

Algèbres de quaternions: arithmétique et applications

Piermarco Milione
Aalto University, Finland

Depuis la première apparition des algèbres de quaternions sur la scène mathématique, grâce à leur découverte en 1843 par Hamilton, leur présence est devenue de plus en plus éclectique : de la physique mathématique, avec la mécanique hamiltonienne, à la topologie algébrique, avec le théorème sur les sphères parallélisables ; de l'arithmétique plus classique, avec l'étude des représentations d'un entier par une forme quadratique quaternaire, à la théorie de nombres moderne, avec les courbes de Shimura et la correspondance de Jaquet-Langlands ; pour en venir aux applications à la théorie de la communication sans fils, avec la création de codes espace-temps pour les canaux à accès multiple.

Dans cet exposé nous nous concentrerons sur des aspects arithmétiques de certains ordres dans les algèbres de quaternions : les ordres d'Eichler. Nous présenterons quelques résultats obtenus grâce à l'étude de l'arithmétique non-commutative dans ces ordres – un théorème de factorisation dans les ordres d'Eichler ramifiés à l'infini, de nombre de classes d'idéaux à gauche égal à 1, et un théorème sur les nombres de représentations par des formes quadratiques quaternaires définies positives – qui généralisent des résultats classiques de Hurwitz. Nous montrerons aussi une application de ces résultats à l'étude de l'uniformisation p -adique des courbes de Shimura et à certaines courbes de Mumford les recouvrant, en généralisant des résultats de Gerritzen et van der Put et de Kurihara.