UNIVERSITÉ DE RENNES I
UFR MATHÉMATIQUES

Licence Sciences Technologies Santé
Année 2014–2015

Travaux dirigés de probabilités pour « Outils mathématiques 4 »
Feuille numéro 04

Intégrales curvilignes

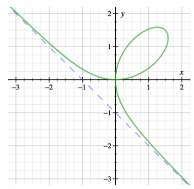
1. Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_{L(A,b)} (xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y)$ lorsque le contour $L(A,B)$ est :
   (a) la juxtaposion des segments de droite reliant les points $A = (2,1)$ à $C = (4,1)$ et C à $B = (4,5)$,
   (b) le segment reliant directement A à B,
   (c) la courbe paramétrée par $x = 3t - 1$ et $y = 3t^2$, pour $t \in [1, 2/3]$.

   Quelle est la valeur de l'intégrale curviligne sur le contour fermé $ACBA$, où les points A, B et C sont définis ci-dessous ?
2. Comment doit-on modifier le deuxième terme de l'intégrand $(xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y)$ dans l'intégrale précédente pour que l'intégrale curviligne devienne indépendante du contour ?
3. Calculer l'intégrale curviligne $\int_L xy^2 dt$ ou C est cercle paramétré par $x = \cos t$, $y = \sin t$.
4. Un demi-cercle de rayon R est construit dans un matériau inhomogène dont la densité linéique à tout point du demi-cercle est proportionnelle à la distance de ce point à la corde reliant les extrémités du demi-cercle. Calculer sa masse.
5. Calculer l'intégrale curviligne $\int_L (yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z)$, où L est la courbe paramétrée par $x = t$, $y = t^2$ et $z = t^3$, pour $t \in [0,2]$.
6. Soit la fonction vectorielle en dimension 3 donnée par $\vec{F}(x,y,z) = y^2 \cos x\,\mathrm{d}x\vec{e}_x + (2y\sin x + \exp(2z))\vec{e}_z + 2y\exp(2z)\vec{e}_z$, où $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont les vecteurs unité de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Calculer $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$, dans les cas où L est soit le segment de droite reliant $(0,1,1/2)$ à $(\pi/2,3,2)$ soit la juxtaposition de segments reliant successivement $(0,1,1/2)$, $(\pi/2,1,1/2)$, $(\pi/2,3,1/2)$, $(\pi/2,3,2)$. Qu'observez-vous ?
   (b) Déterminer une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ différentiable telle que $\vec{F}$ s'écrive : $\vec{F} = \nabla f$.
   (c) Si L est un contour arbitraire reliant deux points A et B de l'espace, calculer $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$ en termes de f. Ce résultat est-il compatible avec vos résultats précédents ?

Formule de Green

7. L'*hypocycloïde* H, est une courbe fermée dans le plan dont la représentation paramétrique est $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.
   (a) Esquisser la forme de la courbe lorsque t varie de 0 à 2π.
   (b) Calculer l'intégrale curviligne $\int_H x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$.
   (c) Calculer l'aire de la surfaces délimitée par H.

8. Le *follium de Descartes*



est une courbe définie, en coordonnées cartésiennes, par l'équation $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ de degré 3. Il est difficile de résoudre cette équation pour déterminer les différentes branches de la solution. Il est cependant aisé de trouver d'autres représentations.

   (a) Montrer que l'équation de la courbe en coordonnées polaires est
$$r = 3a\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.$$

   (b) En posant $y = tx$, montrer que la courbe peut aussi être paramétrée, en coordonnées cartésiennes, par
$$x = 3a\frac{t}{1+t^3}; \quad y = 3a\frac{t^2}{1+t^3}.$$

   (c) Utiliser cette dernière paramétrisation pour calculer, à l'aide de la formule de Green, l'aire de la surface délimitée par la boucle du follium.

9. La *cycloïde* est la courbe dans le plan paramétrée, en coordonnées cartésiennes, par
$$x = a(t - \sin(t)); \quad y = a(1 - \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

   (a) Esquisser cette courbe.

   (b) Calculer l'aire de la surface délimitée par un arc de la cycloïde et l'axe des x, à l'aide de la formule de Green.