UNIVERSITÉ DE RENNES I
UFR MATHÉMATIQUES

Licence Sciences Technologies Santé
Année 2015–2016

Travaux dirigés pour le module « Outils mathématiques 4 »

Intégrales doubles calculables par intégration itérée

1. Calculer les intégrales $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pour les choix suivants :

$f(x,y)$	D délimitée par
$y-2x$	$(-1,1),(2,1),(2,4),(-1,4)$,
$x-y$	$(2,9),(2,1),(-2,1)$,
xy^2	$(0,0),(3,1),(2,1)$,
$y+1$	$y=\sin x, y=\cos x, x=0, x=\pi/4$,
$x^3\cos(xy)$	$y=x^2, y=0, x=2$,
$\exp(x/y)$	$y=2x, y=-x, y=4$.

2. Dans la suite f désigne une fonction continue sur $D\subset\mathbb{R}^2$. Dans les cas où la région D est délimitée par les courbes dont les équations sont données ci-dessous, déterminer explicitement D et exprimer l'intégrale $\iint_D f(x,y)dxdy$ comme une intégrale itérée.
   (a) $8y=x^3, y-x=4, 4x+y=9$,
   (b) $x=2\sqrt{y}, \sqrt{3}x=\sqrt{y}, y=2x+5$,
   (c) $x=\sqrt{3-y}, y=2x, x+y+3=0$,
   (d) $y=\exp(x), y=\ln(x), x+y=1, x+y=1+e$,
   (e) $y=\sin(x), \pi y=2x$.
3. Pour chacune des intégrales itérées suivantes, calculer la valeur de l'intégrale en intervertissant l'ordre d'intégration.
   (a) $\int_0^1(\int_{2x}^2\exp(y^2)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.
   (b) $\int_0^9(\int_{\sqrt{y}}^3\sin(x^3)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.
   (c) $\int_0^2(\int_{y^2}^4 y\cos(x^2)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.
   (d) $\int_1^e(\int_0^{\ln x} y\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$.
   (e) $\int_0^8(\int_{\sqrt[3]{y}}^2\frac{y}{\sqrt{16+x^7}}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

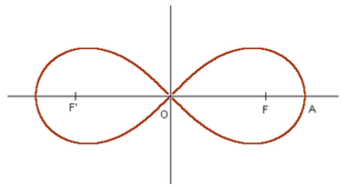
Aires de surfaces planes et volumes

4. Calculer l'aire de la région plane délimitée par les courbes $2y=16-x^2$ et $x+2y=4$.
5. Calculer le volume de l'octant positif délimité par le paraboloïde $z=x^2+y^2+1$ et le plan $2x+y=2$.
6. Calculer le volume de la région découpée par les cylindres $x^2+y^2=a^2$ et $y^2+z^2=a^2$.

Coordonnées polaires

7. Calculer l'aire de la région délimitée par le cercle $r = 2a\sin\theta$ qui se trouve à l'extérieur du cercle $r = a$.

8. La *lemniscate de Bernoulli*



est une courbe célèbre qui a donné naissance au symbole de l'infini (∞). Cette courbe est paramétrée par $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$, où $a = OF$. (*Attention :* cette équation paramétrique n'a pas de solution pour toutes les valeurs de $\theta \in [0, 2\pi]$). Calculer l'aire délimitée par la boucle.

9. Calculer le volume délimité par le plan xy et le paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$.

10. Calculer l'intégrale généralisée $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}$. *Suggestion :* commencer par calculer $\iint\limits_{D_R} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2}) \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2\pi}$ où $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Aires de surfaces courbes

11. Calculer l'aire de la partie $z \geq 0$ du paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$.

12. Calculer l'aire de la partie de la surface définie par le graphe de la fonction $z = y + x^2/2$ qui se projette sur le carré du plan horizontal délimité par les sommets $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$. *Indication :* $\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{argsinh}(x) + C$.

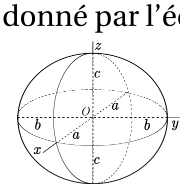
13. Même question pour la partie du graphe de $z = x^2$ qui se projette sur le triangle du plan horizontal délimité par les sommets $(0,0), (0,2), (2,2)$.

14. Calculer l'aire de la surface bordant la région dont le volume a été calculé en exercice 6.

Intégrales triples

15. Calculer l'intégrale $I = \iiint_D (x + y + z + 1)^{-3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ sur le domaine tri-dimensionnel D délimité par les plans $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.

16. Calculer le volume de l'*ellipsoïde* donné par l'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



Suggestion : utiliser le changement de variable $y = b(1 - x^2/a^2)^{1/2}\sin t$.

Barycentre et moment d'inertie

17. Quelles sont les coordonnées du barycentre[1] de l'ellipsoïde de l'exercice 16, sous l'hypothèse que le matériau de construction est homogène ? *La réponse s'obtient sans calcul par un argument d'une ligne !*
18. Une plaque d'un matériau inhomogène a la forme d'une surface découpée par la parabole $x = y^2$ et la droite $x = 4$. La densité de masse par unité de surface, ρ, est proportionnelle à la distance du point de l'axe Oy. Déterminer les coordonnées du barycentre de la plaque.
19. Un solide a la forme d'un cylindre de base de rayon R et de hauteur h. La densité volumique ρ du matériau varie avec la hauteur ; elle est proportionnelle à la distance du point par rapport à la base du cylindre. Calculer le moment d'inertie du solide autour de son axe de révolution.
20. On considère trois figures planes dans le plan Oxz :
    — Un rectangle R dont les sommets ont comme coordonnées $(0,0), (a,0), (a,h)$ et $(0,h)$.
    — Un triangle T dont les sommets ont comme coordonnées $(0,0)$, $(a,0)$ et $(0,h)$.
    — Un demi-cercle C de centre $(0,0)$, de rayon a et situé dans le demi-plan $x \geq 0$.
    Pour chacune de ce 3 figures, calculer
    (a) son aire S,
    (b) l'abscisse c de son centroïde,
    (c) le volume V du solide obtenu par révolution de la figure autour de l'axe Oz.

    Comment $2\pi cS$ se compare avec V pour ces figures ? Pouvez-vous formuler rigoureusement votre conclusion[2] et la démontrer en toute généralité ?

Intégrales curvilignes

21. Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_{L(A,b)} (xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y)$ lorsque le contour $L(A,B)$ est :
    (a) la juxtaposion des segments de droite reliant les points $A = (2,1)$ à $C = (4,1)$ et C à $B = (4,5)$,
    (b) le segment reliant directement A à B,
    (c) la courbe paramétrée par $x = 3t - 1$ et $y = 3t^2$, pour $t \in [1, 2/3]$.

    Quelle est la valeur de l'intégrale curviligne sur le contour fermé $ACBA$, où les points A, B et C sont définis ci-dessous ?
22. Comment doit-on modifier le deuxième terme de l'intégrand $(xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y)$ dans l'intégrale précédente pour que l'intégrale curviligne devienne indépendante du contour ?
23. Calculer l'intégrale curviligne $\int_C xy^2 ds$ ou C est cercle paramétré par $x = \cos t$, $y = \sin t$.
24. Un demi-cercle de rayon R est construit dans un matériau inhomogène dont la densité linéique à tout point du demi-cercle est proportionnelle à la distance de ce point à la corde reliant les extrémités du demi-cercle. Calculer sa masse.

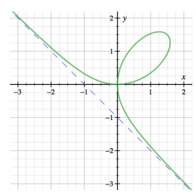
---

1. Le barycentre lorsque la densité est constante est aussi appelé *centroïde*.
2. La conclusion est connue depuis l'antiquité sous le nom de théorème de Pappus d'Alexandrie (290 – 350).

25. Calculer l'intégrale curviligne $\int_L (yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z)$, où L est la courbe paramétrée par $x = t$, $y = t^2$ et $z = t^3$, pour $t \in [0,2]$.
26. Soit la fonction vectorielle en dimension 3 donnée par $\vec{F}(x,y,z) = y^2 \cos x \vec{e}_x + (2y \sin x + \exp(2z))\vec{e}_y + 2y \exp(2z)\vec{e}_z$, où $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont les vecteurs unité de $\mathbb{R}^3$.
    (a) Déterminer une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ différentiable telle que $\vec{F}$ s'écrive : $\vec{F} = \nabla f$.
    (b) Se servir de l'écriture précédente pour calculer $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$, dans les cas où L est soit le segment de droite reliant $(0,1,1/2)$ à $(\pi/2,3,2)$ soit la juxtaposition de segments reliant successivement $(0,1,1/2)$, $(\pi/2,1,1/2)$, $(\pi/2,3,1/2)$, $(\pi/2,3,2)$. Qu'observez-vous ?
    (c) Si L est un contour arbitraire reliant deux points A et B de l'espace, calculer $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$ en termes de f. Ce résultat est-il compatible avec vos résultats précédents ?

Formule de Green

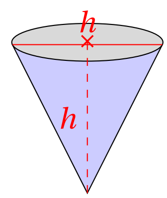
27. L'*hypocycloïde* H, est une courbe fermée dans le plan dont la représentation paramétrique est $x = a\cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.
    (a) Esquisser la forme de la courbe lorsque t varie de 0 à 2π.
    (b) Calculer l'intégrale curviligne $\int_H x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$.
    (c) Calculer l'aire de la surfaces délimitée par H.
28. Le *follium de Descartes*



est une courbe définie, en coordonnées cartésiennes, par l'équation $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ de degré 3. Il est difficile de résoudre cette équation pour déterminer les différentes branches de la solution. Il est cependant aisé de trouver d'autres représentations.
    (a) Montrer que l'équation de la courbe en coordonnées polaires est
$$r = 3a\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)}.$$
    (b) En posant $y = tx$, montrer que la courbe peut aussi être paramétrée, en coordonnées cartésiennes, par
$$x = 3a\frac{t}{1+t^3};\quad y = 3a\frac{t^2}{1+t^3}.$$
    (c) Utiliser cette dernière paramétrisation pour calculer, à l'aide de la formule de Green, l'aire de la surface délimitée par la boucle du follium.
29. La *cycloïde* est la courbe dans le plan paramétrée, en coordonnées cartésiennes, par
$$x = a(t - \sin(t));\quad y = a(1 - \cos(t)),\quad t \in [0, 2\pi].$$
    (a) Esquisser cette courbe.
    (b) Calculer l'aire de la surface délimitée par un arc de la cycloïde et l'axe des x, à l'aide de la formule de Green.

Intégrales de surface

30. On note Σ la surface latérale du cône décrit par $z^2 = x^2 + y^2$ tronqué par les plans $z = 1$ et $z = 4$. Calculer $\iint_\Sigma x^2 z \mathrm{d}\sigma$.
31. On note Σ la portion de surface courbe $x = y^2$ délimitée par les plans $z = 0$, $z = 5$, $y = 1$ et $y = 4$. Calculer $\iint_\Sigma \frac{xz}{y} \mathrm{d}\sigma$.
32. Un gobelet en carton a la forme d'un cône circulaire droit (i.e. son axe est parallèle à Oz) tronqué à hauteur h par un cercle de diamètre h.



   (a) En supposant que le sommet du cône se trouve à l'origine, déterminer l'équation de la surface latérale Σ du gobelet.

   (b) Si le gobelet est rempli à ras-bord d'un liquide de poids volumique D, calculer la force totale exercée sur le liquide par la paroi du gobelet.

   Rappels :

   — La pression hydrostatique P d'une colonne de hauteur H de liquide de poids volumique D est $P = HD$.

   — La différentielle de la force $\mathrm{d}\vec{F}$ exercée sur un élément de surface infinitésimale $\mathrm{d}\sigma$ de la paroi par le liquide est $\mathrm{d}\vec{F} = P\vec{n}\mathrm{d}\sigma$, où $\vec{n}$ désigne le vecteur unité normal à $\mathrm{d}\sigma$.

   (c) Calculer le poids de liquide dans le gobelet. Comparer avec le résultat précédent.

33. Soit Σ la partie $z \geq 0$ de la surface décrite par le paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$.

   (a) Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F} = 3x\vec{e}_x + 3y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ à travers Σ.

   (b) On note L la trace de Σ sur le plan Oxy (il s'agit d'un cercle dont on calculera l'équation). Vérifier le théorème de Stokes pour le champ vectoriel $\vec{F} = 3z\vec{e}_x + 4x\vec{e}_y + 2y\vec{e}_z$, i.e. l'égalité
$$\iint_\Sigma (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \mathrm{d}\sigma = \oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

34. Le noyau d'une tornade est approximée par un cône à l'intérieur duquel l'air tourbillonne comme un corps rigide à vitesse angulaire ω constante. Soit L le cercle de rayon R correspondant à une coupe horizontale du cône.

   (a) Calculer $\int_L \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$, où

   (b) Calculer la même quantité en appliquant le théorème de Stokes.

Rappels sur les séries numériques

35. Déterminer, en appliquant le critère adéquat, le comportement des séries dont le terme général est

(a) $\frac{n}{2^n}$,

(b) $\frac{1}{\sqrt{10n}}$,

(c) $\frac{n+1}{n}$,

(d) $\frac{1}{\sqrt[3]{n+6}}$,

(e) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

36. Pour les séries donc le terme général prend une des formes ci-dessous, écrire les quelques premiers termes de la série et déterminer si la série converge.

    (a) $\frac{1}{n(n+1)}$,

    (b) $\frac{n^2}{n+1}$,

    (c) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

    (d) $(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^k}$, pour k entier fixé et $x \in \mathbb{R}$ fixé,

    (e) $\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt{n^2+1}$.

37. Déterminer les valeurs $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les séries suivantes convergent

    (a) $\frac{x^n}{2^n}$,

    (b) $(-1)^n \frac{x^n}{n^2}$,

    (c) $2^n \sin(\frac{x}{3^n})$,

    (d) $\frac{n^k}{n!} x^n$,

    (e) $\frac{n!}{n^n} x^n$.

38. Soit la série de terme général nx^n, pour $|x| < 1$.

    (a) Déterminer sa somme en réarrangeant la série comme

    $$\sum_{n\in\mathbb{N}} nx^n = \sum_{n\geq 1} x^n + \sum_{n\geq 2} x^n + \sum_{n\geq 3} x^n \dots.$$

    (b) Comparer avec la dérivée de la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$.

Séries des fonctions, séries entières

39. Pour les séries dont les termes généraux sont les fonctions données par les formules ci-dessous, déterminer les domaines de convergence.

    (a) $u_n(x) = \frac{n}{5^n} x^n$, pour $n \geq 0$.

    (b) $u_n(x) = \frac{\cos(n^4 x)}{n^2}$, pour $n \geq 1$.

    (c) $u_n(z) = \frac{z^n}{n!}$, pour $n \geq 0$ et $z \in \mathbb{C}$.

    (d) $u_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1}(x-3)^n$, pour $n \geq 1$.

    (e) $u_n(x) = n! x^n$, pour $n \geq 0$.

    (f) $u_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, pour $n \geq 1$.

40. Pour la série dont le terme général est la fonction définie par la formule $u_n(x) = (-1)^n x^n$, $n \geq 0$,
    (a) déterminer le rayon de convergence R et le domaine de convergence $\mathbb{D}$,
    (b) calculer la somme de la série pour $x \in \mathbb{D}$,
    (c) en déduire le développement en série de Taylor de fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \ln(1+x),$$

    pour $x \in [-r, r]$, où $r < R$.

41. Soit f la fonction définie comme somme de la série $x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
    (a) Pour $x \in [-a, a]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, calculer $f'(x)$ et relier cette dérivée à $f(x)$ à travers une équation différentielle.
    (b) En déduire la fonction f en résolvant cette équation différentielle.

42. À l'aide d'un développement adéquat du numérateur des intégrandes en série entière calculer les intégrales *en apparence* singulières
    (a) $\int_0^1 \frac{1-\exp(-x)}{x} \mathrm{d}x$ et
    (b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} \mathrm{d}x$.

43. Résoudre l'équation différentielle $y'' = 2xy' + 4y$ avec conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, en cherchant la fonction y comme somme d'une série entière, i.e. $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. (En supposant, pour commencer, que le domaine de convergence de cette série contient un intervalle ouvert non-vide centré à 0, cette approche vous permettra de déterminer les coefficients (a_n) de la décomposition par une récurrence. Déterminer a posteriori le domaine de convergence de cette série).