Chaos et systèmes dynamiques
Résumé de cours
Séance(s) 5

Matrice jacobienne : Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dérivable au point $\mathbf{x}$. On appelle matrice jacobienne en $\mathbf{x}$ la matrice $\mathbf{Df}(\mathbf{x})$ dont l'élément $\mathbf{Df}(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$.

Stabilité d'un point fixe : Si toutes le valeurs propres de la matrice jacobienne au point fixe sont en module strictement plus petite que 1, le point fixe est stable (attractif). Si toutes sont en module strictement plus grandes que 1, alors il est instable (répulsif).

Points hyperboliques : Un point est hyperbolique si la matrice jacobienne en ce point a toutes ses valeurs propres en module différentes de 1. Se certaines sont plus petites et d'autres plus grandes en module que 1, le point est un point selle.

Stabilité d'une orbite périodique : Si $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k\}$ est une orbite périodique, sa stabilité se décide par le module des valeurs propres de la matrice jacobienne de $\mathbf{f}^k$ évaluée à n'importe quel point $\mathbf{p}_i$.

Variétés stables et instables : Soit $\mathbf{p}$ un point fixe selle ou un point périodique selle pour une transformation injective en dimension 2. La variété stable de $\mathbf{p}$ est l'ensemble

$$\mathcal{S}(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{f}^n(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^n(\mathbf{p})\| = 0.\}$$

La variété instable de $\mathbf{p}$ est l'ensemble

$$\mathcal{U}(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{f}^{-n}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^{-n}(\mathbf{p})\| = 0.\}$$

Point homocline : Sout $\mathbf{p}$ un point fixe selle ou un point périodique selle pour une transformation injective. Un point $\mathbf{h} \in \mathcal{S}(\mathbf{p}) \cap \mathcal{U}(\mathbf{p})$ tel $\mathbf{h} \neq \mathbf{p}$ est appelé homocline.