Chaos et systèmes dynamiques
Résumé de cours
Séance(s) 1-2

Transformation : $\mathbb{X}$ désignera une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. Une transformation est une règle qui nous indique comment en partant d'un point $x \in \mathbb{X}$ nous obtenons un nouveau point de $\mathbb{X}$. Plus précisément, une transformation est une application $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$. La plupart des applications considérées seront indéfiniment dérivables sur $\mathbb{X}$. Sinon, elles auront des propriétés de régularité suffisantes qui seront explicitées dans chaque cas.

Itération : l'application répétée de la transformation. On note $f^0 = \mathbb{1}$ et on définit récursivement pour tout entier $n \geq 1$: $f^n = f \circ f^{n-1}$.

Points fixes : sont les points de $\mathbb{X}$ qui restent invariants par la transformation

$$\mathsf{PF}(f) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = x\}.$$

Trajectoire d'un point initial sous f : est la suite (ayant une infinité de termes) des transformées successifs du point initial $\mathsf{Traj}(f, x_0) = (f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$.

Orbite d'un point initial sous f : est l'ensemble (éventuellement fini) des points visités par la trajectoire : $\mathsf{Orb}(f, x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ (plus précisément $\mathsf{Orb}(f, x) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{f^n(x)\}$).

Voisinage d'ordre ϵ d'un point : Pour un $\epsilon > 0$, on appelle voisinage d'ordre ϵ du point $x \in \mathbb{X}$, l'ensemble des points de $\mathbb{X}$ qui se trouvent à une distance de x inférieure à ϵ. $V_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{X} : |x - y| < \epsilon\}$ (Le lecteur attentif remarquera que l'on confond ici la notion de voisinage avec la notion de boule ouverte.)

Nature d'un point fixe :

- un point fixe p est **attractif** s'il existe un voisinage des tous les points duquel émanent des trajectoires qui tendent vers p. Plus précisément :

$$[p \in \mathsf{PF}(f) \text{ attractif}] \Leftrightarrow [\exists \epsilon > 0, \forall x \in V_\epsilon(p) \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f^k(x) = p.]$$

  On note $\mathsf{PF}_a(f)$ ces points.
- un point fixe p est **répulsif** si tout point x dans un voisinage arbitrairement petit du point p mais différent de p soit la trajectoire qui émane de x n'a pas de limite soit elle tend vers un point différent de p. Plus précisément :

$$[p \in \mathsf{PF}(f) \text{ répuslif}] \Leftrightarrow [\exists \epsilon > 0, \forall x \in V_\epsilon(p) \backslash \{p\} \Rightarrow (\liminf_{k \to \infty} f^k(x) \neq \limsup_{k \to \infty} f^k(x) \text{ ou } \lim_{k \to \infty} f^k(x) \neq p)].$$

  On note $\mathsf{PF}_r(f)$ ces points. Noter que $\mathsf{PF}_r(f) \cup \mathsf{PF}_a(f) \subseteq \mathsf{PF}(f)$.
- **Théorème :** Soit $p \in \mathsf{PF}(f)$.
  - Si $|f'(p)| < 1$ alors p est attractif.
  - Si $|f'(p)| > 1$ alors p est répulsif.

Bassin d'attraction : Pour un point $x \in \mathbb{X}$, on appelle bassin d'attraction de x l'ensemble de points dont les trajectoires sous f tendent vers x.

$$\mathsf{BA}(f, x) = \{y \in \mathbb{X} : \lim_{k \to \infty} f^k(y) = x\}.$$

Points périodiques d'ordre k : sont les points fixes de la transformation f^k qui ne le sont pas pour les entiers $l, 1 \leq l < k$.

$$\mathsf{Per}_k(f) = \{x \in \mathbb{X} : f^k(x) = x \text{ et } \forall l, 1 \leq l < k, f^l(x) \neq x\}.$$

Noter que $\mathsf{Per}_k(f) \subseteq \mathsf{PF}(f^k)$.

Orbite périodique d'ordre k : est l'orbite $\mathsf{Orb}(f, p)$, contenant exactement k points, qui émane d'un point arbitraire $p \in \mathsf{Per}_k(f)$.

Nature d'une orbite périodique : Soit $p \in \mathsf{Per}_k(f)$.

- $\mathsf{Orb}(f, p)$ est une orbite attractive si, et seulement si, p est un point fixe attractif de f^k.
- $\mathsf{Orb}(f, p)$ est une orbite répulsive si, et seulement si, p est un point fixe répulsif de f^k.
- **Théorème :**
  - Si $(\prod_{x \in \mathsf{Orb}(f,p)} |f'(x)|) < 1$ alors $\mathsf{Orb}(f, p)$ est attractive.
  - Si $(\prod_{x \in \mathsf{Orb}(f,p)} |f'(x)|) > 1$ alors $\mathsf{Orb}(f, p)$ est répulsive.