Endomorphismes des Jacobiennes des courbes de genre 2

Soit C une courbe lisse de genre 2 définie sur $\mathbb{Q}$. Sa Jacobienne J est une surface abélienne, dont il est intéressant d'étudier l'anneau d'endomorphismes $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(J)$: par exemple, l'existence d'un $\overline{\mathbb{Q}}$-morphisme non-trivial de C vers une courbe elliptique E est équivalent au fait que $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(J)$ n'est pas un anneau intègre.

Dans la litterature on trouve des algorithmes, basés sur l'uniformisation complexe de J, qui peuvent déterminer l'anneau $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(J)$ en s'appuyant sur des méthodes d'algèbre linéaire numérique. Même si les résultats fournis par ces algorithmes se trouvent toujours être corrects en pratique, ces méthodes "transcendantes" ne peuvent pas fournir une *preuve* de l'exactitude du résultat. Dans cet exposé je vais présenter une nouvelle approche, basée sur les propriétés des représentations galoisiennes, qui permet de prouver rapidement que $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(J)$ est contenu dans l'anneau qu'on a trouvé par voie numérique. Je vais aussi discuter du problème de montrer qu'il y a égalité, même dans le cas peu étudié de la multiplication quaternionique, et si le temps le permet je vais parler des difficultés liées à la question de déterminer $\mathrm{End}_K(J)$ pour K un corps de nombres quelconque.