

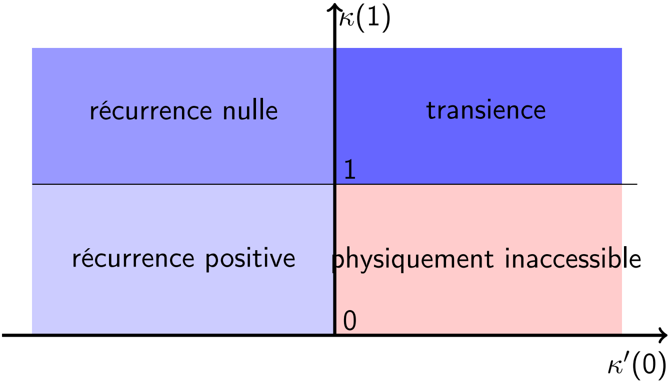
Diagramme des types (suite)

Corollaire

Soient $h_1 = \kappa'(0)$ *et* $h_2 = \kappa(1)$.

1. *Si* $h_1 < 0$ *et* $h_2 < 1$ *récurrence positive.*
2. *Si* $h_1 < 0$ *et* $h_2 > 1$ *récurrence nulle.*
3. *Si* $h_1 > 0$ *transience.*

Diagramme des types



Description instantanée complète du système files-serveur

- **Régime:** $R = (\mu, \gamma) \in \mathbb{M}$.
- **Position du serveur-tailles de files:** $(N; (\xi_0, \ldots, \xi_{d-1})) \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{N}^d \cup [\{\emptyset\} \times \{0\}^d]$. (N, ξ) signifie: serveur en N; taille de la file en $[N+m]$ ègale à ξ_m.
- **Processus complet:** $(R(t); N(t), \xi(t))_{t \geq 0}$ càdlàg.
- $N(0) = 0 \neq \emptyset$ par exemple, i.e. système commence avec quelques clients.
- $\tau = \inf\{t > 0 : N_t = \emptyset\}$.
- $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des instants des sauts du serveur. Noter que $N_{\sigma_n} = [n]$ pour $\sigma_n < \tau$.

Description instantanée complète du système files-serveur

- **Régime:** $R = (\mu, \gamma) \in \mathbb{M}$.
- **Position du serveur-tailles de files:** $(N; (\xi_0, \ldots, \xi_{d-1})) \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{N}^d \cup [\{\emptyset\} \times \{0\}^d]$. $(N, \boldsymbol{\xi})$ signifie: serveur en N; taille de la file en $[N + m]$ ègale à ξ_m.
- **Processus complet:** $(R(t); N(t), \xi(t))_{t \geq 0}$ càdlàg.
- $N(0) = 0 \neq \emptyset$ par exemple, i.e. système commence avec quelques clients.
- $\tau = \inf\{t > 0 : N_t = \emptyset\}$.
- $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des instants des sauts du serveur. Noter que $N_{\sigma_n} = [n]$ pour $\sigma_n < \tau$.

Description instantanée complète du système files-serveur

- **Régime:** $R = (\mu, \gamma) \in \mathbb{M}$.
- **Position du serveur-tailles de files:** $(N; (\xi_0, \ldots, \xi_{d-1})) \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{N}^d \cup [\{\emptyset\} \times \{0\}^d]$.
  $(N, \boldsymbol{\xi})$ signifie: serveur en N; taille de la file en $[N + m]$ ègale à ξ_m.
- **Processus complet:** $(R(t); N(t), \boldsymbol{\xi}(t))_{t \geq 0}$ càdlàg.
- $N(0) = 0 \neq \emptyset$ par exemple, i.e. système commence avec quelques clients.
- $\tau = \inf\{t > 0 : N_t = \emptyset\}$.
- $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des instants des sauts du serveur. Noter que $N_{\sigma_n} = [n]$ pour $\sigma_n < \tau$.

Description instantanée complète du système files-serveur

- **Régime:** $R = (\mu, \gamma) \in \mathbb{M}$.
- **Position du serveur-tailles de files:** $(N; (\xi_0, \ldots, \xi_{d-1})) \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{N}^d \cup [\{\emptyset\} \times \{0\}^d]$. $(N, \boldsymbol{\xi})$ signifie: serveur en N; taille de la file en $[N + m]$ ègale à ξ_m.
- **Processus complet:** $(R(t); N(t), \boldsymbol{\xi}(t))_{t \geq 0}$ càdlàg.
- $N(0) = 0 \neq \emptyset$ par exemple, i.e. système commence avec quelques clients.
- $\tau = \inf\{t > 0 : N_t = \emptyset\}$.
- $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des instants des sauts du serveur. Noter que $N_{\sigma_n} = [n]$ pour $\sigma_n < \tau$.

Description instantanée complète du système files-serveur

- **Régime:** $R = (\mu, \gamma) \in \mathbb{M}$.
- **Position du serveur-tailles de files:** $(N; (\xi_0, \dots, \xi_{d-1})) \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{N}^d \cup [\{\emptyset\} \times \{0\}^d]$. $(N, \boldsymbol{\xi})$ signifie: serveur en N; taille de la file en $[N + m]$ ègale à ξ_m.
- **Processus complet:** $(R(t); N(t), \boldsymbol{\xi}(t))_{t \geq 0}$ càdlàg.
- $N(0) = 0 \neq \emptyset$ par exemple, i.e. système commence avec quelques clients.
- $\tau = \inf\{t > 0 : N_t = \emptyset\}$.
- $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des instants des sauts du serveur. Noter que $N_{\sigma_n} = [n]$ pour $\sigma_n < \tau$.

Description instantanée complète du système files-serveur

- **Régime:** $R = (\mu, \gamma) \in \mathbb{M}$.
- **Position du serveur-tailles de files:** $(N; (\xi_0, \ldots, \xi_{d-1})) \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{N}^d \cup [\{\emptyset\} \times \{0\}^d]$. $(N, \boldsymbol{\xi})$ signifie: serveur en N; taille de la file en $[N+m]$ ègale à ξ_m.
- **Processus complet:** $(R(t); N(t), \boldsymbol{\xi}(t))_{t \geq 0}$ càdlàg.
- $N(0) = 0 \neq \emptyset$ par exemple, i.e. système commence avec quelques clients.
- $\tau = \inf\{t > 0 : N_t = \emptyset\}$.
- $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des instants des sauts du serveur. Noter que $N_{\sigma_n} = [n]$ pour $\sigma_n < \tau$.

Modèle du flot dynamique aléatoire sous-jacent

- Démarrer lot avec file en $N = 0$ et tailles des files $\boldsymbol{\xi}(0) := (\xi_0(0), \ldots, \xi_{d-1}(0)) = (x_0^0, \ldots, x_{d-1}^0)$.
- Instant du premier saut du serveur: $\sigma_1 = \inf\{t > 0 : \xi_0(t) = 0\}$.
  Pour $t \in [\sigma_0, \sigma_1[$,
  - le régime $R(t) = R_0 \sim \nu_{[0]}$ reste constant,
  - $\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}(t)|\mathcal{E}) = (x_0^0 - (\mu - \lambda_N)t, x_1^0 + (\mu\gamma_1 + \lambda_{[N+1]})t, \ldots, x_{d-1}^0 + (\mu\gamma_{d-1} + \lambda_{[N+d-1]})t)$.
- **Temps nécessaire pour vider 0^{e} file conditionellement à R:** $S_1(x_0) = \mathbb{E}(\sigma_1|R; \xi_0 = x_0) = \frac{x_0}{\mu - \lambda_0}$.
- **Modèle du flot:** le système dynamique stochastique défini comme moyen du processus stochastique conditionnellement aux changements de régimes.

Modèle du flot dynamique aléatoire sous-jacent

- Démarrer lot avec file en $N = 0$ et tailles des files $\boldsymbol{\xi}(0) := (\xi_0(0), \ldots, \xi_{d-1}(0)) = (x_0^0, \ldots, x_{d-1}^0)$.
- Instant du premier saut du serveur: $\sigma_1 = \inf\{t > 0 : \xi_0(t) = 0\}$.
  Pour $t \in [\sigma_0, \sigma_1[$,
  - le régime $R(t) = R_0 \sim \nu_{[0]}$ reste constant,
  - $\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}(t)|\mathcal{E}) = (x_0^0 - (\mu - \lambda_N)t, x_1^0 + (\mu\gamma_1 + \lambda_{[N+1]})t, \ldots, x_{d-1}^0 + (\mu\gamma_{d-1} + \lambda_{[N+d-1]})t)$.
- Temps nécessaire pour vider 0^{e} file conditionellement à R: $S_1(x_0) = \mathbb{E}(\sigma_1|R; \xi_0 = x_0) = \frac{x_0}{\mu - \lambda_0}$.
- **Modèle du flot:** le système dynamique stochastique défini comme moyen du processus stochastique conditionnellement aux changements de régimes.

Modèle du flot dynamique aléatoire sous-jacent

- Démarrer lot avec file en $N = 0$ et tailles des files $\boldsymbol{\xi}(0) := (\xi_0(0), \ldots, \xi_{d-1}(0)) = (x_0^0, \ldots, x_{d-1}^0)$.
- Instant du premier saut du serveur: $\sigma_1 = \inf\{t > 0 : \xi_0(t) = 0\}$.
  Pour $t \in [\sigma_0, \sigma_1[$,
  - le régime $R(t) = R_0 \sim \nu_{[0]}$ reste constant,
  - $\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}(t)|\mathcal{E}) = (x_0^0 - (\mu - \lambda_N)t, x_1^0 + (\mu\gamma_1 + \lambda_{[N+1]})t, \ldots, x_{d-1}^0 + (\mu\gamma_{d-1} + \lambda_{[N+d-1]})t)$.
- **Temps nécessaire pour vider 0^{e} file conditionellement à** R: $S_1(x_0) = \mathbb{E}(\sigma_1|R; \xi_0 = x_0) = \frac{x_0}{\mu - \lambda_0}$.
- **Modèle du flot:** le système dynamique stochastique défini comme moyen du processus stochastique conditionnellement aux changements de régimes.

Estimations pour le modèle du flot

Définition

$$D_\infty(x) = \sum_{i=1}^{\infty} S_n(x).$$

Estimations pour le modèle du flot (suite)

$$Z_\infty = A_0 + A_1 A_0 + \ldots + A_k \cdots A_0 + \ldots.$$

Lemme

1. $\kappa(s) > 1 \Rightarrow \mathbb{E}\|Z_\infty\|^s = \infty;$
2. $\kappa(s) < 1 \Rightarrow \mathbb{E}\|Z_\infty\|^s < \infty.$

Estimations pour le modèle du flot (suite)

Lemme

1. $\kappa'(0) < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^d, D_\infty(x) < \infty$ *p.s.*
2. $\kappa'(0) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^d, D_\infty(x) = \infty$ *p.s.*

Idée de la démonstration:

$$C_1 \|Z_n x\| \leq \sum_{i=1}^{n} S_i(x) \leq C_2 \|Z_n x\|,$$

où $Z_k = A_0 + A_1 A_0 + \ldots + A_k \cdots A_0$.

- Si $\kappa'(0) > 0$ alors $\|Z_n\| \geq \|A_n \cdots A_0\| \asymp \exp(n\kappa'(0))$.
- Si $\kappa'(0) < 0$ alors $\forall s < s_0$, $z_n(s) = \sum_{i=1}^{n} \|A_i \cdots A_1\|^s \to z_\infty(s) < \infty$.

Estimations pour le modèle du flot (suite)

Lemme

1. $\kappa'(0) < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^d, D_\infty(x) < \infty$ *p.s.*
2. $\kappa'(0) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^d, D_\infty(x) = \infty$ *p.s.*

Idée de la démonstration:

$$C_1\|Z_n x\| \leq \sum_{i=1}^{n} S_i(x) \leq C_2\|Z_n x\|,$$

où $Z_k = A_0 + A_1 A_0 + \ldots + A_k \cdots A_0$.

- Si $\kappa'(0) > 0$ alors $\|Z_n\| \geq \|A_n \cdots A_0\| \asymp \exp(n\kappa'(0))$.
- Si $\kappa'(0) < 0$ alors $\forall s < s_0$,
  $z_n(s) = \sum_{i=1}^n \|A_i \cdots A_1\|^s \to z_\infty(s) < \infty$.

Comparaison du flot avec le processus stochastique

Lemme

Flot est près du processus stochastique: $\forall \delta > 0, \exists C \geq 0$:

$$\mathbb{P}_x(S_1 - \delta x \leq \sigma_1 \leq S_1 + \delta x) \geq 1 - \exp(-Cx).$$

Récurrence

Supposons $\kappa'(0) < 0$ (donc $D_\infty(x) < \infty$ p.s.) Alors fonction D_∞ peut servir comme **fonction de Lyapunov**.

Lemme

Soit $(\hat{N}_n, \hat{\xi}_n)$ l'état du processus échantillonné aux instants où quelque chose arrive.

$$\mathbb{E}(D_\infty(\hat{\xi}_{n+1}) - D_\infty(\hat{\xi}_n)|\mathcal{R}) < -\epsilon.$$

Si $\kappa(s) < 1$, on montre alors que $\mathbb{E}_x(\tau^s|\mathcal{R}) \leq CD_\infty^s(x)$.

Transience

- Supposons $\kappa'(0) > 0$. Alors $\|A_n \cdots A_0\| > \alpha^n$ avec $\alpha > 1$.
- Choisir δ : $(1-\delta)\alpha^{1/d} > 1$.
- Définir $B_m = \{\xi^m \geq (1-\delta)^m x^m\}$.
- Alors montrer que $\mathbb{P}(\cap_m B_m) > 0$.