Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier chaleureusement Alexandru Dimca qui a accepté de diriger ma thèse. Son dévouement et sa gentillesse, qui ne m'ont jamais fait défaut, ainsi que l'admirable étendue de ses compétences ont été d'une aide précieuse tout au long de mon travail.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Michel Merle et Adam Parusinski qui ont accepté d'être rapporteurs pour l'attention qu'ils ont prêté à la lecture de ma thèse.

Ma reconnaissance va aussi aux autres membres du Jury : Pierrette Cassou-Nogués, Peter Russell ainsi qu'Alain Yger.

J'ai une pensée particulière pour Jean-Marc Couveignes et Nicolas Brisebarre qui n'ont été avares ni en temps ni en travail ni en conseils et qui m'ont apporté une aide inestimable et indispensable.

Je ne saurais finir ces remerciements sans porter une mention à tous mes camarades du laboratoire dont l'humour et la chaleur m'ont permis d'approfondir les mathématiques dans la joie.

Table des matières

1 Cohomologie de De Rham **9**
1.1 Introduction 9
1.2 Cas de deux courbes 10
1.3 Cas de n courbes 16
1.4 Exemples 18

2 Topologie des fonctions régulières sur une surface affine **25**
2.1 Introduction 25
2.2 Stratifications et conditions de Whitney 25
2.3 Nombres de Milnor et μ^*-constance 27
2.4 Généalités sur la topologie d'une surface affine $U = \mathbb{P}^2 \backslash C$ . . . 30
2.5 Topologie des sections régulières d'une surface affine $U = \mathbb{P}^2 \backslash C$ 30
2.6 Un analogue d'un résultat de Abhyankar et Moh 42
2.6.1 Un résultat élémentaire 42
2.6.2 Un résultat plus général 43
2.7 Cohomologie de la fibre générique 47
2.8 Cocycles invariants 49

Introduction

Soit $\mathbb{P}^2$ le plan projectif complexe, $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe algébrique réduite dont les composantes irréductibles sont notées $C_1, \dots, C_n$. Soit $f_i = 0$ une équation pour la composante C_i.

Dans cette thèse, on s'intéresse à la topologie du complément $U = \mathbb{P}^2 \backslash C$, qui est une surface lisse et affine. Dans le premier chapitre, intitulé "Cohomologie de De Rham", on décrit des bases explicites pour les groupes de cohomologie à coefficients complexes, $H^i(U)$ pour $i = 1, 2$ en supposant données des bases pour les groupes $H^i(U_j)$ où $U_j = \mathbb{P}^2 \backslash C_j$. Si les courbes C_j sont lisses, de telles bases pour les $H^i(U_j)$ sont données par [12].

Le résultat principal ici est le suivant :

Théorème 1. Soient $C_1, \dots, C_n$ n courbes de $\mathbb{P}^2$ définies par les équations irréductibles $f_1 = 0, \dots, f_n = 0$. Alors $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \cup_{i=1}^n C_i)$ est engendré par les formes

$$\frac{P\Omega}{f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3}}, \quad 1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n,$$

où Ω est la contraction de la forme volume de l'espace affine $\mathbb{A}^3$ par le champ de vecteurs d'Euler.

On remarque que la théorie générale, cf. [3], donne des dénominateurs du type $(f_1 \dots f_n)^2$, donc des formules beaucoup plus compliquées que celles de notre Théorème 1. Plusieurs exemples explicites sont calculés, en particulier le cas où C_1 est une cubique lisse et C_2 est la tangente d'inflexion de C_1, situation qui montre deux choses intéressantes :

- La filtration par l'ordre du pôle P^s ne coincide pas avec la filtration de Hodge F^s sur $H^*(U)$, bien que l'on sache que $F^s \subset P^s$ par [3] ;
- La filtration par l'ordre du pôle n'est pas compatible avec les isomorphismes induits par les inclusions.

Un autre exemple donne une base pour la cohomologie $H^1(F)$ où $F \subset \mathbb{C}^2$ est une courbe affine lisse telle que sa clôture projective $\overline{F} \subset \mathbb{P}^2$ soit aussi lisse.

Dans le deuxième chapitre, on généralise beaucoup de résultats sur la topologie d'une fonction polynomiale, $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dans le cas d'une fonction régulière $f : U \to \mathbb{C}$. On suppose que f a seulement des singulatités isolées et on montre, en utilisant un théorème de Bertini, qu'alors F, la fibre générique de f, est connexe.

On introduit respectivement le nombre de Milnor total $\mu(f)$ de f comme la somme de tous les nombres de Milnor locaux pour f sur U et le saut total à l'infini $\lambda(f)$, somme des sauts locaux des nombres de Milnor à l'infini. On montre que l'on a la formule :

$$b_1(F) = 1 - \chi(U) + \mu(f) + \lambda(f),$$

qui généralise la formule bien connue pour le cas $U = \mathbb{C}^2$, voir [9]. Ici $\chi(U)$ est la caractéristique d'Euler de U. L'inégalité évidente qui en découle :

$$\mu(f) + \lambda(f) \geq \chi(U) - 1$$

montre que sur une surface avec $\chi(U) > 1$ (c'est le cas générique) toute fonction admet soit des singularités sur U, soit un saut pour les nombres de Milnor de ses singularités à l'infini.

On montre l'analogue suivant du théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki

Théorème 2. On se donne sur la surface affine $U = \mathbb{P}^2 \setminus C$ où C est une courbe irréductible de $\mathbb{P}^2$ une fonction régulière f. On suppose que $f : U \to \mathbb{C}$ est une fibration localement triviale alors C est une courbe rationelle qui est homéomorphe à $\mathbb{P}^1$.

En général, soit $B \subset \mathbb{C}$ l'ensemble de bifurcation de f et posons $S = \mathbb{C} \setminus B$, $X = f^{-1}(S)$. Alors, $f : X \to S$ est une fibration localement triviale et on a une représentation de monodromie :

$$\rho : \pi(S, s_0) \to Aut H^1(F_{s_0})$$

pour $s_0 \in S$ fixé. Le résultat suivant calcule la dimension de l'espace des cocycles invariants et généralise la formule obtenue dans [7] pour le cas $U = \mathbb{C}^2$.

Proposition 1.

$$\dim H^1(F_{s_0})^\rho = n(C) - 1 + \sum_{b\in B}(n(F_b) - 1) - |B|.$$

où $n(F_b)$ représente le nombre de composantes irréductibles de la fibre F_b.

Finalement, les résultats du premier chapitre sont utilisés dans le second pour obtenir une base de la cohomologie de De Rham $H^1(F)$ de la fibre générique F.

Chapitre 1

Cohomologie de De Rham

1.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est l'étude du plongement d'une courbe algébrique dans $\mathbb{P}^2$ par une description de la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{C}$ de l'espace complémentaire.

Dans [12], P. Griffiths définit une filtration par l'ordre du pôle P, sur le complexe de de Rham algébrique du complémentaire d'un diviseur D lisse de $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif complexe. Il montre que toute classe de cohomologie peut être représentée par une forme dont le pôle est d'ordre au plus n le long de D. De plus, il exhibe une base du groupe de cohomologie de degré n.

La majoration de l'ordre du pôle a été généralisée dans [3] au complément à une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ non nécéssairement lisse.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'améliorer la majoration de l'ordre du pôle pour des diviseurs réductibles de $\mathbb{P}^2$. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 3. Soient $C_1, \dots, C_n$ n courbes de $\mathbb{P}^2$ définies par les équations irréductibles $f_1 = 0, \dots, f_n = 0$. Alors $H^2(\mathbb{P}^2 \setminus \cup_{i=1}^n C_i)$ est engendré par les formes

$$\frac{P\Omega}{f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3}}, \quad 1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n,$$

où Ω est la contraction de la forme volume de l'espace affine $\mathbb{A}^3$ par le champ de vecteurs d'Euler. Sauf mention du contraire, les groupes de cohomologie sont toujours à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Si l'on pose $U = \mathbb{P}^2 \setminus \cup_{i=1}^{n} C_i$, alors U est une variété affine, donc d'après [14], U a le type topologique d'un CW-complexe de dimension 2. Donc $b_k(U) = 0$, pour tout $k > 2$, $b_k(U)$ étant le k-ième nombre de Betti de U.

Comme U est connexe, $b_0(U) = 1$ et nous savons, d'aprés [5] que $b_1(U) = b^0_{2n-2}(C) = n(C) - 1$ où $n(C)$ est le nombre de composantes irréductibles de la courbe C. Si l'on décompose g en ses facteurs irréductibles $g = g_1 \dots g_k$, il est facile de voir que les formes :

$$\omega_i = (dg_i)/g_i - (n_i/n)(dg/g)$$

où $n_i = \deg g_i$ et $n = d$, engendrent $H^1(U)$ et ont pour unique relation : $\sum \omega_i = 0$. Le reste de ce chapitre est dévolu a l'étude de $H^2(U)$.

1.2 Cas de deux courbes

Nous commencons par étudier le cas de deux courbes : C_1 et C_2. Si l'on note $U_1 = \mathbb{P}^2 - C_1$ et $U_2 = \mathbb{P}^2 - C_2$ on peut écrire la suite exacte longue de Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{lll} \to & H^2(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{\alpha} & H^2(U_1) \oplus H^2(U_2) \to H^2(U_1 \cap U_2) \\ \xrightarrow{\delta} & H^3(U_1 \cup U_2) \to & 0 \end{array}$$

En effet, comme U_1 et U_2 sont des surfaces affines complexes, d'après [14], U_1 et U_2 ont le type topologique d'un CW-complexe de dimension 2 et donc $H^3(U_1) = H^3(U_2) = 0$. Si l'on pose $A = \mathbb{P}^2 \setminus (U_1 \cup U_2)$, A est fini donc la suite exacte :

$$H_2(A) = 0 \to H_2(\mathbb{P}^2) = \mathbb{C} \to H_2(\mathbb{P}^2, A) \to \quad (1.1)$$
$$\to H_1(A) = 0 \quad (1.2)$$

donne $H^2(U_1 \cup U_2) = \mathbb{C}$ par la dualité d'Alexander. Pour finir, on écrit :

$$H^1(U_1) \oplus H^1(U_2) \to H^1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta'} H^2(U_1 \cup U_2) \to \quad (1.3)$$

avec $H^2(U_1 \cup U_2) = \mathbb{C}$ et
- $b_1(U_1) = n(C_1) - 1$,
- $b_1(U_2) = n(C_2) - 1$,

– $b_1(U_1 \cap U_2) = n(C_1) + n(C_2) - 1$.

où $n(C_i)$ désigne le nombre de composantes irréductibles de la courbe C_i et donc δ' est un épimorphisme. Le fait que δ' soit un épimorphisme implique que $\alpha = 0$.

Les résultats de [12] dans le cas lisse et [3] s'appliquent à $H^2(U_1)$ et $H^2(U_2)$. Pour décrire $H^2(U_1 \cap U_2)$, il suffit donc de trouver une caractérisation de $H^3(U_1 \cup U_2)$.

On a la suite exacte suivante :

$$H^3(\mathbb{P}^2) \to H^3(\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cap C_2)) \to H^4(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cap C_2)) \xrightarrow{\psi} H^4(\mathbb{P}^2)$$

où $H^3(\mathbb{P}^2) = 0$, $H^4(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cap C_2)) \simeq \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|}$ par la dualité d'Alexander, $H^4(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{C}$ et ψ est donnée par :

$$\psi((\alpha_1, \ldots, \alpha_{|C_1 \cap C_2|}) = \sum \alpha_i$$

On peut donc voir $H^3(U_1 \cup U_2)$ comme le sous-espace de $\mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|}$ donné par $ker\psi$.

Le morphisme de connection δ de la suite de Mayer-Vietoris peut alors s'écrire :

$$\begin{array}{llll} \delta : & H^2(U_1 \cap U_2) & \to \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|} \supset H^3(U_1 \cup U_2) \\ & \omega & \mapsto (\mathrm{Res}_{p_i} \omega)_{p_i \in C_1 \cap C_2} \end{array}$$

D'après le théorème des résidus [8] pp.656, $\sum_{p_i \in C_1 \cap C_2} \mathrm{Res}_{p_i}(\omega) = 0$, donc l'image de δ est bien contenue dans $H^3(U_1 \cup U_2)$.

Dans tout ce chapitre $\mathbb{C}_d[X_1, \ldots, X_n]$ designera l'espace des polynômes homogènes de degré d en les variables $X_1, \ldots, X_n$ à coefficients complexes.

Nous pouvons définir une application :

$$\begin{array}{lll} \phi : & \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X, Y, Z] & \to H^3(U_1 \cup U_2) = \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2| - 1} \\ & P & \to \left(\mathrm{Res}_{p_i} \dfrac{P\Omega}{f_1 f_2} \right)_{p_i \in C_1 \cap C_2} \end{array}$$

où Ω est la contraction de la forme volume de l'espace affine $\mathbb{A}^3$ par le champ de vecteurs d'Euler. De manière plus explicite, si (X, Y, Z) est un système de coordonnées de l'espace affine $\mathbb{A}^3$ alors :

$$\Omega = XdY \wedge dZ - YdX \wedge dZ + ZdX \wedge dY$$

Le résultat suivant est bien connu, voir [11], [19], section 7.

Théorème 4. L'application ϕ est surjective.

Nous proposons deux démonstrations de ce théorème. Une démonstration élémentaire et une démonstration avec la théorie de Hodge. On peut trouver une version plus générale de ce résultat dans [11] pp.373 (valable pour n diviseurs positifs sur une variété de dimension n).

Démonstration. (élémentaire) La démonstration se fait en deux étapes. On considère tout d'abord le cas où les courbes ont une intersection transverse. Dans ce cas, nous pouvons calculer simplement le noyau de ϕ :

$$\begin{aligned} ker\phi &= \{h \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]/ \quad \mathrm{Res}_{p_i} h = 0 \quad p_i \in C_1 \cap C_2\} \\ &= \{h \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]/ \quad h \in (f,g)_x \quad \forall x \in \mathbb{P}^2\} \end{aligned}$$

où $(f,g)_x$ désigne l'idéal engendré par f et g dans l'anneau local en x. Donc d'apres le théorème de Max Noether [8] pp.703, le noyau de ϕ est l'intersection de l'idéal de $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ engendré par (f,g) avec $\mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]$, que nous noterons $(f,g)_{d_1+d_2-3}$.

$\phi : \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z] \to H^3(U_1 \cup U_2) = \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|-1}$ se factorise donc par une application injective

$$\hat{\phi} : \frac{\mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]}{(f,g)_{d_1+d_2-3}} \to \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|-1}$$

Pour montrer que ϕ est surjective, il suffit de montrer que

$$\dim \frac{\mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]}{(f,g)_{d_1+d_2-3}} = d_1 d_2 - 1.$$

Comme (f,g) définit une intersection complète de $\mathbb{P}^2$, [4] pp.109 nous donne le polynôme de Hilbert associé à une telle intersection. On peut donc vérifier le résultat en calculant le $(d_1 + d_2 - 3^{ieme})$ coefficient du développement de Taylor à l'origine de la fraction rationnelle :

$$P(t) = \frac{(t^{d_1} - 1)(t^{d_2} - 1)}{(1-t)^3}$$

Soit maintenant $\mathcal{A}$ l'espace des courbes dont l'intersection en un point de $\mathbb{P}^2$ n'est pas transverse :

$$\mathcal{A} = \{(f,g,x) \in \mathbb{C}_d[X,Y,Z] \times \mathbb{C}_{d'}[X,Y,Z] \times \mathbb{P}^2 / \mu_x(C_f, C_g) > 1\}$$

où $\mu_x(C_f, C_g)$ est la multiplicité d'intersection des courbes C_f et C_g muni d'une projection p_1 sur $\mathbb{C}_d \times \mathbb{C}_{d'}$ et p_2 sur $\mathbb{P}^2$. Toutes les fibres de p_2 ont la même dimension. En dehors d'un fermé de Zariski, d'après le théorème de Bezout, p_1 a une fibre finie. Donc $\mathcal{A}$ est une sous-variété de $\mathbb{C}_d[X,Y,Z] \times \mathbb{C}_{d'}[X,Y,Z] \times \mathbb{P}^2$ de dimension $\begin{pmatrix} d+d'+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc comme $\mathbb{P}^2$ est une variété complète, $p_1(\mathcal{A})$ est une sous-variété de $\mathbb{C}_d[X,Y,Z] \times \mathbb{C}_{d'}[X,Y,Z]$.

Soient $(f,g) \in \mathcal{A}$ deux polynômes de degrés respectifs d_1 et d_2. Les courbes associées ont pour intersection les points $p_1, \ldots, p_n$ d'ordres $o_1, \ldots, o_n$. D'après le théorème de Bezout, on a $\sum o_i = d_1 d_2$. Comme $p_1(\mathcal{A})$ est une sous-variété de $\mathbb{C}_d[X,Y,Z] \times \mathbb{C}_{d'}[X,Y,Z]$, il existe une déformation (f_t, g_t) de (f,g) avec des courbes lisses transverses pour $t \neq 0$.

Pour $\eta > 0$ petit, $\exists \epsilon > 0$ tel que la boule de centre p_i, $\quad i = 1 \ldots n$ de rayon η contienne exactement o_i points de $C_{f_t} \cap C_{g_t}$, $\quad 0 < t < \epsilon$, que l'on notera p_{ti}^j, $\quad i = 1 \ldots n$, $\quad j = 1 \ldots o_i$.

On se donne maintenant une norme quelconque sur l'espace des polynômes de degré $d_1 + d_2 - 2$. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ et pour $0 < t < \epsilon$, soit V_t^i l'espace des polynômes P_t de degré $d_1 + d_2 - 2$ qui vérifient :

$$\sum_{j=1}^{o_i} \mathrm{Res}_{p_{ti}^j} \frac{P_t \Omega}{f_t g_t} = \alpha_i \quad i = 1 \ldots n$$

Pour chaque t soit P_t^0 le polynôme de $\cap V_t^i$ de norme minimale.

Remarquons tout d'abord que pour tout $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, nous avons $\lim_{t \to 0} d(0, V_t^{i_0}) < +\infty$. Supposons le contraire. Si $P \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-2}[X,Y,Z]$, ou bien

$$\sum_{j=1}^{o_{i_0}} \mathrm{Res}_{p_{ti_0}^j} \frac{P\Omega}{f_t g_t} = 0,$$

ou bien il existe $\lambda_t \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_t \sum_{j=1}^{o_{i_0}} \mathrm{Res}_{p_{ti_0}^j} \frac{P\Omega}{f_t g_t} = \alpha_{i_0}$ et par hypothèse on a $\lim_{t \to 0} |\lambda_t| = +\infty$. Dans les deux cas, on obtient :

$$\lim_{t \to 0} \sum_{j=1}^{o_{i_0}} \mathrm{Res}_{p_{ti_0}^j} \frac{P\Omega}{f_t g_t} = 0$$

donc d'après le principe de continuité des résidus [8] pp.657, pour tout $P \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-2}[X,Y,Z]$, $\mathrm{Res}_{p_{i_0}} \frac{P\Omega}{fg} = 0$, ce qui est une contradiction.

Supposons alors que $\lim_{t\to 0}||P_t^0|| = +\infty$. Cela signifierait qu'il existe $i_0, i_1 \in \{1,\ldots,n\}$ tels que les hyperplans $\lim_{t\to 0} V_t^{i_0}$ et $\lim_{t\to 0} V_t^{i_1}$ soient parallèles ce qui voudrait dire que pour tout polynôme P de degré d_1+d_2-2,

$$\mathrm{Res}_{p_{i_0}} \frac{P\Omega}{fg} = \mathrm{Res}_{p_{i_1}} \frac{P\Omega}{fg}$$

ce qui constitue une contradiction.

Donc il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-2}[X,Y,Z]$ tel que $P = \lim P_n$ où les P_n vérifient $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Res}_{p_i} \frac{P_n\Omega}{fg} = \alpha_i$. Le principe de continuité des résidus permet de conclure. □

La deuxième démonstration de ce théorème utilise la théorie de Hodge. Rappelons brièvement comment on peut définir la filtration de Hodge sur la cohomologie de $U = \mathbb{P}^2\backslash(C_1 \cup C_2)$ et plus généralement sur la cohomologie de toute variété algébrique d'après [2]. Nous savons qu'il existe un morphisme birationnel $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ avec X une variété projective $D = \pi^{-1}(C_1 \cup C_2)$ un diviseur à croisements normaux de X. Le morphisme π induit un isomorphisme $X\backslash D \simeq U$. Soit j l'inclusion de U dans X. On a

$$H^*(U) = \mathbb{H}^*(X, \mathrm{Rj}_*\mathbb{C}_\mathrm{U}) = \mathbb{H}^*(\mathrm{X}, \Omega^*_\mathrm{X}(\mathrm{logD}))$$

où $\Omega^*_X(\log D))$ désigne le complexe logarithmique. Rappelons que l'on définit $\Omega^1_X(\mathrm{logD}))$ comme le sous-$\mathcal{O}$-module localement libre de $j_*\Omega^*_X$ engendré par Ω^*_X et les $\frac{dz_i}{z_i}$ où z_i est une équation locale d'une composante irréductible locale de D, et :

$$\Omega^2_X(\mathrm{logD})) = \bigwedge^2 \Omega^1_\mathrm{X}(\mathrm{logD}))$$

La filtration de Hodge sur $H^*(U)$ est la filtration induite par la filtration bête $(\sigma_\geq)$ sur le complexe logarithmique :

$$F^pH^k(U) = \quad \text{l'image de} \quad \mathbb{H}^k(X, \sigma_{\geq p}\Omega^*_X(\log D)) \quad \text{dans} \quad H^k(U)$$

Rappelons que si K^* est un complexe dans une catégorie abélienne, alors la filtration bête $\sigma_{\geq p}K$ est par définition le sous-complexe de K^* : $(\sigma_{\geq p}K)^i = K^i$ si $i \geq p$ et 0 si $i < p$.

La première suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de faisceaux $\Omega^*_X(\log D)$ coïncide avec la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe filtré $(\Omega^*_X(\log D), \sigma_\geq)$:

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_X(\log D)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \Omega^*(\log D))$$

Cette suite spectrale dégénère en E_1 d'après [2]. En particulier :

$$F^2H^2(U) \simeq \Gamma(X, \Omega^2(\log D))$$

La démonstration du théorème 4 utilise le point 2 du lemme suivant :

Lemme 1.
1. $F^1(H^2(U_1 \cap U_2)) = H^2(U_1 \cap U_2)$
2. $F^2(H^3(U_1 \cup U_2)) = H^3(U_1 \cup U_2)$

Démonstration.
1. D'après [2] pp. 39, il suffit de montrer que $h^{0,2}(H^2(U_1 \cap U_2)) = 0$. Le résultat de [10] montre que les nombres de Hodge se comportent bien pour la dualité d'Alexander :

   $$h^{0,2}(H^2(U_1 \cap U_2)) = h^{2,0}(H^2(\mathbb{P}^2, C_1 \cup C_2))$$

   La suite exacte longue :

   $$\to H^1(C_1 \cup C_2) \to H^2(\mathbb{P}^2, C_1 \cup C_2) \to H^2(\mathbb{P}^2)$$

   où $H^2(\mathbb{P}^2)$ est de type (1,1) et $h^{2,0}(H^1(C_1 \cup C_2)) = 0$ ce qui permet de conclure.
2. En utilisant la première partie et [2] pp. 39, il suffit de montrer que $h^{1,2}(H^3(U_1 \cap U_2)) = 0$. On procède de la même manière que dans la démonstration précédente.

□

Preuve du théorème 4. D'après le lemme, nous avons la suite exacte :

$$F^2(H^2(U_1)) \oplus F^2(H^2(U_2)) \xrightarrow{\rho} F^2(H^2(U_1 \cap U_2)) \xrightarrow{\delta} H^3(U_1 \cup U_2) \to 0 \quad (1.4)$$

Cela veut dire que, pour n'importe quelle classe de cohomologie α de $H^3(U_1 \cup U_2)$, on peut trouver une forme différentielle ω telle que $\delta(\omega) = \alpha$ et où $\pi^*(\omega)$ est une forme du complexe logarithmique de degré 2. En particulier, $\pi^*(\omega)$ a des pôles simples le long de $\pi^{-1}(C_1 \cup C_2)$ donc ω a des pôles simples le long de $C_1 \cup C_2$ car π est un isomorphisme en dehors d'un ensemble de codimension 2 (étant une composition d'éclatements de points). □

Corollaire 1. Si l'on pose $U = U_1 \cap U_2$, nous avons :
1. $\dim Gr_F^1 H^2(U) = \dim Gr_F^1 H^2(U_1) + \dim Gr_F^1 H^2(U_2)$,
2. $\dim Gr_F^2 H^2(U) = dim Gr_F^2 H^2(U_1) + dim Gr_F^2 H^2(U_2) + |C_1 \cap C_2| - 1$.

Démonstration. Nous avons les suites exactes suivantes :

$$0 \to F^1(H^2(U_1) \oplus F^1(H^2(U_1)) \to F^1H^2(U) \to F^1H^3(U_1 \cup U_1) \tag{1.5}$$

$$0 \to F^2H^2(U_1) \oplus F^2H^2(U_1) \to F^2H^2(U) \to F^2H^3(U_1 \cup H_2) \tag{1.6}$$

La première partie du corollaire découle immédiatement des deux suites exactes précédentes et de l'égalité :

$$F^1H^3(U_1 \cup U_1) = F^2H^3(U_1 \cup H_2).$$

La deuxième partie provient de la deuxième suite exacte et du fait que $dimH^3(U_1 \cup U_2) = |C_1 \cap C_2| - 1$. □

1.3 Cas de n courbes

Théorème 5. Soient $C_1, \dots, C_n$ n courbes de $\mathbb{P}^2$ définies par les équations irréductibles $f_1 = 0, \dots, f_n = 0$. Alors $H^2(\mathbb{P}^2 \setminus \cup_{i=1}^n C_i)$ est engendré par les formes $\frac{P\Omega}{f_{i_1}f_{i_2}f_{i_3}}$, $1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n$.

Démonstration. Nous allons faire une preuve par récurrence. Le théorème est vrai pour

1. $k = 2$ d'après le théorème 1.
2. $k = 3$ en appliquant le théorème 1 aux courbes d'équations (f_1f_2, f_3).

Pour poursuivre la démonstration nous aurons besoin du résultat suivant :

Proposition 2. Si l'on note par $P_1, \dots, P_n$ les points d'intersection des courbes $C_1, \dots, C_\nu$ et soient $R_1, \dots, R_n$ tels que $\sum R_i = 0$ alors il existe une forme fermée ω engendrée par les $\frac{P\Omega}{f_if_jf_k}$ telle que $\mathrm{Res}_{p_i}\omega = R_i$.

Démonstration. On considère le graphe dont les sommets sont les points $P_1, \dots, P_n$. Deux points sont reliés par une arête s' ils sont sur une même courbe.

Soient les points (P_i, λ_i) munis de poids tels que $\sum \lambda_i = 0$. Si P_k et P_l sont sur une même arête, on considère les transformations :

$$\tau_{kl}((P_k, \lambda_k), \lambda) = (P_k, \lambda_k + \lambda),$$

$$\tau_{kl}((P_l, \lambda_l), \lambda) = (P_l, \lambda_l - \lambda),$$

$$\tau_{kl}((P_m, \lambda_m), \lambda) = (P_m, \lambda_m) \quad m \neq k, l.$$

□

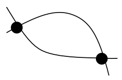
On a le lemme :

Lemme 2. Il existe une suite finie $(k_i, l_i, \lambda_i) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{C}, i \in \{1 \dots p\}$, telle que $\forall i \in \{1 \dots p\}$, P_{k_i} et P_{l_i} soient sur une même arête et

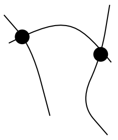
$$\circ \tau_{k_i l_i}(\lambda_i)((P_1, 0), \dots, (P_N, 0)) = ((P_1, R_1), \dots, (P_N, R_N))$$

Considérons l'application ϕ qui a une forme $\omega = \frac{P\Omega}{f_i f_j f_k}$ fait correspondre $((P_1, \mathrm{Res}_{p_i}\omega), \dots, (P_N, \mathrm{Res}_{p_N}\omega))$ alors pour tout triplet (k_i, l_i, λ_i) permis, il existe une forme ω_0 telle que $\phi(\omega + \omega_0) = \tau_{k_i, l_i}(\lambda)(\phi(\omega))$.

Démonstration. Deux cas :



1. Si P_k et P_l sont traversés par deux courbes alors ω_0 est de la forme $\frac{P\Omega}{f_\tau f_{\tau'}}$ en utilisant le théorème avec $k = 2$.



2. Si P_k et P_l sont traversés par trois courbes alors ω_0 est de la forme $\frac{P\Omega}{f_\tau f_{\tau'} f_{\tau''}}$ en utilisant le théorème avec $k = 3$.

Cela permet de conclure. □

Fin de la démonstration. On a la suite exacte :

$$\begin{aligned} H^2(\mathbb{P}^2 \backslash C_{k+1}) \oplus H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \cup_{i=1}^{k} C_i) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \cup_{i=1}^{k+1} C_i) \\ \overrightarrow{\delta}\ H^3(\mathbb{P}^2 \backslash C_{k+1} \cap (\cup_{i=1}^{k} C_i)) \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Soient $P_1, \dots, P_N$ les points d'intersection de $C_{k+1} \cap (\cup_{i=1}^{k} C_i)$. Le morphisme δ s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} \delta : & H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \cup_{i=1}^{k+1} C_i) & \rightarrow \mathbb{C}^{N-1} \\ & \omega \rightarrow (\mathrm{Res}_{p_1}\omega, \dots, \mathrm{Res}_{p_N}\omega) & \end{array}$$

L'hypothèse de récurrence et le théorème permettent de conclure. □

La théorie de Hodge donne des informations supplémentaires que nous allons utiliser dans les exemples qui suivent.

On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} j : & \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X, Y, Z] & \rightarrow H^2(\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2)) \\ & h & \rightarrow \left[\dfrac{h\Omega}{f_1 f_2} \right] \end{array}$$

Soient

$$V_0 = \{h \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]/ \quad j(h) \in Im\rho\}$$

où ρ a été défini dans la suite exacte (1.4).

$$V = \left\{h \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]/ \quad j(h) \in F^2(H^2(U_1 \cap U_2))\right\}$$

Alors on a $V_0 = V \cap (f_1, f_2)$. En effet, V est l'ensemble des h tels que $\pi^*(j(h)) \in \Gamma(\Omega^2(\log(X))$ où (π, X) est une résolution de $\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2)$. Si par exemple, $\omega \in F^2(H^2(U_1))$ alors $\pi^*(\omega)$ ne peut avoir de pôles qu'au dessus de $\pi^{-1}(C_1)$ et ces pôles sont simples. Donc ω ne peut avoir de pôle que le long de C_1 et ces pôles sont simples. Donc $h \in (f_2)$.

Ainsi si l'on pose $\tilde{V} = V/V_0$ alors j définit un isomorphisme de $\delta(\tilde{V})$ dans $Im\delta$.

1.4 Exemples

Rappelons tout d'abord les résultats de l'article [12] dans le contexte dans lequel nous allons les utiliser. Si C est une courbe lisse de $\mathbb{P}^2$ donnée par une équation $f \in \mathbb{C}_d[X,Y,Z]$, nous pouvons définir une filtration par l'ordre du pôle (P) sur le complexe de de Rham algébrique du complément $U = \mathbb{P}^2 \backslash C$ à la courbe C par :

$$P^p(\Gamma(\Omega^q(U))) = \{\omega \in \Gamma(\Omega^q(U); ord_C(\omega) \leq q - p + 1\}$$

Cette filtration induit une filtration sur la cohomologie de U et nous avons les inclusions :

$$0 = P^3(H^2(U)) \subseteq P^2(H^2(U)) \subseteq P^1(H^2(U)) = H^2(U))$$

Nous avons les isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}_{d-3}[X,Y,Z] & \rightarrow & P^2(H^2(U)) \\ h & \rightarrow & \text{classe de} \quad \dfrac{h\Omega}{f} \quad \text{dans} \quad P^2(H^2(U)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \left(\mathbb{C}[X,Y,Z]/(\dfrac{\partial f}{\partial X}, \dfrac{\partial f}{\partial Y}, \dfrac{\partial f}{\partial Z})\right)_{2d-3} & \rightarrow & Gr_P^1(H^2(U)) \\ h & \rightarrow & \text{classe de} \quad \dfrac{h\Omega}{f^2} \quad \text{dans} \quad Gr_P^1(H^2(U)) \end{array}$$

où $\left(\mathbb{C}[X,Y,Z]/(\frac{\partial f}{\partial X},\frac{\partial f}{\partial Y},\frac{\partial f}{\partial Z})\right)_{2d-3}$ désigne la composante homogène de degré $2d-3$ de l'anneau gradué $\left(\mathbb{C}[X,Y,Z]/(\frac{\partial f}{\partial X},\frac{\partial f}{\partial Y},\frac{\partial f}{\partial Z})\right)$.

De plus, $Gr^1_P(H^2(U))$ et $P^2(H^2(U))$ ont la même dimension qui correspond au genre de la courbe C.

Si maintenant, C est réunion de deux courbes lisses C_1 et C_2 données par des équations $f_1=0$ et $f_2=0$ de degrés respectifs d_1 et d_2, grâce aux résultats de ce chapitre nous pouvons écrire :

$$H^2(U_1)\oplus H^2(U_2)\oplus\tilde{V}\simeq H^2(U_1\cap U_2)$$

Et les résultats de [12] nous donnent pour $i=1,2$

$$H^2(U_i)\simeq\mathbb{C}_{d_i-3}[X,Y,Z]\oplus(\mathbb{C}[X,Y,Z]/(\frac{\partial f_i}{\partial X},\frac{\partial f_i}{\partial Y},\frac{\partial f_i}{\partial Z}))_{2d_i-3} \tag{1.8}$$

Pour avoir une base de $H^2(U_1\cap U_2)$, il nous suffit donc d'obtenir une base de l'espace vectoriel $\tilde{V}$ ce que nous faisons dans les exemples suivants.

Remarque 1. La propriété qu'une forme $\omega=\frac{h\Omega}{f_1f_2}$ soit dans $F^2(H^2(\mathbb{P}^2\backslash(C_1\cup C_2)))$ se vérifie localement en chaque point singulier p en calculant une désingularisation locale de $C_1\cup C_2$. Si p est une singularité de type A_1 c'est-à-dire si C_1 et C_2 se coupent transversalement en p alors il n'y a aucune condition à vérifier.

Pour les singularités de type A_3 on obtient une condition très simple et indépendante des coordonnées locales : si $\omega=\frac{h\Omega}{f_1f_2}$ alors il suffit que $h(p)=0$.

Pour voir cela, on peut supposer que dans un système de coordonnées dans un voisinage U de p, la singularité de type $C=A_3$ ait pour équation :

$$x^4+y^2=0$$

Alors ω s'écrit :

$$\omega=\frac{h(x,y)dx\wedge dy}{x^4+y^2}$$

Les figures 1.1, 1.2, 1.3 permettent de suivre les étapes de la résolution de C par des éclatements.

Soit $\pi_1:U_1\to U$ l'éclaté de U au point p et soit $\omega_1=\pi_1^*(\omega)$. Dans l'ouvert, $\pi_1^*(x)\neq 0$ de U_1, le morphisme π_1 est donné par : $x=u, y=uv$, et le diviseur exceptionnel E_0 a pour équation $u=0$. On notera C_1 la transformée stricte de C et $p_1=C_1\cap E_0$. Il vient :

$$\omega_1=\frac{h(u,uv)du\wedge dv}{u(u^2+v^2)} \tag{1.9}$$

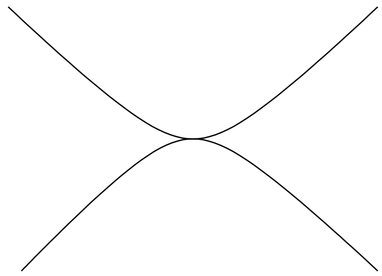


FIG. 1.1 – Singularité de type A_3

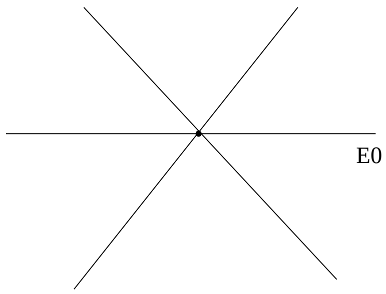


FIG. 1.2 – Singularité de type A_3 après un éclatement

Soit $\pi_2 : U_2 \to U_1$ l'éclaté de U_1 au point p_1 et soit $\omega_2 = \pi_2^*(\omega_1)$. Dans l'ouvert $v \neq 0$, le deuxième éclatement est donné par $u = wt, v = t$, le diviseur exceptionnel E_1 a pour équation $t = 0$. Il vient :

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{h(wt, wt^2)}{t(w^2+1)} \frac{dw}{w} \wedge \frac{dt}{t} \\ &= \frac{h(wt, wt^2)}{t(w-i)(w+i)} \frac{dw}{w} \wedge \frac{dt}{t} \end{aligned} \tag{1.10}$$

La courbe $\pi_2^{-1}(C)$ est un diviseur à croisement normaux. Pour vérifier que ω^2 est dans le complexe logarithmique il suffit de vérifier que ω^2 a des pôles simples en q,q',q''. Pour cela il faut et il suffit que t soit un facteur de $h(wt, wt^2)$ et donc il suffit que $h(p) = 0$.

Nous en venons maitenant aux exemples annoncés.

Exemple 1 (cubique avec une tangente simple)**.** On considère les courbes C_1 et C_2 données par leurs equations homogènes :

$$C_1 : \quad X^3 + XY^2 + Z^3 = 0$$

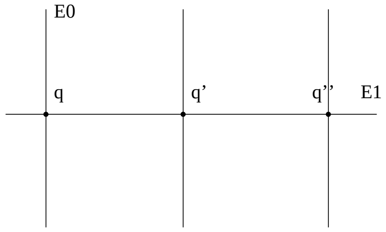


FIG. 1.3 – Singularité de type A_3 après deux éclatements

$$C_2 : \quad X + Z = 0$$

$C_1 \cap C_2 = \{(1 : 0 : -1), (0 : 1 : 0)\}$. Nous cherchons une base de l'espace vectoriel $\tilde{V}$. $(1 : 0 : -1)$ est un point double et $(0 : 1 : 0)$ est un point simple d'intersection entre les courbes C_1 et C_2. Donc la courbe $C_1 \cup C_2$ a une singularité de type A_3 en $(1 : 0 : -1)$ et une singularité de type A_1 en $(0 : 1 : 0)$.

$$\omega = \frac{h\Omega}{f_1 f_2} \in F^2(H^2(\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2))) \Rightarrow h((1 : 0 : -1)) = 0$$

d'après la remarque qui précède. Une base de $\tilde{V}$ est donc $\{Y\}$.

Et une base de $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash C_1 \cup C_2)$ est donc donnée par les classes des formes :

$$\left(\frac{\Omega}{f_1}, \frac{hess(f_1)\Omega}{f_1^2}, \frac{Y\Omega}{f_1 f_2} \right)$$

où $hess(f_1)$ est le Hessien de f_1.

Exemple 2 (cubique et conique tangentes en trois points)**.** On considère les courbes C_1 et C_2 donnée par leurs équations homogènes :

$$C_1 : \quad XY + YZ + ZX = 0$$

$$C_2 : \quad X^2(X + Z) + Y^2(X + Z) + Z^2(X + Y) = 0$$

Ces deux courbes s'intersectent en trois points A, resp. B, resp. C de coordonnées homogènes (1 :0 :0), resp. (0 :1 :0), resp. (0 :0 :1) qui sont singuliers de type A_3 pour la réunion $C_1 \cup C_2$. D'après la remarque :

$$\omega = \frac{h\Omega}{f_1 f_2} \in F^2(H^2(\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2))) \Rightarrow h(A) = h(B) = h(C) = 0$$

Une base de $\tilde{V}$ est donc : XY, YZ car

$$[XZ] = -[XY] - [YZ]$$

dans $\tilde{V}$.

Et une base de $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash C_1 \cup C_2)$ est donc donnée par les classes des formes :

$$\left(\frac{\Omega}{f_2}, \frac{hess(f_2)\Omega}{f_2^2}, \frac{XY\Omega}{f_1 f_2}, \frac{YZ\Omega}{f_1 f_2} \right)$$

Exemple 3 (courbe affine lisse se comportant bien à l'infini)**.** On considère la courbe de l'espace affine $\mathbb{C}^2$ donnée par son équation $(f = 0)$

$$f = f_0 + \ldots + f_d$$

que l'on décompose en somme de composantes homogènes. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- la courbe C de $\mathbb{P}^2$ définie par l'homogènéisée de f : $\tilde{f}(X, Y, Z) = f_0 Z^d + \ldots + f_d$ est lisse.
- Soit $L_\infty : Z = 0$ la droite à l'infini. Alors $|L_\infty \cap C| = d$

On veut calculer $\delta(H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \{C \cup L_\infty\}))$. D'après le théorème de Bezout tous les points d'intersections de L_∞ avec C sont simples. On peut donc prendre pour base de $\tilde{V}$, $(X^i Y^{d-2-i})_{i=0}^{d-2}$.

Comme $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash L_\infty) = 0$, on a

$$H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \{C \cup L_\infty\}) \simeq \mathbb{C}_{d-3}[X, Y, Z] \oplus \left(\mathbb{C}[X, Y, Z] / (\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z}) \right)_{2d-3} \oplus \tilde{V}$$

Exemple 4 (cubique avec une tangente d'inflexion)**.** On considère les courbes C_1 et C_2 données par leurs équations homogènes :

$$C_1 : X^3 + XY^2 + Z^3 = 0 \tag{1.11}$$

$$C_2 : X = 0 \tag{1.12}$$

Nous avons $C_1 \cap C_2 = \{(0 : 1 : 0)\}$ donc si l'on note $U_1 = \mathbb{P}^2 \backslash C_1$ et $U_2 = \mathbb{P}^2 \backslash C_2$ on a

$$H^2(U_2) \oplus H^2(U_1) \tilde{\to} H^2(U)$$

Comme $U_2 \simeq \mathbb{C}^2$, $H^2(U_2) = 0$. Comme le genre de la courbe C_1 est 1, on peut représenter $H^2(U_2)$ par des formes $\{\frac{\Omega}{f}, \frac{h\Omega}{f^2}\}$ où $h \notin \mathcal{J}_f$ l'idéal Jacobien de f et $\deg h = 3$. Par définition :

$$\mathcal{J}_f = (3X^2 + Y^2, 2XY, 3Z^2)$$

Les termes de degré 3 dans $\mathcal{J}_f$ sont engendré par des combinaisons linéaires des :

$$\{XZ^2, YZ^2, Z^3, X^2Y, XY^2, XYZ, X^3, Y^3, 3X^2Z + Y^2Z\}$$

Nous pouvons donc prendre $h = X^2Z$.

Le fait que $X^3 \in \mathcal{J}_f$ implique l'existence d'une 2-forme γ telle que :

$$X^3 dX \wedge dY \wedge dZ = df \wedge \gamma$$

D'après la formule de [5][pp. 181] nous pouvons écrire :

$$d\left(\frac{\Delta(\beta)}{fX^3}\right) = -\frac{\Delta(Xd\beta - 3dX \wedge \beta)}{fX^4} + \frac{\Delta(df \wedge \beta)}{f^2X^3}$$

où Δ est la contraction avec le champ de vecteurs de Euleur : $X\frac{\partial}{\partial X} + Y\frac{\partial}{\partial Y} + Z\frac{\partial}{\partial Z}$.

Soit en posant $\beta = X^2Z\gamma$,

$$\frac{\Delta(df \wedge \beta)}{f^2X^3} = \frac{X^2ZX^3\Omega}{f^2X^3} = \frac{X^2Z\Omega}{f^2}.$$

Nous avons :

$$X^3 = \frac{1}{3}Xf_x - \frac{1}{6}Yf_y,$$

$$\gamma = \frac{1}{3}XdY \wedge dZ + \frac{1}{6}YdX \wedge dZ,$$

$$\beta = X^2Z\gamma = \frac{1}{3}X^3ZdY \wedge dZ + \frac{1}{6}X^2YZdX \wedge dZ.$$

Soit

$$d\beta = X^2Z\omega + \frac{1}{6}X^2Z\omega$$

$$Xd\beta = \frac{7}{6}X^3Z\omega$$

$$dX \wedge \beta = \frac{1}{3}X^3Z\omega$$

en posant $\omega = dX \wedge dY \wedge dZ$. Nous avons donc :

$$-\frac{\Delta(Xd\beta - 3dX \wedge \beta)}{fX^4} = \frac{1}{6}\frac{Z\Omega}{fX}$$

Ce qui montre que :

$$\left[\frac{h\Omega}{f^2}\right] = -\frac{1}{6}\left[\frac{z\Omega}{fX}\right]$$

Donc l'isomorphisme :

$$H^2(U_1)\tilde{\to}H^2(U)$$

n'est pas compatible avec la filtration par l'ordre du pôle, en effet :

$$P^2H^2(U) = H^2(U) \quad \text{mais}$$

$$P^2H^2(U_1) \neq H^2(U_1)$$

On sait par [3] que l'on a toujours une inclusion :

$$F^sH^k(U) \subset P^sH^k(U)$$

pour tout complémentaire $U = \mathbb{P}^n \backslash V$ d'une hypersurface. L'exemple précédent montre qu'en général cette inclusion est stricte, c'est-à-dire :

$$F^sH^k(U) \neq P^sH^k(U).$$

Chapitre 2

Topologie des fonctions régulières sur une surface affine

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les pinceaux de courbes définies par une fonction régulière sur une surface affine donnée comme le complément dans $\mathbb{P}^2$ d'une courbe réduite. Dans le cas où cette dernière courbe est la droite à l'infini, nous retrouvons la situation classique d'un pinceau défini par une fonction régulière de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$.

Nous rappelons dans un premier temps, pour fixer les notations, les principales définitions et théorèmes que nous allons utiliser par la suite.

2.2 Stratifications et conditions de Whitney

Dans toute cette section, X désignera une variété différentiable lisse et $A \subset X$ un sous-ensemble localement fermé de X.

Définition 1. Une stratification de A est une partition localement finie $\mathcal{A}$: $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ de A en des sous-variétés appelées strates.

Définition 2. Si X et Y sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^m$, Y est dite Whitney régulière au dessus de X au point $0 \in X$ si pour toute suite de points x_n de X et y_n de Y convergeant vers 0 et satisfaisant les conditions suivantes :

1. la suite des espaces tangents $T_{y_n}Y$, vus commes des sous-espaces de $\mathbb{R}^m = T_{y_n}\mathbb{R}^m$, converge vers un sous-espace T dans la Grassmannienne.

2. la suite des droites $x_n y_n$ converge vers une droite l dans la Grassmannienne des droites passant par l'origine.

alors $l \subset T$.

Cette définition est invariante par difféomorphisme et donc peut s'étendre au cas des sous-variétés d'une variété fixée X.

Définition 3. Une stratification $\mathcal{A}$ de A est dite de Whitney ou Whitney régulière si pour chaque paire de strates $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, A_2 est Whitney regulière au dessus de A_1 en tout point $x \in \overline{A_2} \cap A_1$ et si de plus elle vérifie la condition de frontière : pour toute strate A_1 de $\mathcal{A}$, l'ensemble $\overline{A_1} \backslash A_1$ est une réunion de strates de $\mathcal{A}$.

Par la suite $(X, \mathcal{X})$ désignera une variété X muni d'une stratification $\mathcal{X}$ qui vérifie les conditions de Whitney.

L'interêt de la définition de Whitney régularité se manifeste par les bonnes propriétés d'homogénéité que vérifient les ensembles Whitney stratifiés qui éliminent des pathologies dont l'exemple le plus classique est celui du parapluie de Whitney. On peut formuler les choses de manière précise grace à la définition et au théorème qui suivent :

Définition 4. Soit $(X, \mathcal{X})$ un sous-ensemble stratifié d'une variété V, x un point de X et A une strate de X contenant x. Nous dirons que $\mathcal{X}$ est topologiquement triviale en x si il existe un ensemble stratifié $(S, \mathcal{S})$, un point $x_0 \in S$ qui est une strate de $\mathcal{S}$, et un homéomorphisme local $h : X \to A \times S$ tels que :

1. $h(x) = (x, x_0)$ pour tout point $x \in A$.
2. h envoie une strate de $\mathcal{X}$ sur une strate de $\mathcal{X}_A \times \mathcal{S}$

Théorème 6. Tout ensemble Whitney stratifié est topologiquement localement trivial.

Ces bonnes propriétés permettent de démontrer le premier théorème d'isotopie de Thom, qui généralise le théorème d'Ehresmann et dont nous ferons un usage essentiel.

Théorème 7. Soit A un ensemble localement fermé dans une variété lisse M et soit $\mathcal{A}$ une stratification de Whitney de A. Soit $f : M \to B$ un morphisme de variétés tel que : $f|A_i : A_i \to B$ soit une submersion et que $f|(\overline{A_i} \cap A)$

soit propre pour chaque strate $A_i \in \mathcal{A}$. Alors f est une fibration localement triviale de A sur B qui respecte la stratification $\mathcal{A}$, i.e., les homéomorphismes de trivialisation : $\phi : (f^{-1}(b) \cap A) \times U \to f^{-1}(U) \cap A$ préservent les strates induites par $\mathcal{A}$ sur la source et l'image de ϕ.

Remarque 2. Le théorème 6 est un cas particulier du théorème 7.

2.3 Nombres de Milnor et μ^*-constance

L'objet de cette section est de présenter un critère qui permet de tester la Whitney-régularité d'une strate le long d'une autre strate. Dans un premier temps, nous rappelons brièvement la définition du nombre de Milnor d'une singularité isolée d'hypersurface.

Soit $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{x_0, \ldots, x_n\}$ la $\mathbb{C}$-algèbre des germes de fonctions analytiques au voisinage de 0 de $\mathbb{C}^n$, et soit $(X, 0)$ la singulatité hyperplane définie par $f \in \mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{x_0, \ldots, x_n\}$ par l'équation $f = 0$. Soit $\epsilon > 0$ un réel suffisamment petit pour que le germe f soit défini dans un voisinage de $\overline{B_\epsilon}$ la boule fermée de centre 0 et de rayon ϵ. Soit K l'intersection de $(X, 0)$ avec S_ϵ^{2n+1} la sphère de rayon ϵ. Avec ces hypothèses, nous avons le :

Théorème 8 (théorème de fibration de Milnor ,[13])**.** L'application

$$\phi : S_\epsilon^{2n+1} \backslash K \to S^1, \qquad \phi(x) = f(x)/|f(x)|$$

où S_ϵ^{2n+1} désigne la sphère de rayon ϵ et de dimension $2n+1$, est une fibration différentiable localement triviale pour ϵ suffisamment petit.

Le théorème suivant donne une description topologique précise de la fibre de Milnor.

Théorème 9 ([13])**.** Si $(X, 0)$ est une singularité hyperplane isolée alors la fibre de Milnor F associée a le type homotopique d'un bouquet de n sphères. Le nombre de ces sphères est donné par la formule :

$$\mu(f, 0) = \mu(X, 0) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J_f}$$

où $J_f = (\partial f/\partial x_0, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ est l'idéal jacobien de f.

Ce nombre est appelé nombre de Milnor de la singularité $(X, 0)$ ou du germe $(f, 0)$.

Définition 5. Soient X_1 et X_2 des hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$. On suppose que $0 \in X_1$ et $0 \in X_2$ sont des points singuliers isolés. On dit alors que X_1 et X_2 ont le même type topologique en 0 s'il existe un homéomorphisme ψ d'un voisinage U de 0 dans un voisinage V de 0 tel que :

$$\psi(X_1 \cap U) = X_2 \cap U \qquad \text{et} \qquad \psi(0) = 0$$

Proposition 3 ([18])**.** Le nombre de Milnor est un invariant topologique de singularité isolée d'hypersurface, i.e., si l'on se donne deux singularités isolées d'hypersurfaces $(X_1, 0)$ et $(X_2, 0)$ qui ont le même type topologique alors $\mu(X_1, 0) = \mu(X_2, 0)$.

Considérons maintenant $\overline{Y} = X \cup Y$ une hypersurface analytique de $\mathbb{C}^{n+1}$ composée d'une strate de dimension 1 notée X et d'une autre strate Y. La condition de Whitney pouvant se vérifier localement, nous nous intéresserons aux germes à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. Soit $(t, x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées à l'origine tel que :

$$X : x_1 = \ldots = x_n = 0$$
$$\overline{Y} = Y \cup X : F(x, t) = 0$$

Nous voulons reformuler le théorème 6 à l'aide des nombres de Milnor. Pour cela, nous considèrons les hyperplans :

$$T_\lambda : t = \lambda$$

et la trace de $\overline{Y}$ sur ces hyperplans :

$$\overline{Y}_\lambda = \overline{Y} \cap T_\lambda : f_\lambda = F(x, \lambda) = 0$$

que l'on peut regarder comme une famille de singularités isolées d'hypersurface à l'origine de $\mathbb{C}^n$ paramétrée par λ. En effet, la condition de Whitney régularité de Y le long de X en 0 implique que $Y_\lambda = Y \cap T_\lambda$ est lisse dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$.

Nous dirons qu'une famille $X_t : f_t = 0, t \in I$ de singularités isolées d'hypersuface est μ-constante si $\mu((X_t, 0))$ est constant en tout $t \in I$. Cette définition permet de reformuler le théorème 6 de la manière suivante :

Proposition 4. Si Y est Whitney régulière sur X à l'origine alors la famille $(\overline{Y_t}, 0)$ de singularités isolées d'hypersurface définie ci-dessus est μ-constante pour $|\lambda|$ suffisamment petit.

Il serait intéressant de disposer d'une réciproque au théorème 4 qui nous donnerait un critère numérique pour tester la Whitney régularité. Pour cela, suivant [17], nous définissons le $\mu^* - invariant$ d'une singularité isolée d'hypersurface V définie par l'équation $f = 0$ à l'origine de $\mathbb{C}^n$ de la manière suivante : Si L est un sous-espace linéaire générique de dimension l de $\mathbb{C}^n$ alors $V \cap L$ définit une singularité isolée d'hypersurface de $(L, 0) \simeq (\mathbb{C}^l, 0)$ dont le type topologique ne dépend pas de L pour L générique. Il suit de [18] que les nombres :

$$\mu^l(V, 0) = \mu(V \cap L, 0)$$

sont bien définis. De plus nous avons les relations évidentes : $\mu^1(V, 0) = \mathrm{mult}_0(V) - 1$ et $\mu^n(V, 0) = \mu(V, 0)$ le nombre de Milnor habituel où $mult_0(V)$ désigne la multiplicité de V en 0.

Définition 6. La suite de nombres :

$$\mu^*(V, 0) = (\mu^1(V, 0), \ldots, \mu^n(V, 0))$$

s'appelle le $\mu^* - invariant$ de la singularité isolée d'hypersurface $(V, 0)$.

En utilisant une autre définition de la suite $\mu^*(V, 0)$ on peut montrer la proposition suivante [17] :

Proposition 5. Le μ^* invariant d'une singularité isolée d'hypersurface est un invariant analytique, i.e., étant données deux singularités isolées d'hypersurfaces $(V_1, 0)$ et $(V_2, 0)$ qui sont analytiquement équivalentes alors on a $\mu^*(V_1, 0) = \mu^*(V_2, 0)$.

Nous pouvons maintenant formuler la proposition suivante qui donne un critère pour vérifier la Whitney régularité le long d'une strate de dimension 1 suivant [17] :

Théorème 10. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Y est Whitney régulière sur X en 0.
2. la famille de singularités isolées hyperplanes $(\overline{Y}_\lambda, 0)$ pour λ suffisamment petit est μ^*-constante, i.e., les $\mu^*(\overline{Y}_\lambda, 0)$ sont les mêmes pour λ suffisamment petit.

2.4 Généalités sur la topologie d'une surface affine $U = \mathbb{P}^2 \backslash C$

Soit $C \in \mathbb{P}^2$ une courbe réduite d'équation $g = 0$, $g \in P[X, Y, Z]$ un polynome homogène de degré d. Alors $U = \mathbb{P}^2 - C$ est une surface affine complexe.

Comme U est une variété affine, d'après [13], U a le type topologique d'un CW-complexe de dimension 2. Donc $b_k(U) = 0$, pour tout $k > 2$.

Comme U est connexe, $b_0(U) = 1$ et nous savons, d'après [5] que $b_1(U) = b^0_{2n-2}(C) = n(C) - 1$ où $n(C)$ est le nombre de composantes irréductibles de la courbe C. Si l'on décompose g en ses facteurs irréductibles $g = g_1 \ldots g_k$, il est facile de voir que les formes :

$$\omega_i = (dg_i)/g_i - (n_i/n)(dg/g)$$

où $n_i = \deg g_i$ et $n = d$, engendrent $H^1(U)$ et ont pour unique relation : $\sum \omega_i = 0$.

Proposition 6. $b_2(U) = 1 - n(C) + (d-1)(d-2) - \sum_{a \in Sing(C)} \mu(C, a)$

Comme $\chi(U) = b_0(U) - b_1(U) + b_2(U)$, d'après ce qui précède, il suffit de calculer $\chi(U)$. D'autre part, du fait de l'additivité de la caractéristique d'Euler, pour les ensembles algébriques complexes, $\chi(U) = \chi(\mathbb{P}^2 \backslash C) = \chi(\mathbb{P}^2) - \chi(C)$. La proposition découle alors de la formule [5][pp. 162] :

$$\chi(C) = 2 - (d-1)(d-2) + \sum_{a \in Sing(C)} \mu(C, a)$$

2.5 Topologie des sections régulières d'une surface affine $U = \mathbb{P}^2 \backslash C$

Soit f une fonction régulière de U que l'on supposera toujours non constante. On peut l'écrire sous la forme :

$$f = \frac{A(X, Y, Z)}{g(X, Y, Z)^m}, \quad avec \quad m \deg g = \deg A$$

En prenant la décomposition de g et A en leur facteurs irréductibles, on peut toujours voir f comme le rapport de deux polynômes premiers entre eux :

$$f = \frac{\overline{A}(X,Y,Z)}{g_1^{m_1} \dots g_k^{m_k}}, \quad \text{avec} \quad \deg \overline{A} = \sum_1^k m_i \deg g_i$$

et $(\overline{A}, \overline{g}) = 1$ où $\overline{g} = g_1^{m_1} \dots g_k^{m_k} \quad (m_i \geq 0)$.

Cette fonction définit un pinceau de courbes affines $F_t = f^{-1}(t)$. On désignera par $\overline{F_t}$ la fermeture de F_t dans $\mathbb{P}^2$.

Dans tout ce qui suit, nous ferons les hypothèses suivantes :

H1 Toutes les fibres sont réduites et donc toutes les singularités sont isolées.

H2 La fibre générique est connexe.

En fait, on peut montrer en utilisant un théorème dû à Bertini que l'hypothèse H1 implique l'hypothèse H2. Nous rappelons tout d'abord le théorème de Bertini dans le contexte qui nous sera utile. Le lecteur pourra consulter le livre [16][pp. 79] pour une référence plus générale.

Théorème 11 (Bertini 1882)**.** Soit $F(X,Y,Z,\Lambda)$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$, homogène en les variables X,Y,Z, que l'on suppose réductible dans $\mathbb{C}(\Lambda)$ et qui vérifie $\deg_\Lambda F = 1$. Alors, $F(X,Y,Z,\lambda)$ est irréductible pour tout choix de $\lambda \in \mathbb{C}$ qui soit tel que

$$\deg_{\{X,Y,Z\}} F(X,Y,Z,\lambda) = \deg_{\{X,Y,Z\}} F(X,Y,Z,\Lambda)$$

si et seulement si on peut écrire $F(X,Y,Z,\Lambda)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} F(X,Y,Z,\Lambda) = a_0(\Lambda)\phi(X,Y,Z)^n + a_1(\Lambda)\phi(X,Y,Z)^{n-1}\psi(X,Y,Z) + \\ \dots + a_n(\Lambda)\psi(X,Y,Z)^n \end{aligned} \tag{2.1}$$

pour $\psi, \phi \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ et $\deg_{\{X,Y,Z\}} F > max(\deg \phi, \deg \psi)$.

Proposition 7. Avec les notations qui précèdent nous avons : H1 implique H2 c'est-à-dire que le fait que les fibres F_t soient réduites implique que la fibre générique est connexe.

Démonstration. Pour montrer que la fibre générique F est connexe il suffit de montrer que son adhérence dans $\mathbb{P}^2$, $\overline{F}$ est irréductible. Supposons donc le contraire. Une équation de la fibre $\overline{F}_t$ s'écrit :

$$\overline{F}_t : \overline{A}(X,Y,Z) - t g_1^{m_1} \dots g_k^{m_k} = 0, \quad t \in \mathbb{C}$$

D'après le théorème sus-cité, le fait que $\overline{F}_t$ ne soit pas irréductible pour t générique implique que :

$$\overline{A}(X,Y,Z) - tg_1^{m_1}\dots g_k^{m_k} = P(\phi,\psi) \in \mathbb{C}[X,Y,Z,t]$$

où $\phi,\psi \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ et

$$P(U,V) = a_o(t)U^n + a_1(t)U^{n-1}V + \ldots + a_n(t)V^n$$

les $a_i(t)$, $0 \leq i \leq n$ étant des formes linéaires en t et U,V des polynômes homogènes en X,Y,Z. On peut donc écrire le polynôme $P(U,V)$ sous la forme :

$$P(U,V) = P_1(U,V) - tP_2(U,V)$$

avec $P_1(U,V), P_2(U,V) \in \mathbb{C}[U,V]$.

On peut décrire la situation grâce au schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^2 \arrow[r, dashed, "(\phi,\psi)"] \arrow[rr, bend right, "(\overline{A}\text{,}g_1^{m_1}\dots g_k^{m_k})"'] & \mathbb{P}^1 \arrow[r, dashed, "(P_1\text{,}P_2)"] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

où l'application (ϕ,ψ) est définie quand ϕ et ψ ne s'annulent pas simultanément en coordonnées homogènes par :

$$(x:y:z) \to (\phi(x,y,z):\psi(x,y,z))$$

et l'application P est donnée par :

$$(x:y) \to (P_1(x,y):P_2(x,y))$$

Nous savons que l'application rationelle $P = (P_1, P_2)$ qui est définie partout doit avoir un degré plus grand que 1 à cause de l'inégalité $\deg_{\{X,Y,Z\}} F > max(\deg\phi, \deg\psi)$ du théorème de Bertini.

L'application $P : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ admet admet au moins un point de ramification qui n'est pas au dessus de l'infini. En effet, P induit une application :

$$P' : P^{-1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} = \mathbb{P}^1 \backslash \{\infty\}$$

qui est de degré 2 et comme $\mathbb{C}$ est contractible, nécessairement P' a au moins un point de ramification au dessus de $t_0 \in \mathbb{C}$. Alors la fibre $\overline{F}_{t_0}$ a une composante multiple, ce qui est une contradiction avec le fait que $\overline{F}_{t_0}$ ait seuleument des singularités isolées. $\square$

Puisque F_t est réduite, on peut définir le nombre de Milnor global

$$\mu_t = \sum_{a \in Sing(F_t)} \mu(F_t, a),$$

somme des nombres de Milnor locaux. Si F_t est lisse, $\mu_t = 0$. On définit de la même manière, les nombres de Milnor à l'infini d'une fibre F_t :

$$\mu_t^\infty = \sum_{a \in \overline{F}_t \cap C} \mu(F_t, a)$$

La semi-continuité de μ permet de mesurer les accidents à l'infini d'une fibre F_t en comparant les nombres de Milnor à l'infini de F_t avec le nombre de Milnor à l'infini générique. Cette différence s'appelle saut de nombre de Milnor à l'infini :

$$\lambda_t = \mu_t^\infty - \mu_{gén}^\infty$$

D'après un théorème de Bertini, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de $t \in \mathbb{C}$ pour lesquels F_t est soit singulière soit admet un saut de nombre de Milnor à l'infini ce qui permet finalement de poser :

$$\mu(f) = \sum_{t \in \mathbb{C}} \mu_t,$$

$$\lambda(f) = \sum_{t \in \mathbb{C}} \lambda_t.$$

Soit B l'ensemble des valeurs spéciales de f, c'est-à-dire l'ensemble des $t \in \mathbb{C}$ tels que

- soit F_t est une fibre singulière,
- soit $\lambda(t) > 0$.

On désigne par S le complément de B dans $\mathbb{C}$: $S = \mathbb{C} \backslash B$.

Proposition 8. Si $X = f^{-1}(S)$ alors f est une fibration localement triviale de X au dessus de S.

Notations 1. Si X est une variété algébrique, nous désignerons par la suite par X_{sing} l'ensemble des points singuliers de X.

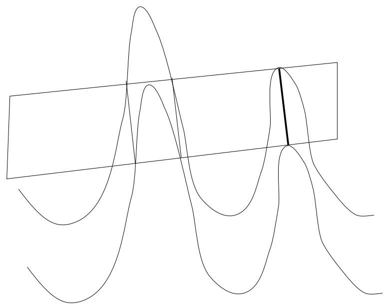


FIG. 2.1 –

Démonstration de la proposition 8. Pour obtenir le résultat, nous voulons évidemment appliquer le théorème d'isotopie de Thom. La difficulté réside dans le fait que l'application $f : X \to S$ n'est pas propre. Nous contournons ce problème en considérant la fermeture du graphe de f dans $\mathbb{P}^2 \times S$. Rappelons que C_f est la courbe donnée sur la surface affine $\mathbb{P}^2 \backslash V_g$ par l'équation :

$$f = \frac{\overline{A}(X,Y,Z)}{\overline{g}(X,Y,Z)}, \quad \text{avec} \quad \deg \overline{g} = \deg \overline{A}$$

et $(\overline{A}, \overline{g}) = 1$.

On considère $\overline{\Gamma}$ la fermeture du graphe de f dans $\mathbb{P}^2 \times S$ (voir la figure 2.1). C'est l'hypersurface de $\mathbb{P}^2 \times S$ d'équation :

$$\overline{A}(x,y,z) - t\overline{g}(x,y,z) = 0.$$

On note $H_\infty = V_{\overline{g}} \times S$ l'hypersurface à l'infini de $\mathbb{P}^2 \times S$ et

$$\overline{\Gamma}_\infty = \overline{\Gamma} \cap H_\infty = (V_{\overline{A}} \cap V_{\overline{g}}) \times S$$

Comme $\overline{A}$ et $\overline{g}$ n'ont pas de facteur commun, on a $\dim(V_{\overline{A}} \cap V_{\overline{g}}) = 0$ et donc $\dim \overline{\Gamma}_\infty = 1$.

L'ensemble des points singuliers de $\overline{\Gamma}$ est défini par :

$$\overline{\Gamma}_{sing} = \left\{ a \in \overline{\Gamma}_\infty / \frac{\partial \overline{A}}{\partial x} - t\frac{\partial \overline{g}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial y} - t\frac{\partial \overline{g}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial z} - t\frac{\partial \overline{g}}{\partial z} = 0 \right\}$$

Soit $\mathcal{A} = (A_i)$ une stratification de Whitney de $\overline{\Gamma}_\infty$. Si l'on note $V_{\overline{A}} \cap V_{\overline{g}} = \{p_i, 1 \leq i \leq p\}$, on peut prendre par exemple la stratification :

$$A_i = p_i \times S$$

où les A_i sont des ouverts de Zariski de $p_i \times \mathbb{C}$. et on remarque que $\overline{\Gamma}_{sing}$ est une réunion de strates.

On considère la stratification de $\overline{\Gamma}$:

$$B_{-1} = \overline{\Gamma} \backslash \overline{\Gamma}_\infty, \qquad B_i = A_i.$$

On doit vérifier les conditions de régularité de B_{-1} sur B_i.

1. ou bien B_i n'est pas dans $\overline{\Gamma}_{sing}$ les conditions de Whitney sont vérifiées. Cela résulte trivialement du fait que si $X = \mathbb{R}^k \times 0 \subset \mathbb{R}^n$ et $Y \subset \mathbb{R}^n \backslash X$ est un ouvert alors Y est Whitney-régulière sur X.
2. ou bien B_i est dans $\overline{\Gamma}_{sing}$. Comme la dimension de la strate B_i est 1, le critère de μ^*-constance, revient à vérifier que la famille à un paramètre de singularités le long de B_i définie par $\overline{B_{-1}}$ est μ-constante. Cela est réalisé par hypothèse du fait que $\lambda_t = 0, \forall t \in S$, et donc B_{-1} est Whitney-régulière sur B_i.

Pour conclure, on utilise le théorème d'isotopie de Thom pour l'application $pr_2 : \overline{\Gamma} \to \mathbb{C}$ qui est évidemment propre sur l'adhérence de chaque strate. □

Remarque 3. Si $S' \subset \mathbb{C}$ est telle que f réalise une fibration localement triviale de $f^{-1}(S')$ au dessus de S' alors $S' \subset S$. En effet, il revient au même que B est le plus petit ensemble tel que f est une fibration localement triviale au dessus du complémentaire. Clairement si un ensemble jouit de cette propriété, il doit contenir les fibres singulières. De plus, localement, toutes les fibres ont même nombre de Milnor à l'infini.

Il découle immédiatement de la proposition précédente et de [20] le :

Corollaire 2.

$$\chi(X) = \chi(F)\chi(S)$$

Nous désignerons ici et dans la suite par F la fibre générique de f. Le théorème de fibration précédent nous permet d'obtenir des résultats sur la topologie de la fibre générique :

Corollaire 3. Le premier nombre de Betti de la fibre générique est donné par la formule :

$$b_1(F) = 1 - \chi(U) + \mu(f) + \lambda(f).$$

Démonstration. Du fait de l'additivité de la charactéristique d'Euler, on a

$$\chi(U) = \chi(X) + \sum_{b \in B} \chi(F_b).$$

D'après le corollaire précédent,

$$\chi(X) = (1 - |B|)\chi(F)$$

où $|B|$ désigne le cardinal de l'ensemble B. Nous avons donc :

$$\chi(U) = \chi(F) + \sum_{b \in B} (\chi(F_b) - \chi(F)), \tag{2.2}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\chi(F_b) - \chi(F) &= \chi(\overline{F_b}) - \chi(\overline{F}) && (2.3)\\
&= [2 - 2\frac{(D-1)(D-2)}{2} + \sum_a \mu(\overline{F_b}, a)] && (2.4)\\
&- [2 - 2\frac{(D-1)(D-2)}{2} + \sum_a \mu(\overline{F}, a)] && (2.5)\\
&= (\mu_b + \mu_b^\infty) - \mu_{gén}^\infty && (2.6)\\
&= \mu_b + \lambda_b && (2.7)
\end{aligned}$$

où D est le degré de $\overline{A}$. □

Dans le cas classique, C est la droite à l'infini, $U \simeq \mathbb{C}^2$ donc $\chi(U) = 1$ et $b_1(F) = \mu(f) + \lambda(f)$. La même formule reste vraie si :

- C est une conique lisse car alors $C \simeq \mathbb{P}^1$ et $\chi(U) = \chi(\mathbb{P}^2) - \chi(\mathbb{P}^1) = 1$.
- C est une cubique cuspidale. C est alors homéomorphe à $\mathbb{P}^1$ et l'on peut refaire le raisonnement précédent.

Nous avons la

Proposition 9.

$$\dim H^1(U, F) = 0 \tag{2.8}$$

$$\dim H^2(U, F) = \mu(f) + \lambda(f) \tag{2.9}$$

Démonstration. Nous avons la suite exacte suivante :

$$\begin{aligned} H^0(U) \to H^0(F) \to H^1(U,F) \to H^1(U) \xrightarrow{j^*} H^1(F) \to \\ \to H^2(U,F) \to H^2(U) \to H^2(F) = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

La première assertion implique que j^* est injectif et la deuxième découle immédiatement du même fait et du corollaire 3 . On doit donc montrer que j^* est injectif ou que l'application duale

$$j_* : H_1(F) \to H_1(U)$$

est surjective. Pour cela, il suffit de montrer que :

$$j_\sharp : \pi_1(F) \to \pi_1(U)$$

est surjective. Pour cela, on utilise la suite exacte de la fibration [1][pp. 453] f de X sur S qui donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \pi_2(S) \arrow[r, "\delta_\sharp"] & \pi_1(F) \arrow[r] \arrow[dr, "j_\sharp"] & \pi_1(X) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d, "p_\sharp"] & \pi_1(S) \arrow[r] & 1 \\ & & \pi_1(U) & & \end{tikzcd}$$

où $\pi_2(S) = 1$ du fait que $\dim(S) = 1$.

Nous aurons besoin de la proposition suivante qui est un cas particulier du théorème de Zariski du type Lefschetz :

Proposition 10 ([5] pp. 121)**.** Pour toute hypersurface $V \subset \mathbb{P}^n$ et toute droite L de $\mathbb{P}^n$ qui intersecte V de manière transverse en évitant la partie singulière V_{sing}, nous avons un épimorphisme :

$$\pi_1(L \backslash (V \cap L)) \to \pi_1(\mathbb{P}^n \backslash V)$$

qui provient de l'inclusion.

Comme $X = f^{-1}(S)$, l'application $p_\sharp$ est évidemment un épimorphisme. On se donne donc $[\alpha]$ un élément de $\pi_1(U)$ qui se relève en un élément $[\beta]$ de $\pi_1(X)$. Si $f_\sharp([\beta]) = 0$ alors $[\beta]$ se relève dans $\pi_1(F)$.

Dans le cas contraire, si l'on note $V = \mathbb{P}^2 \backslash X$, on se donne une droite L de $\mathbb{P}^2$ qui intersecte V de manière transverse en évitant la partie singulière V_{sing}.

D'après la proposition, nous avons un épimorphisme :

$$\pi_1(L\backslash(V\cap L)) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_1(X)$$

De plus, si l'intersection $V\cap L$ consiste en d points $\{p_i, 1\leq i\leq d\}$ alors $\pi_1(L\backslash(V\cap L))$ est le groupe libre engendré par $d-1$ générateurs.

On peut supposer que $L\cap f^{-1}(B) = \{p_i, 1\leq i\leq k\}$ pour un entier $k\leq n$. Soit alors G le sous-groupe libre de $\pi_1(L\backslash(V\cap L))$ engendré par les classes associées à de petits lacets qui tournent autour des p_i pour $1\leq i\leq k$.

Alors le morphisme :

$$G \xrightarrow{i_\sharp} \pi_1(X) \xrightarrow{f_\sharp} \pi_1(S)$$

est un épimorphisme. En effet, si l'on note E le sous-groupe de $\pi_1(L\backslash(V\cap L))$ engendré par les classes associées à de petits lacets qui tournent autour des p_i, pour $k+1\leq i\leq n-1$ alors le morphisme :

$$E \xrightarrow{i_\sharp} \pi_1(X) \xrightarrow{f_\sharp} \pi_1(S)$$

est nul et comme $\pi_1(L\backslash(V\cap L)) = G * E$ et que $i_\sharp\circ f_\sharp$ est surjectif, $i_\sharp\circ f_{\sharp|G}$ est surjectif.

Comme $i_\sharp$ est surjectif, $[\alpha]$ se relève en un élément $[\alpha']\in\pi_1(L\backslash(V\cap L))$. De plus, $f_\sharp([\alpha])\in\pi_1(S)$ se relève en un élément $[\beta]\in G$.

On considère l'élément $[\gamma]$ de $\pi_1(X)$ défini comme $i_\sharp([\alpha']-[\beta])$. Du fait que $p_\sharp\circ i_\sharp([\beta])=0$, nous avons $p_\sharp([\alpha])=p_\sharp([\gamma])$ et de plus $f_\sharp([\gamma])=0$ ce qui nous ramène au premier cas. □

Exemple 5.

$$g = x^2+y^2+z^2$$
$$f = \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}$$

L'équation de la fibre en t est :

$$F_t : xy - t(x^2+y^2+z^2) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - 2tx,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = x - 2ty,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -2tz.$$

Donc les points singuliers de la fibre F_t sont :

- ou bien $t = 0$ et $(0 : 0 : 1)$ est un point singulier. Nous avons $\mu_0 = 1$,
- ou bien $x - 4t^2x = 0$, c'est-à-dire $t = \pm 1/2$ (car $X \neq 0$).
  - si $t = 1/2$, le point singulier a pour coordonnées homogènes $(1 : 1 : 0)$.

    $$F_{1/2} : xy - 1/2(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

    Que l'on peut écrire dans l'ouvert affine $x \neq 0$ comme la courbe d'équation $f_{1/2}$ avec :

    $$f_{1/2} : y - 1/2(1 - y^2 + z^2) = 0,$$

    En faisant le changement de coordonnées $y \to y+1$, $x \to x$ on obtient la courbe d'équation :

    $$f_{1/2} : 1 - 1/2(y^2 + z^2) = 0$$

    $$\frac{\partial f_{1/2}}{\partial y} = -y,$$

    $$\frac{\partial f_{1/2}}{\partial z} = -z,$$

    donc :

    $$\mu_{1/2} = \dim \frac{\mathbb{C}\{y, z\}}{(-y, -z)} = 1.$$

  - si $t = -1/2$, le point singulier a pour coordonnées homogènes $(1 : -1 : 0)$.

    $$F_{-1/2} : xy + 1/2(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

    Que l'on peut écrire dans l'ouvert affine $x \neq 0$ comme la courbe d'équation $f_{1/2}$ avec :

    $$f_{-1/2} : y + 1/2(1 + y^2 + z^2) = 0,$$

    En faiscant le changement de coordonnées $x \to x$, $y \to y - 1$ on obtient la courbe d'équation :

    $$f_{-1/2} : 1/2(y^2 + z^2) = 0$$

$$\frac{\partial f_{-1/2}}{\partial y} = y,$$
$$\frac{\partial f_{-1/2}}{\partial z} = z,$$

donc :

$$\mu_{-1/2} = \dim \frac{\mathbb{C}\{y,z\}}{(y,z)} = 1.$$

Conclusion : Pour cette courbe,

$$S = \mathbb{C}\backslash\{0, -1/2, 1/2\},$$

$$\mu = 3,$$

$$\lambda = 0.$$

D'après le corollaire 3 $b_1(F) = \mu(f) + \lambda(f) = \mu = 3$. D'autre part, $F = \mathbb{P}^1\backslash\{4 \quad \text{points}\}$ donc F est homéomorphe à $S^1 \vee S^1 \vee S^1$.

Exemple 6.

$$g = xyz$$
$$f = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$$

L'équation de la fibre en t est :

$$F_t : x^3 + y^3 + z^3 - t(xyz) = 0$$

Dans la suite nous poserons $h(x,y,z) = xyz - t(x^3 + y^3 + z^3$.
Les points singuliers sont solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = 3tx^2 - yz = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = 3ty^2 - xz = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} = 3tz^2 - xy = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

En prenant le produit de ces trois dernières équations on obtient :

$$27(xyz)^2 = t^3(xyz)^2$$

- Cas I : $xyz = 0$. Si par exemple $x = 0$ alors la deux équations (2.12) et (2.13) donnent $y = z = 0$ contradiction. Donc le cas I est impossible.
- Cas II : $xyz \neq 0$. Alors $t^3 = 27$ et nous posons :

$$t_1 = 3, t_2 = 3\epsilon, t_3 = 3\epsilon$$

avec $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$. On peut aussi prendre par exemple $x = 1$. Il vient :

$$\begin{cases} yz = \dfrac{3}{t} \\ tz = 3y^2 \\ ty = 3z^2 \end{cases} \tag{2.12}$$

et donc

$$\begin{cases} 3y^3 = 3 \\ z = \dfrac{3}{t}y^2 \end{cases} \tag{2.13}$$

Donc les points singuliers on pour coordonnées homogènes :
- pour $t = 3$: $[1:1:1]$,$[1:\epsilon:\epsilon^2]$,$[1:\epsilon^2:\epsilon]$.
- pour $t = 3\epsilon$: $[1:1:\epsilon^2]$,$[1:\epsilon:\epsilon]$,$[1:\epsilon^2:1]$.
- pour $t = 3\epsilon^2$: $[1:1:\epsilon]$,$[1:\epsilon:1]$,$[1:\epsilon^2:\epsilon^2]$.

On a donc 9 points singuliers, tous dans U. La fibre générique, $F = F_0$ est une cubique lisse moins les 9 points d'intersection $C_1 \cap C_2$ où les courbes C_1 et C_2 sont données par les équations :

$$C_1 : X^3 + Y^3 + Z^3 = 0 \tag{2.14}$$
$$C_2 : XYZ = 0 \tag{2.15}$$

On a donc :

$$\chi(F) = \chi(C_1)\backslash\{9\text{points}\} = -9 \Rightarrow \mathrm{b}_1(\mathrm{F}) = 10 \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \chi(U) &= \chi(\mathbb{P}^2\backslash\text{trois} \quad \text{droites}) \\ &= \chi(\mathbb{A}\backslash\{xy = 0\}) \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Donc le corollaire 3 nous donne :

$$b_1(F) = \mu(f) + 1$$

et finalement $\mu(f) = 9$, c'est-à-dire que toutes les singularités de f sont de type A_1.

Exemple 7. Si C est une courbe lisse de degré d. Comme

$$\chi(U) = \chi(\mathbb{P}^2) - \chi(C) = 2 - (2 - 2g) = (d-1)(d-2),$$

nous remarquons que du fait que :

$$\mu(f) + \lambda(f) \geq \chi(U) - 1$$

sur la surface U toute fonction admet soit des singularités dans U, soit un saut de nombre de Milnor à l'infini dès que $d > 2$.

2.6 Un analogue d'un résultat de Abhyankar et Moh

2.6.1 Un résultat élémentaire

Dans la section précédente, nous avons étudié quelques propriétés des pinceaux de courbes définies par une fonction régulière sur une surface affine donnée comme le complément dans $\mathbb{P}^2$ d'une courbe réduite. L'objet de cette section est de démontrer un résultat qui dans le cas classique où la courbe à l'infini est la droite $\mathbb{P}^1$ se déduit d'un théorème dû à Abhyankar et Moh [15]. Nous énonçons tout d'abord ce thèorème dans le contexte qui nous intéresse :

Théorème 12. On se donne sur $\mathbb{C}^2$ une fonction régulière f et on suppose que $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ est une fibration localement triviale. Alors il existe une application birégulière α de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ telle que :

$$f \circ \alpha = p$$

où p est la projection de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ selon la première coordonnée.

Dans notre situation nous voulons démontrer le résultat analogue suivant :

Théorème 13. On se donne sur la surface affine $U = \mathbb{P}^2 \backslash C$ où C est une courbe irréductible de $\mathbb{P}^2$, une fonction régulière f. On suppose que $f : U \to \mathbb{C}$ est une fibration localement triviale. Alors C est une droite projective et $F \simeq \mathbb{C}$.

Démonstration. Puisque f réalise une fibration localement triviale sur $\mathbb{C}$ et que $\mathbb{C}$ est contractible, f est en fait une fibration triviale au dessus de $\mathbb{C}$. Nous obtenons un homéomorphisme :

$$U \simeq \mathbb{C} \times F. \tag{2.18}$$

En particulier, F est connexe. Suivant [5][pp. 102] nous avons donc :

$$H_1(U, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \tag{2.19}$$

où d est le degré de la courbe C. De plus,

$$H_1(\mathbb{C} \times F, \mathbb{Z}) = H_1(F, \mathbb{Z}) = H_1(\bigvee_q S^1) = \mathbb{Z}^q. \tag{2.20}$$

De (2.19) et (2.20) nous tirons que $d = 1$ et $q = 0$ donc C est une droite et $F \simeq \mathbb{C}$ car toute courbe connexe lisse Y telle que $H_1(Y) = 0$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. $\square$

2.6.2 Un résultat plus général

Le résultat précédent dont la démonstration est élémentaire peut se généraliser à la situation suivante.

Théorème 14. Soit S une surface projective, $C \subset S$ une courbe irréductible. On pose $U = S \backslash C$ et on se donne une fonction régulière f sur U qui défini un pinceau de courbes. On suppose que $f : U \to \mathbb{C}$ est une fibration localement triviale et que le premier nombre de Betti de S, $b_1(S)$ est nul, alors C est une courbe rationnelle homéomorphe à la droite projective.

Nous reportons la démonstration de ce résultat pour donner les définitions et résultats que nous utiliserons dans le cours de la démonstration.

Nous nous plaçons donc dans la situation générale suivante : soit X une variété algébrique de dimension n. Dans tout le reste de la section, $H_c^j(X, \mathbb{C})$ désignera le j^{ieme} groupe de cohomologie de X à support compact et à coefficient dans $\mathbb{C}$. Nous savons d'après [2] que $H^j(X, \mathbb{C})$ (resp. $H_c^j(X, \mathbb{C})$) est muni d'une structure de Hodge mixte et donc en particulier d'une filtration par le poids. Nous avons donc :

$$0 \subset W_0(H^j(X, \mathbb{C})) \subset \ldots \subset W_{2n}(H^j(X, \mathbb{C})) = H^j(X, \mathbb{C}) \tag{2.21}$$

$$(\textit{resp.} \quad 0 \subset W_0(H_c^j(X, \mathbb{C})) \subset \ldots \subset W_{2n}(H_c^j(X, \mathbb{C})) = H_c^j(X, \mathbb{C})) \tag{2.22}$$

Définition 7. Nous appellerons polynôme de Serre ou polynôme de poids de la variété X, le polynôme à coefficients entiers :

$$W(X,t) = \sum_{m,j} (-1)^j \dim Gr_m^W H^j(X) t^m. \tag{2.23}$$

De la même manière nous définissons le polynôme de Serre à support compact comme :

$$W_c(X,t) = \sum_{m,j} (-1)^j \dim Gr_m^W H_c^j(X) t^m. \tag{2.24}$$

Le polynôme de poids jouit des mêmes propriètés que la caractéristique d'Euler tout en étant un invariant plus précis puisqu'il tient compte de la graduation par le poids de la cohomologie des variétés algébriques. En particulier le polynôme de poids est additif dans le sens suivant [6] :

Proposition 11. Soit X une variété algébrique et soit $Y \subset X$ une sous-variété de X alors si l'on pose $U = X \backslash Y$ on a :

$$W_c(X,t) = W_c(Y,t) + W_c(U,t). \tag{2.25}$$

Il est aussi multiplicatif suivant le :

Théorème 15 ([6])**.** Soient X et S deux variétés algébriques, $f : X \to S$ un morphisme qui réalise une fibration localement triviale de fibre F. Nous supposons de plus que le système local $R^j f_* \mathbb{C}_X$ est constant pour tout j alors :

$$W_c(X,t) = W_c(F,t) W_c(S,t). \tag{2.26}$$

Remarque 4. Si X est une variété compacte alors $H_c^*(X) = H^*(X)$ et donc $W(X,t) = W_c(X,t)$.

Exemple 8. Si C est une courbe lisse projective de genre g alors

$$W_c(C,t) = W(C,t) = 1 - 2gt + t^2. \tag{2.27}$$

En effet nous avons :
- $H^0(C,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ qui est muni d'une structure pure de poids 0.
- $H^1(C,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{2g}$ qui est muni d'une structure pure de poids 1.
- $H^2(C,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ qui est muni d'une structure pure de poids 2.

Exemple 9. On se donne $F = C\backslash A$ où C est une courbe projective lisse de genre g et A un ensemble fini de points de C. Nous avons :

$$\begin{aligned} W_c(F,t) &= W_c(C,t) - W_c(A,t) \\ &= 1 - 2gt + t^2 - |A| \end{aligned} \tag{2.28}$$

Exemple 10. On considère maintenant C une courbe projective irréductible mais peut-être singulière. Soit $n : \tilde{C} \to C$ une normalisation de C. Nous savons que $\tilde{C}$ est une courbe lisse projective et nous noterons g son genre.

Nous avons :

$$\begin{aligned} W(C,t) = W_c(C,t) = W_c(C\backslash C_{sing},t) + W_c(C_{sing},t) \\ = W_c(\tilde{C}\backslash n^{-1}(C_{sing}),t) + |C_{sing}| = W_c(\tilde{C}) - |n^{-1}(C_{sing})| + |C_{sing}| \end{aligned} \tag{2.29}$$

où C_{sing} désigne la partie singulière de la courbe C.

Comme de plus

$$|n^{-1}(C_{sing})| - |C_{sing}| = \sum_{a \in C_{sing}} (n(C,a) - 1), \tag{2.30}$$

où $n(C,a)$ désigne le nombre de composantes irréductibles locales de la courbe C en a. Nous obtenons finalement :

$$W(C,t) = 1 - 2gt + t^2 - \sum_{a \in C_{sing}} (n(C,a) - 1). \tag{2.31}$$

Exemple 11. On suppose que $F = C\backslash A$ où C est une courbe projective peut-être singulière et A un nombre fini de point. Soit $n : \tilde{C} \to C$ une normalisation de C. Nous noterons g le genre de $\tilde{C}$. Alors :

$$W(C,t) = 1 - 2gt + t^2 - \sum_{a \in C_{sing}} (n(C,a) - 1) - |A|. \tag{2.32}$$

Cela résulte immédiatement des deux exemples précédent.

Nous pouvons maintenant revenir à la preuve du théorème 14

Démonstration. Nous pouvons écrire le polynône de Serre de S sous la forme :

$$W_c(S,t) = 1 - b_1(S)t + b_2(S)t^2 - b_3(S)t^3 + t^4, \tag{2.33}$$

où les $b_i(S)$ sont les nombres de Betti de S. Nous savons d'une part du fait de la dualité de Poincaré que $b_1(S) = b_3(S)$ d'autre part d'après la théorie de Hodge que $b_1(S)$ et $b_3(S)$ sont pairs. Par hypothèse, $b_1(S) = b_3(S) = 0$.

D'autre part comme :

$$f : U \to \mathbb{C}$$

réalise une fibration localement triviale, on a :

$$W_c(\mathbb{C}, t)W_c(F, t) = W_c(U, t) \tag{2.34}$$

Il est facile de calculer $W_c(\mathbb{C}, t)$:

$$\begin{aligned} W_c(\mathbb{C}, t) &= W_c(\mathbb{P}^1, t) - W_c(\{\infty\}, t) \\ &= 1 + t^2 - 1 = t^2. \end{aligned} \tag{2.35}$$

D'autre part nous avons :

$$\begin{aligned} W_c(U, t) &= W_c(S, t) - W_c(C, t) \\ = 1 - b_1(S)t + b_2(S)t^2 - b_3(S)t^3 + t^4 &- (1 - 2g_{\tilde{C}}t + t^2) + \sum_{a \in C_{sing}} (n(C, a) - 1) \\ = t^4 - b_3(S)t^3 + (b_2(S) - 1)t^2 &- (b_1(S) - 2g_{\tilde{C}})t + \sum_{a \in C_{sing}} (n(C, a) - 1), \end{aligned} \tag{2.36}$$

où $g_{\tilde{C}}$ désigne le genre de la courbe normalisée $\tilde{C}$ de C, et :

$$W_c(F, t) = (1 - 2g_{\tilde{F}}t + t^2) - \sum_{b \in \overline{F}_{sing}} (n(\overline{F}, b) - 1) - |A| \tag{2.37}$$

où $g_{\tilde{F}}$ désigne le genre de la courbe normalisée $\tilde{F}$ de $\overline{F}$ et $A = \overline{F} \cap C$.

En injectant (2.35), (2.36), (2.36) dans (2.34) et en identifiant les coefficients de même degré il vient :

$$2g_{\tilde{F}} = b_3(S), \tag{2.38}$$

$$\sum_{b \in F_{sing}} (n(\overline{F}, b) - 1) - |A|) = b_2(S), \tag{2.39}$$

$$b_1(S) - 2g_{\tilde{C}} = 0, \tag{2.40}$$

$$\sum_{a \in C_{sing}} (n(C, a) - 1) = 0. \tag{2.41}$$

Nous tirons successivement des équations précédentes que : Pour tout $a \in C_{sing}$, $n(C,a) = 1$ donc $n : \tilde{C} \to C$ est un homéomorphisme et $\tilde{C}$ est une courbe projective lisse de genre 0 donc $\tilde{C} = \mathbb{P}^1$ donc $C \simeq \mathbb{P}^1$. En particulier, si C est lisse alors $C = \mathbb{P}^1$. □

Remarque 5. Si l'on suppose de plus que $b_2(S) = 1$, alors nous tirons de (2.38) que $n(\overline{F}, b) = 1$ pour $b \in F_{sing}$ donc $F = \overline{F} \backslash A$ où $\overline{F}$ est une courbe rationnelle à singularités irréductibles.

2.7 Cohomologie de la fibre générique

Dans cette section, nous donnons une méthode pour exhiber une base explicite de la cohomologie de la fibre générique.

Nous avons la suite de Gysin suivante :

$$H^1(U\backslash F) \overset{res}{\to} H^0(F) \overset{\partial}{\to} H^2(U) \to H^2(U\backslash F) \overset{\mathrm{res}}{\to} H^1(F) \overset{\partial}{\to} H^3(U)$$

où res désigne le morphisme résidu.

On peut maintenant comparer cette dernière suite avec la suite de Mayer-Vietoris :

$$0 \to H^2(U) \bigoplus H^2(\mathbb{P}^2\backslash\overline{F}) \to H^2(U\backslash F) \overset{res}{\to} \mathbb{C}^{\sharp-1} \to 0$$

où $\sharp$ désigne le cardinal de $\overline{F} \cap C$.

Les résultats du premier chapitre nous permettent de calculer des bases explicites pour $H^2(U\backslash F)$. En prenant le résidu, cela donne des bases explicites de la cohomologie de de Rham de $H^1(F)$.

Exemple 12. Nous reprenons l'exemple 5 :

$$g = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$f = \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

L'équation de la fibre en t est :

$$F_t : xy - t(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Nous rappelons que pour cet exemple nous avions déjà obtenu les résultats suivants :

$$S = \mathbb{C}\backslash\{0, -1/2, 1/2\},$$

$$\mu = 3,$$
$$\lambda = 0.$$

Donc F_1 est une fibre générique. Nous considèrons donc les deux courbes C_1 et C_2 de $\mathbb{P}^2$ d'équations respectives :

$$C_1 : xy + x^2 + y^2 + z^2 = 0, \tag{2.42}$$
$$C_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 0. \tag{2.43}$$

Les points d'intersection de ces courbes sont solutions du système :

$$\begin{cases} C_1 : xy + x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\ C_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 0. \end{cases} \tag{2.44}$$

Nous avons 4 points d'intersection de coordonnées homogènes :

$$(0 : 1 : i), (0 : 1 : -i), (1 : 0 : i), (1 : 0 : -i)$$

En reprenant les notations du premier chapitre, une base de $\tilde{V}$ est : $\{X, Y, Z\}$. Donc une base de $H^2(U \backslash F)$ est :

$$\{\frac{X\Omega}{h}, \frac{Y\Omega}{h}, \frac{Z\Omega}{h}\}$$

où $h = (XY + X^2 + Y^2 + Z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)$.

Exemple 13. Nous reprenons l'exemple 6 :

$$g = xyz$$
$$f = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$$

L'équation de la fibre en t est :

$$F_t : xyz - t(x^3 + y^3 + z^3) = 0,$$

Nous rappelons que pour cet exemple nous avions déja obtenu les résultats suivants :

$$S = \mathbb{C} \backslash \{3, 3\epsilon, 3\epsilon^2\},$$
$$\mu = 9,$$
$$\lambda = 0.$$

avec $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$.

Une base pour $H^2(U \backslash F)$ est donnée en mettant ensemble :

1. une base pour $H^2(\mathbb{P}^2\backslash C_f)$, par exemple
$$\frac{\Omega}{f}, \frac{XYZ\Omega}{f^2}$$

2. une base pour $H^2(\mathbb{P}^2\backslash C_g) = H^2(\mathbb{A}^2\backslash\{XY = 0\})$, par exemple :
$$\frac{dX}{X} \wedge \frac{dY}{Y}$$
en écriture affine sur $\mathbb{A}^2$ ou bien
$$\frac{d\frac{X}{Z}}{\frac{X}{Z}} \wedge \frac{d\frac{Y}{Z}}{\frac{Y}{Z}} = \frac{\Omega}{g}$$

3. une base pour l'espace $\tilde{V} = \left(\frac{\mathbb{C}[X,Y,Z]}{(g,f)}\right)$ donc les 8 monômes de degré 3 dans $\mathbb{C}$ différents de XYZ et de X^3.

Ce calcul nous donne 11 formes différentielles. La forme $\frac{\Omega}{f^2}$ est dans le noyau du résidu et donc les 10 autres résidus forment une base pour $H^1(F)$.

2.8 Cocycles invariants

Dans cette section, nous étudions les cocycles de F_{s_0} invariants par l'action de groupe fondamental de S.

Nous reprenons les notations des deux dernières sections. Comme X est un fibré localement trivial au dessus de S, nous avons une application naturelle :
$$\rho : \pi_1(S, s_0) \to AutH^1(F_{s_0})$$
la représentation de monodromie. La proposition suivante caractérise les cocycles invariants par cette action.

Proposition 12. Soit $i : F_{s_0} \to X$ l'inclusion alors
$$H^1(F_{s_0})^\rho = i^*(H^1(X)). \tag{2.45}$$

Démonstration. Nous posons les notations suivantes :
$$S = \mathbb{C}\backslash B \simeq \vee_{s_0}^k S^1 \subset \mathbb{C}\backslash B$$

où $\vee_{s_0}^k S^1$ désigne la réunion topologique de k cercles recollés en $s_0 \in \mathbb{C}$. Nous notons λ la rétraction de $\mathbb{C}\backslash B$ dans $\vee_{s_0}^k S^1$.

$$X \simeq f^{-1}(\vee_{s_0}^k S^1) = X'$$

On fait une récurrence sur le nombre de cercles du bouquet. S'il y a un seul cercle, alors le résultat provient de la suite exacte de Wang

$$H^1(X') \to H^1(F_{s_0}) \overset{h^*-I^*}{\to} H^1(F_{s_0})$$

où h^* est l'automorphisme de $H^1(F_{s_0})$ associé à la monodromie d'un lacet qui engendre le π_1 du cercle.

On suppose vérifiée l'hypothèse de récurrence. On écrit la suite exacte longue associée à la paire (X', F') où $F' = f^{-1}(\vee_{s_0}^{k-1} S^1) \subset X'$.

Par excision,

$$H^k(X', F') \simeq H^k(f^{-1}(S^1), f^{-1}(0))$$

Le morphisme naturel

$$F_{s_0} \times [0, 2\pi] \to f^{-1}(S^1)$$

donne un isomorphisme

$$H^k(F_{s_0} \times [0, 2\pi], F_0 \times \{0\} \cup F_0 \times \{2\pi\}) \to H^k(X', F')$$

et comme $H^k(F_{s_0} \times [0, 2\pi], F_{s_0} \times \{0\} \cup F_{s_0} \times \{2\pi\}) \simeq H^k(F_{s_0} \times ([0, 2\pi], \{0, 2\pi\}))$, on peut identifier $H^k(F_{s_0} \times [0, 2\pi], F_{s_0} \times \{0\} \cup F_{s_0} \times \{2\pi\})$ à $H^{k-1}(F_{s_0})$ grâce à la formule de Kunneth. Nous notons p l'isomorphisme de $H^k(X', F')$ dans $H^{k-1}(F_{s_0})$ ainsi obtenu.

Si maintenant $\omega \in H^1(F_{s_0})$ est stable par l'action de ρ alors ω vient d'un élément de $H^1(F_{s_0})$ qui, d'après l'hypothèse de récurrence, peut se remonter en un élément ω' de $H^1(F')$. Le diagramme suivant permet de conclure :

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X') & \longrightarrow & H^1(F') & \xrightarrow{\partial} & H^2(X', F') \\ & & \downarrow{\scriptstyle i^*} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ & & H^1(F_{s_0}) & \xrightarrow{h^*-I^*} & H^1(F_{s_0}) \end{array}$$

En effet, comme ω est stable par l'action de ρ, d'aprés la suite exacte de Wang, on a $(h^* - I^*) \circ i^*(\omega) = 0$ et comme p est un isomorphisme, ω' se remonte en un élément de X'.

La réciproque est claire en utilisant le même diagramme.

□

La fibration $F \to X \to S$ donne la suite exacte suivante pour les groupes fondamentaux :

$$1 \to \pi_1(F) \to \pi_1(X) \to \pi_1(S) \to 1.$$

En faisant agir le foncteur $Hom(-, \mathbb{C})$ sur cette suite exacte, on obtient :

$$0 \to H^1(S) \to H^1(X) \to H^1(F)$$

où le premier morphisme est f^* et le second morphisme est j^* avec $j : F \hookrightarrow X$ l'inclusion.

Proposition 13.

$$\dim H^1(F_{s_0})^\rho = n(C) - 1 + \sum_{b \in B} (n(F_b) - 1) - |B|.$$

Démonstration. Nous avons la suite exacte suivante :

$$0 \to H^1(S) \to H^1(X) \xrightarrow{i^*} H^1(F_{s_0})$$

où $\dim H^1(S) = |B|$ et $\dim H^1(X) = n(C) - 1 + \sum_{b \in B}(n(F_b) - 1)$. □

De plus, nous pouvons représenter les classes de $H^1(F_{s_0})^\rho$ par des formes différentielles de la manière suivante :

Une base de $H^1(S)$ est donnée par les formes :

$$\alpha_b = \frac{dz}{z - b}$$

pour tout $b \in B$.

On obtient une base de $H^1(X)$ de la manière suivante. Soit $b \in B$ une valeur spéciale, on suppose que

$$f - b = f_{1b} \dots f_{n(b)b}$$

est une décomposition de $f - b$ en ses facteurs irréductibles. En particulier on a $n(b) = n(F_b)$. De même, on décompose la courbe à l'infini C_g en ses composantes irréductibles :

$$g = g_1 \dots g_{n(b)}$$

Alors une base de $H^1(X)$ est donnée par les formes suivantes :

$$\alpha^l = \frac{dg_l}{g_l}, \qquad 1 \leq l \leq n(g) - 1,$$

$$\beta_b^l = \frac{df_{lb}}{f_{lb}}, \qquad b \in B, \qquad 1 \leq l \leq n(b) - 1.$$

Avec ces notations, on a :

$$f^*(\alpha_b) = \sum_{l=1}^{n(b)} \beta_b^l$$

Remarquons que les 1-formes α^l et β_b^l sont analytiques sur F_{s_0}. Nous avons donc prouvé la :

Proposition 14. Les classes de cohomologie $j^*([\alpha^l])$ pour $1 \leq l \leq n(g) - 1$ et $j^*([\beta_b^l])$ pour $1 \leq l \leq n(b) - 1$ forment une base de $H^1(F_{s_0})^\rho$.

Bibliographie

[1] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry.* Springer-Verlag, graduate texts in mathematics edition, 1993.

[2] P. Deligne. Théorie de Hodge II. *Publ. I.H.E.S*, 40 :5–57, 1971.

[3] P. Deligne and A. Dimca. Filtrations de hodge et par l'ordre du pôle pour les hypersurfaces singulières. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 23 :645–656, 1990.

[4] A. Dimca. *Topics on Real and Complex Singularities.* Vieweg, vieweg advanced lectures in mathematics edition, 1987.

[5] A. Dimca. *Singularities and Topology of Hypersurfaces.* Springer-Verlag, universitext edition, 1992.

[6] A. Dimca and G. I. Lehrer. Purity and equivariant weight polynomials. In *Algebraic groups and Lie groups*, pages 161–181. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[7] A. Dimca E. Artal-Bartolo, P. Cassou-Noguès. Sur la topologie des polynômes complexes. In *Singularities (Oberwolfach, 1996)*, pages 317–343. Birkhäuser, Basel, 1998.

[8] P. Griffiths et J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* John Wiley, 1994.

[9] Hà Huy Vui et Lê Dũng Tráng. Sur la topologie des polynômes complexes. *Acta Math. Vietnam.*, 9(1) :21–32 (1985), 1984.

[10] A. Fujiki. Duality of mixed hodge structures of algebraic varieties. *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, 16 :635–667, 1980.

[11] P. Griffiths. Variations on a theorem of abel. *Inventiones mathematicae*, 35 :321–390, 1976.

[12] Phillip A. Griffiths. On the periods of certain rational integrals. I, II. *Ann. of Math. (2) 90 (1969), 460-495; ibid. (2)*, 90 :496–541, 1969.

[13] Milnor. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Princeton University Press, annals of mathematics studies edition, 1974.

[14] J. Milnor. *Morse theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51.

[15] T. Moh S. Abhyankar. Embeddings of the line in the plane. *Séminaire Bourbaki*, page 12, 1966/67.

[16] A. Schinzel. *Selected Topics on Polynomials*. The University of Michigan Press, 1982.

[17] B. Teissier. Cycles évanescents, sections planes et conditions de whitney. *Astérisque*, 718 :285–362, 1973.

[18] Lê Dung Tráng. Sur les noeuds algébriques. *Compositio Math.*, 25 :281–321, 1972.

[19] A. K. Tsikh. *Multidimensional residues and their applications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. Translated from the 1988 Russian original by E. J. F. Primrose.

[20] R. Bott L. W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, graduate texts in mathematics edition, 1995.