Journal de bord du module
Outils mathématiques 4
Les renvois de la table de matières sont cliquables.

Table des matières

1 Bibliographie

— N.S. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, Éditions Mir, 1980. Il s'agit du livre de base pour ce cours.
— F. Liret, D. Martinais, M. Zisman, Analyse 2e année : cours et exercices avec solutions, Dunod 2004. Le niveau de ce livre est moins adapté au présent cursus que le livre précédent.

2 Informations sur les contrôles continus

Les notes de cours et de TD sont autorisés. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

— Le premier contrôle continu a eu lieu le mercredi 15 février 2017 08 :00–09 :00 dans la salle d'examens du bâtiment 27. Il portait sur les notions vues en cours et travaux dirigés jusqu'au changement des coordonnées (inclus), à savoir : intégrales multiples, calcul d'aires et de volumes, changement de coordoonnées.
— Le deuxième contrôle continu aura lieu le mercredi 15 mars 2017 08 :00–09 :00 dans la salle d'examens du bâtiment 27. Il portera sur le calcul des barycentres, des moments d'inertie, des masses de solides inhomogènes.

- Le troisième et dernier contrôle aura lieu le mercredi 5 avril 2017 08 :00–09 :00 dans la salle d'examens du bâtiment 27. Il portera sur les intégrales curvilignes, les intégrales de surface et les théorèmes de Green et de Stokes.
- Pour votre information : contrôles des années précédentes.
  - L'énoncé et la correction du CC1 du 09 février 2015.
  - L'énoncé et la correction du CC2 du 16 mars 2015.
  - L'énoncé et la correction du CC3 du 1er avril 2015.
  - L'énoncé et la correction du CC1 du 1er février 2016.
  - L'énoncé et la correction du CC2 du 7 mars 2016.
  - L'énoncé et la correction du CC3 du 21 mars 2016.
- Correction des contrôles de cette année.
  - L'énoncé et la correction du CC1 du 15 février 2017.
  - L'énoncé et la correction du CC2 du 15 mars 2017.
  - L'énoncé et la correction du CC3 du 05 avril 2017.
  - L'énoncé et la correction de l'examen de 2e session de 2017.

3 Recueil d'exercices

Recueil d'exercices.

4 Intégrales multiples

- Calcul des volumes des égyptiens jusqu'à Lebesgue. Diaporama: bref aperçu historique.
- Rappels sur l'intégrale de Riemann en dimension 1, sommes de Riemann. Définition de l'intégrale de Riemann en dimension 1.
- Les fonctions continues sur $[a,b]$, les fonctions continues par morceaux et bornées sur $[a,b]$, les fonctions monotones bornées sur $[a,b]$ sont intégrables de Riemann.
- Régions bornées et fermées dans $\mathbb{R}^2$ et subdivisions. Attention : la finesse d'une subdivision en dimension 2 est déterminée par le maximum des diamètres de ses briques élémentaires (pas le maximum des aires).
- Définition de l'intégrale de Riemann en dimension 2.
- Domaines réguliers.
- Calcul des intégrales doubles de fonctions continues sur certains types de domaine comme intégrales itérées de dimension 1. ← Fin du cours du 09 janvier 2017. Exercices proposés: 1–3.
- Généralités sur le changement de variables.
- Rappels sur la dérivée ; signification géométrique. Rappels sur le changement de variable en dimension 1.
- Introduction élémentaire de la matrice jacobienne.
- Formule de changement de variables en dimension 2.
- Exemple : calcul du volume de la sphère en coordonnées polaires.
- Diaporama: changement de coordonnées en dimension 2. ← Fin du cours du 16 janvier 2017. Exercices proposés: 1–3.
- Exemple : volume de l'intersection d'une boule de rayon $2a$ centrée à l'origine et d'un cylindre droit de base donnée par la formule $x^2 + y^2 - 2ya \leq 0$.

— Rappels sur les plans tangents.
— Construction du plan tangent à la surface donnée par l'équation $x^2+y^2+2-z=0$, passant par le point $(1,2,7)$. Deux vues selon des perspectives et des transparences différentes :

— Aire d'une surface courbe. Calcul de l'aire de l'hémisphère nord d'une sphère de rayon R. ← Fin du cours du 23 janvier 2017. Exercices proposés: 4–14 (à faire durant les 3 prochaines séances de TD).
— Intégrales triples. Changement des coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques ou sphériques.
— Intégrales multiples (en nombre arbitraire des variables). Changement des coordonnées cartésiennes en coordonnées « sphériques » N-dimensionnelles. [Ce paragraphe est uniquement pour la culture des étudiants et ne fait pas partie des matières examinables].
— Une application des intégrales multiples en physique : calcul du barycentre et des moments d'inertie.
— Exercices proposés: 15–20, à faire durant 2 séances, à partir de la semaine du 13 février.

5 Intégrales curvilignes, intégrales sur des surfaces courbes

— Motivation : travail produit par une force constante lors d'un déplacement rectiligne.
— Généralisation dans le cas arbitraire.
— Définition de l'intégrale curviligne de $\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ le long d'un arc.
— Si

$$\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix} X(x,y) \\ Y(x,y) \end{pmatrix},$$

alors $\int_{L(A,B)}\vec{f}(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{L(A,B)}(X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y)$.
— Intermède : définition paramétrique d'une courbe. ← Fin du cours du 30 janvier 2017.
— Calcul de la longueur d'un arc de courbe définie par une équation paramétrique.
— Calcul d'une intégrale curviligne ; exemples en dimension 2 et 3.
— Aire d'une surface comme intégrale curviligne sur la courbe fermée que la borde.
— Formule de Green. ← Fin du cours du 6 février 2017. Exercices proposés: 21–29 à faire sur 2–3 séances.
— Condition d'indépendance de l'intégrale curviligne du chemin parcouru.
— Travail des forces découlant d'un potentiel.
— Théorème : Soient D une région bornée de $\mathbb{R}^2$ décomposable en nombre fini de sous-régions régulières et $X,Y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continûment dérivables sur D. On a équivalence entre les affirmations

1. $\oint_{L'}(Xdx+Ydy)=0$, pour tout contour L' bordant une région D' régulière entièrement contenue dans D et
2. $\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$ sur toute la région D.

— Démonstration détaillée du théorème.

- Application dans le cas de l'intégrale curviligne d'un champ vectoriel provenant comme gradient d'un potentiel.
- Intégrale de calcul du flux d'un champ vectoriel à travers une surface courbe.
- Application dans le calcul du flux à travers une sphère d'un champ électrique provenant d'une charge ponctuelle placée au centre de la sphère.
- Préparation pour la démonstration de la formule de Stokes (elle sera complétée la prochaine fois). ← Fin du cours du 13 février 2017.
- Formule de Stokes (dérivation détaillée).
- Exemples venant de la Physique. Forces dérivant d'un potentiel.
- Formule de Gauß.
- Application dans le calcul du flux d'un fluide incompressible.
- Exercices proposés: fin des exercices sur la partie géométrique du cours i.e. jusqu'à l'exercice 34 inclus.

6 Suites et séries de fonctions

- Motivation pour l'étude de séries de fonctions. ← Fin du cours du 27 février 2017.
- Rappels sur les suites et séries numériques.
- Résultats importants concernant les séries numériques : comparaison des séries à termes positifs. ← Fin du cours du 6 mars 2017. La séance s'est achevée par la constatation que les étudiants n'avaient **jamais** étudié auparavant des suites et des séries numériques. Au vu de la constatation précédente :
- Définition d'une suite réelle ou complexe.
- Définition de la notion de convergence et de la divergence d'une suite.
- Signification de la définition de la convergence.
- Soit $z \in \mathbb{C}$.
  - Si $|z| < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$,
  - Si $|z| > 1$ alors $\lim_{n\to\infty} |z^n| = \infty$,
  - Si $|z| = 1$ alors $\lim_{n\to\infty} |z^n| = 1$.

  Dans les deux derniers cas, la suite (sans le module) n'a pas de limite. Démonstration du résultat.
- Étude des cas où l'on peut interchanger limite et addition de deux suites, limite et multiplication de deux suites. Exemples.
- Suite réelle encadrée par deux autres suites.
- Suites réelles monotones. Si (a_n) suite monotone bornée, alors elle possède une limite. Démonstration.
- Définition d'une série formelle. Suite des sommes partielles.
- Si une série converge, son terme général tend vers 0. ← Fin du cours du 13 mars 2017.
- Si deux séries ont de termes généraux qui sont identiques à partir d'un certain rang, elles ont le même comportement.
- Séries à termes positifs.
  - Comparaison avec une intégrale pour des séries dont le terme général est décroissant.
  - Tests de comparaison pour des Σa_n et Σb_n telles que $a_n \leq b_n$ pour tout n.
  - Test du rapport de termes successifs.
  - Test de la racine n^e du n^e terme.
- Séries alternées. ← Fin du cours du 20 mars 2017. Fin du module (sans que le programme prévu soit couvert).