Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année universitaire 2008–2009
Master de mathématiques

Statistique mathématique
Travaux dirigés 10

1 Théorie des estimateurs ponctuels

Exercice 1 Montrer que pour un modèle statistique dominé, l'entropie de Kullback-Leibler vérifie

$$H(\mathbb{P}_{\theta_1}, \mathbb{P}_{\theta_2}) = \mathbb{E}_{\theta_1}(\frac{1}{2}\langle \theta_2 - \theta_1, I(\theta_1)(\theta_2 - \theta_1)\rangle) + o(\|\theta_1 - \theta_2\|^2),$$

où $I(\theta_1)$ est la matrice d'information deFisher.

Exercice 2 (Des estimateurs efficaces n'existent pas toujours) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \Pi)$ où $\Pi = \{\mathcal{N}(m, \sigma^2), m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$. Considérer la statistique S^2 variance empirique et la statistique cS^2 avec $c > 0$. Argumenter.

Exercice 3 Soit un échantillon de n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ identiquement distribuées selon une loi normale $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Écrire l'équation de maximum de vraisemblance et déterminer une solution.

Exercice 4 Soit un échantillon de n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ identiquement distribuées selon une loi binomiale $\mathcal{B}(\theta), p)$ de taille $\theta \in \mathbb{N}^*$ inconnue et paramètre p connue.

– Écrire l'équation du maximum de vraisemblance.
– Pour $p = 1/2$ et $n = 4$, déterminer le maximum pour l'observation $X_1 = 0, X_2 = 20, X_3 = 1, X_4 = 19$.