Journal de bord pour le module
Théorie de la mesure et intégration de Lebesgue
Les renvois de la table de matières ainsi que les textes en couleur magenta sont cliquables.

Dernière mise à jour : le 10 novembre 2010

Table des matières

1 Dates des contrôles continus

Les contrôles continus (de 30 minutes chacun) auront lieu les mercredis 13 octobre et 24 novembre 2010.

2 Programme détaillé du cours

2.1 Motivation et contexte historique

Transparents du cours d'introduction

2.2 Mesure extérieure de Lebesgue

- Classe $\mathscr{I}_{\mathbb{R}}$ des intervalles ouverts finis de $\mathbb{R}$.
- Longueur ; mesure extérieure de Lebesgue λ^* sur $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.
- La mesure extérieure de Lebesgue est croissante.
- Classe $\mathscr{N}_\lambda$ des négligeables de Lebesgue ; toute partie dénombrable est négligeable (la réciproque est fausse).
- Si un intervalle $[a,b]$ est recouvert par une famille finie $(I_n)_{n=1,\ldots,p}$ d'intervalles de $\mathscr{I}_{\mathbb{R}}$, alors $b-a < \sum_{n=1}^{p} \lambda(I_n)$.
- La mesure extérieure de Lebesgue coïncide avec la longueur sur $\mathscr{I}_{\mathbb{R}}$.
- Aucun intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide n'est dénombrable ; $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- La mesure extérieure de Lebesgue est sous-σ-additive.
- La classe $\mathscr{N}_\lambda$ est stable par réunions dénombrables.

2.3 Tribu de Lebesgue

- Ensemble Lebesgue-mesurable ; classe $\mathscr{B}_\lambda$ de parties Lebesgue mesurables.
- Tribus ; $\mathscr{B}_\lambda$ est une tribu.

2.4 Tribu borélienne

- Une intersection d'une famille arbitraire de tribus est une tribu.
- La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$, notée $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, est engendrée par les ouverts.
- Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une suite de $\mathscr{I}_{\mathbb{R}}$.
- $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{B}_\lambda \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Toutes les inclusions sont strictes.

2.5 Mesures de Lebesgue et de Borel

- Définition d'une mesure μ sur un espace mesurable $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$.
- Propriétés de σ-finitude, de complétude.
- La restriction de λ^* sur $\mathscr{B}_\lambda$ est une mesure, appelée de Lebesgue.
- La restriction λ^* sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est une mesure, appelée de Borel.
- Régularité d'une mesure.
- La mesure de Lebesgue est non-finie, σ-finie, complète et régulière.
- La mesure de Borel est non-finie, σ-finie, non complète et régulière.
- Les mesures de Borel et de Lebesgue sont invariantes par translation et par réflexion.

– Pour tout ensemble $A \in \mathscr{B}_\lambda$, il existe deux boréliens B_1 et B_2 tels que $B_1 \subseteq A \subseteq B_2$ et $\lambda(B_1) = \lambda(A) = \lambda(B_2)$. (La démonstration de cette proposition sera faite la semaine prochaine).

2.6 Fonctions mesurables

– Fonctions mesurables ; toute fonction constante est mesurable.
– Si $(\mathbb{X}_i)_{i=1,2}$ sont deux ensembles non vides, $f : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ et $\mathscr{X}_2$ est une tribu sur $\mathbb{X}_2$, alors $f^{-1}(\mathscr{X}_2)$ est une tribu sur $\mathbb{X}_1$; en outre, pour toute famille $\mathscr{E}_2 \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{X}_2)$, la tribu $f^{-1}(\sigma_{\mathbb{X}_2}(\mathscr{E}_2))$ coïncide avec la tribu $\sigma_{\mathbb{X}_1}(f^{-1}(\mathscr{E}_2))$.
– Fonctions boréliennes, fonctions Lebesgue mesurables.
– Toute fonction réelle continue est boréleienne.
– Toute fonction réelle monotone est borélienne.
– L'espace $m(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; en outre, si $f, g \in m(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mathbb{R})$, alors $fg \in m(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mathbb{R})$.
– Un petit intermède hors programme sur les treillis (ensembles partiellement ordonnés munis de deux opérations binaires, la disjonction et la conjonction, notées respectivement $\vee$ et $\wedge$) ; treillis σ-complets, notions de $\liminf$ et $\limsup$ pour les treillis. $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ est un treillis σ-complet avec minorant universel $-\infty$ et majorant universel ∞. $(\mathscr{X}, \subseteq)$, où $\mathscr{X}$ est une tribu sur $\mathbb{X}$, est un treillis σ-complet ayant $\emptyset$ comme minorant universel et $\mathbb{X}$ comme majorant universel.
– Enveloppe supérieure de deux fonctions $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$.
– Si (f_n) est une suite de $m(\mathbb{X}, \mathscr{X}; \mathbb{R})$, alors $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ appartiennent à $m(\mathbb{X}, \mathscr{X}; \overline{\mathbb{R}})$.

2.7 Fonctions étagées

– Fonctions étagées $\mathscr{E}(\mathbb{X}, \mathscr{X}; \mathbb{R})$; représentations disjointe et canonique d'une fonction étagée.
– Toute fonction mesurable positive est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives. Si la fonction à approximer est bornée, la suite croissante des fonctions étagées approximantes converge uniformément.
– Si $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$ est un espace mesurable et $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$, il y a équivalence entre les propriétés : $f \in m(\mathbb{X}, \mathscr{X}; \overline{\mathbb{R}})$ et f est limite simple d'une suite de fonctions étagées de $\mathscr{E}(\mathbb{X}, \mathscr{X}; \mathbb{R})$.
– Propriétés vraies μ-presque partout.
– Si tous les membres de deux suites de fonctions mesurables sont égaux presque partout alors les supremum, infimum, limes superior, limes inferior des deux suites sont égaux presque partout.

2.8 Construction de l'intégrale de Lebesgue

On se place dans le cadre d'un espace mesuré $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$.

2.8.1 Intégrale pour des fonctions mesurables positives

– Si $\sum_{i=1}^{p} \beta_i \mathbb{1}_{B_i} = \sum_{j=1}^{q} \gamma_i \mathbb{1}_{C_i}$ sont deux représentations **disjointes** d'un même élément de $\mathscr{E}(\mathbb{X}, \mathscr{X}; \mathbb{R}_+)$, alors $\sum_{i=1}^{p} \beta_i \mu(B_i) = \sum_{j=1}^{q} \gamma_i \mu(C_i)$.
– Intégrale supérieure pour des fonctions mesurables positives.

– Propriétés de l'intégrale supérieure ; égalité de Beppo Levi.
– Lemme de Fatou.
– Sur un espace mesuré $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$, si $f \in m(\mathbb{X}, \mathscr{X}; \mathbb{R}_+)$ alors $\int^* f d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ pour μ-p.t. x.
– Soient $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g \in m(\mathbb{X}, \mathscr{X}; \mathbb{R}_+)$. Si $f \leq g$ μ-p.p., alors $\int^* f d\mu \leq \int^* g d\mu$.
– Soient $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in m(\mathbb{X}, \mathscr{X}; \mathbb{R}_+)$. Si $\int^* f d\mu < \infty$, alors $f(x) < \infty$ μ-p.p.

2.8.2 Fonctions intégrables ; intégrale d'une fonction intégrable

– Définition des fonctions intégrables $\mathscr{L}^1(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$.
– $\mathscr{L}^1(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
– $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu) \Rightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu) \Rightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$; la reciproque n'est pas vraie en général.
– $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu) \Leftrightarrow f^+, f^- \in \mathscr{L}^1(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$.
– Il existe une unique forme linéaire sur $\mathscr{L}^1(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ qui coïncide avec $\int^*_{\mathbb{X}} f d\mu$ pour les fonctions mesurables positives. Cette forme linéaire s'appelle intégrale de f par rapport à μ.

3 Exercices et bibliographie

Recueil d'exercices pour le module

4 Corrigés des contrôles et examens

Corrigé de contrôle du 13 octobre 2010.