SUR LES PINCEAUX DE COURBES DÉFINIS PAR UNE FONCTION RÉGULIÈRE

par David Lubicz

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous généralisons beaucoup de résultats sur la topologie d'une fonction polynomiale, $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dans le cas d'une fonction régulière $f : U \to \mathbb{C}$.

ABSTRACT. — In this article, we generalize many results on the topology of a polynomial function, $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ in the case of a regular function $f : U \to \mathbb{C}$.

Introduction

Soit $\mathbb{P}^2$ l'espace projectif complexe de dimension 2. Si g est une fonction régulière de $\mathbb{P}^2$, nous désignerons par la suite par C_g la courbe de $\mathbb{P}^2$ définie par g.

Soit donc C_g une courbe définie par une fonction g, nous savons que $\mathbb{P}^2 \backslash C_g$ est une surface affine complexe. L'objet de cet article est d'étudier les pinceaux de courbes définies par une fonction régulière $f : \mathbb{P}^2 \backslash C_g \to \mathbb{C}$. Dans le cas où cette dernière courbe est la droite à l'infini, nous retrouvons la situation classique d'un pinceau donné par une fonction régulière de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$, voir [**12**].

DAVID LUBICZ, Celar-BP 7419-35174 Bruz Cedex • *E-mail :* `david.lubicz@univ-rennes1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14D05, 32S20, 32S60.

Mots clefs. — Applications régulières, Théorie globale des Singularités.

Dans cet article, par fibration nous entendrons fibration différentiable. Nous voulons déterminer un ouvert U de $\mathbb{C}$ au dessus duquel f réalise une fibration localement triviale. Toutes les fibres de f au dessus de U ont la même topologie. Remarquons que si l'on se donne un point $a \in C_f \cap C_g$ alors pour tout $t \in \mathbb{C}$, $a \in \overline{F}_t \cap C_g$ où $\overline{F}_t$ désigne la fermeture dans $\mathbb{P}^2$ de la fibre $F_t = f^{-1}(t)$. Donc f détermine en a un pinceau de germes de singularité isolée d'hypersurface d'équation $f - tg = 0$ paramétré par $t \in \mathbb{C}$. Nous retrouvons ainsi la situation décrite dans [**11**] où l'on donne une caractérisation de l'ouvert d'équisingularité d'un pinceau de germes de singularité isolée d'hypersurface. Nous inspirant de cet article, après avoir démontré dans la première section quelques résultats généraux sur la topologie de $U = \mathbb{P}^2 \backslash C_g$, nous généralisons dans la deuxième section les définitions des sauts de nombre de Milnor $\lambda(t)$ à l'infini et nous démontrons un théorème de fibration : Soit B l'ensemble des valeurs spéciales de f, c'est-à-dire l'ensemble des $t \in \mathbb{C}$ tels que
– soit F_t est une fibre singulière,
– soit $\lambda(t) > 0$.
On désigne par S le complément de B dans $\mathbb{C}$: $S = \mathbb{C} \backslash B$.

Proposition 1. — Si $X = f^{-1}(S)$ alors f est une fibration localement triviale de X au dessus de S.

Nous déduisons par des méthodes élémentaires des résultats sur la topologie du plongement de la fibre générale dans l'espace total de la fibration :

Proposition 4. —

$$\dim H^1(U, F) = 0 \tag{1}$$

$$\dim H^2(U, F) = \mu(f) + \lambda(f) \tag{2}$$

où $\mu(f)$, le nombre de Milnor total de f et $\lambda(f)$, le saut de nombre de Milnor total, sont définis dans la première section.

Dans la section 3 nous démontrons un analogue d'un théorème de Abhyankar et Moh d'abord par des méthodes élémentaires puis dans un cadre plus général en utilisant les polynômes de poids associés à une variété algébrique.

Dans la section 4, nous donnons la dimension et une base de l'espace des cocycles de F_{s_0}, la fibre de f au dessus de $s_0 \in S$, invariants par l'action du groupe fondamental de S.

1. Généralités sur la topologie d'une surface affine $U = \mathbb{P}^2 \backslash C$

Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe réduite d'équation $g = 0$, $g \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ un polynôme homogène de degré d. Alors $U = \mathbb{P}^2 - C$ est une surface affine complexe.

Comme U est une variété affine, d'après [**6**], U a le type topologique d'un CW-complexe de dimension 2. Donc, si $b_k(U)$ désigne le k-ième nombre de Betti de U alors $b_k(U) = 0$, pour tout $k > 2$.

Comme U est connexe, $b_0(U) = 1$ et nous savons, d'après [**3**][p. 147] que $b_1(U) = b^0_{2n-2}(C) = n(C) - 1$ où $n = dim\mathbb{P}^2 = 2$, $b^0_k = dimH^k_0(C)$ est la dimension du $k-$ième groupe de cohomologie primitive de C et $n(C)$ est le nombre de composantes irréductibles de la courbe C. Si l'on décompose g en ses facteurs irréductibles $g = g_1 \ldots g_{n(C)}$, il est facile de voir que les formes :

$$\omega_i = (dg_i)/g_i - (n_i/n)(dg/g)$$

où $n_i = \deg g_i$ et $n = d$, engendrent $H^1(U)$ et ont pour unique relation : $\sum \omega_i = 0$.

Si l'on désigne par $\mu(C, a)$ le nombre de Milnor local en $a \in Sing(C)$ de C, on a la

Proposition 1. — $b_2(U) = n(C) - 1 + (d-1)(d-2) - \sum_{a \in Sing(C_g)} \mu(C, a)$

Comme $\chi(U) = b_0(U) - b_1(U) + b_2(U)$, d'après ce qui précède, il suffit de calculer $\chi(U)$. D'autre part, du fait de l'additivité de la caractéristique d'Euler, pour les ensembles algébriques complexes, on a $\chi(U) = \chi(\mathbb{P}^2 \backslash C) = \chi(\mathbb{P}^2) - \chi(C)$. La proposition découle alors de la formule [**3**][pp. 162] :

$$\chi(C) = 2 - (d-1)(d-2) + \sum_{a \in Sing(C)} \mu(C, a).$$

2. Topologie des sections régulières d'une surface affine $U = \mathbb{P}^2 \backslash C$

Soit f une fonction régulière sur U que l'on supposera toujours non constante. On peut l'écrire sous la forme :

$$f = \frac{A(X,Y,Z)}{g(X,Y,Z)^m}, \quad avec \quad m \deg g = \deg A.$$

En prenant la décomposition de g et A en leur facteurs irréductibles, on peut toujours voir f comme le rapport de deux polynômes premiers entre eux :

$$f = \frac{\overline{A}(X,Y,Z)}{g_1^{m_1} \dots g_k^{m_k}}, \quad \text{avec} \quad \deg \overline{A} = \sum_1^k m_i \deg g_i$$

et $(\overline{A}, \overline{g}) = 1$ où $\overline{g} = g_1^{m_1} \dots g_k^{m_k} \quad (m_i \geq 0)$.

Cette fonction définit un pinceau de courbes affines $F_t = f^{-1}(t)$. On désignera par $\overline{F_t}$ la fermeture de F_t dans $\mathbb{P}^2$.

Dans tout ce qui suit, nous ferons les hypothèses suivantes :

H1 : Toutes les fibres sont réduites et donc toutes les singularités sont isolées.

H2 : La fibre générique est connexe.

En fait, nous allons montrer en utilisant un théorème dû à Bertini que l'hypothèse H1 implique l'hypothèse H2. Nous rappelons tout d'abord le théorème de Bertini dans le contexte qui nous sera utile. Le lecteur pourra consulter le livre [**9**][pp. 139] ou bien [**8**][pp. 79] pour une preuve algébrique et une référence plus générale.

Théorème 1 (Bertini 1882). — Soit $F(X,Y,Z,\Lambda)$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$, homogène en les variables X, Y, Z, et l'on suppose que F considéré comme un élément de $\mathbb{C}[\Lambda][X,Y,Z]$ est irréductible et vérifie $\deg_\Lambda F = 1$. Alors, $F(X,Y,Z,\lambda)$ est réductible pour tout choix de $\lambda \in \mathbb{C}$ qui soit tel que

$$\deg_{\{X,Y,Z\}} F(X,Y,Z,\lambda) = \deg_{\{X,Y,Z\}} F(X,Y,Z,\Lambda)$$

si et seulement si on peut écrire $F(X,Y,Z,\Lambda)$ sous la forme :

$$F(X,Y,Z,\Lambda) = a_0(\Lambda)\phi(X,Y,Z)^n + a_1(\Lambda)\phi(X,Y,Z)^{n-1}\psi(X,Y,Z) + \dots + a_n(\Lambda)\psi(X,Y,Z)^n \tag{3}$$

pour $\psi, \phi \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ et $\deg_{\{X,Y,Z\}} F > max(\deg \phi, \deg \psi)$.

Proposition 2. — Avec les notations qui précèdent nous avons : H1 implique H2 c'est-à-dire que le fait que les fibres F_t soient réduites implique que la fibre générique est connexe.

Démonstration. — Pour montrer que la fibre générique F est connexe il suffit de montrer que son adhérence $\overline{F}$ dans $\mathbb{P}^2$, est irréductible. Supposons donc le contraire. Une équation de la fibre $\overline{F}_t$ s'écrit :

$$\overline{F}_t : \overline{A}(X,Y,Z) - tg_1^{m_1} \dots g_k^{m_k} = 0, \quad t \in \mathbb{C}.$$

D'après le théorème sus-cité, le fait que $\overline{F}_t$ ne soit pas irréductible pour t générique implique que :

$$\overline{A}(X,Y,Z) - tg_1^{m_1} \dots g_k^{m_k} = P(\phi, \psi) \in \mathbb{C}[X,Y,Z,t]$$

où $\phi, \psi \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ et

$$P(U,V) = a_o(t)U^n + a_1(t)U^{n-1}V + \dots + a_n(t)V^n$$

les $a_i(t)$, $0 \leq i \leq n$ étant des formes linéaires en t et U, V des polynômes homogènes en X, Y, Z. On peut donc écrire le polynôme $P(U,V)$ sous la forme :

$$P(U,V) = P_1(U,V) - tP_2(U,V)$$

avec $P_1(U,V), P_2(U,V) \in \mathbb{C}[U,V]$.

On peut décrire la situation grâce au schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^2 \arrow[r, dashed, "(\phi,\psi)"] \arrow[rr, bend right, "(\overline{A}, g_1^{m_1} \dots g_k^{m_k})"'] & \mathbb{P}^1 \arrow[r, dashed, "(P_1,P_2)"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

où l'application (ϕ, ψ) est définie quand ϕ et ψ ne s'annulent pas simultanément et s'écrit en coordonnées homogènes :

$$(x:y:z) \to (\phi(x,y,z) : \psi(x,y,z))$$

et l'application P est donnée par :

$$(x:y) \to (P_1(x,y) : P_2(x,y)).$$

Nous savons que l'application rationelle $P = (P_1, P_2)$ qui est définie partout doit avoir un degré plus grand que 1 à cause de l'inégalité $\deg_{\{X,Y,Z\}} F > max(\deg \phi, \deg \psi)$ du théorème de Bertini.

L'application $P : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ admet au moins un point de ramification qui n'est pas au dessus de l'infini. En effet, P induit une application :

$$P' : P^{-1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} = \mathbb{P}^1 \backslash \{\infty\}$$

qui est de degré au moins égal à 2 et comme $\mathbb{C}$ est contractible, nécessairement P' a au moins un point de ramification au dessus de $t_0 \in \mathbb{C}$. Alors la fibre $\overline{F}_{t_0}$ a une composante multiple, ce qui est une contradiction avec le fait que $\overline{F}_{t_0}$ ait seulement des singularités isolées. $\square$

Puisque F_t est réduite, on peut définir le nombre de Milnor global

$$\mu_t = \sum_{a \in Sing(F_t)} \mu(F_t, a),$$

somme des nombres de Milnor locaux. Si F_t est lisse, $\mu_t = 0$. On définit de la même manière, les nombres de Milnor à l'infini d'une fibre F_t :

$$\mu_t^\infty = \sum_{a \in \overline{F}_t \cap C} \mu(\overline{F}_t, a).$$

La semi-continuité de μ permet de définir le saut de nombre de Milnor à l'infini :

$$\lambda_t = \mu_t^\infty - \mu_{gén}^\infty$$

D'après un théorème de Bertini, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de $t \in \mathbb{C}$ pour lesquels F_t est soit singulière soit admet un saut de nombre de Milnor à l'infini ce qui permet finalement de poser :

$$\mu(f) = \sum_{t \in \mathbb{C}} \mu_t,$$

$$\lambda(f) = \sum_{t \in \mathbb{C}} \lambda_t.$$

Soit B l'ensemble des valeurs spéciales de f, c'est-à-dire l'ensemble des $t \in \mathbb{C}$ tels que
– soit F_t est une fibre singulière,
– soit $\lambda(t) > 0$.
On désigne par S le complément de B dans $\mathbb{C}$: $S = \mathbb{C} \backslash B$.

Proposition 3. — Si $X = f^{-1}(S)$ alors f est une fibration localement triviale de X au dessus de S.

NOTATIONS 1. — Si X est une variété algébrique, nous désignerons par la suite par X_{sing} l'ensemble des points singuliers de X.

Démonstration de la proposition 3. — On suit la même idée principale que dans [**12**]. Pour obtenir le résultat, nous voulons évidemment appliquer le théorème d'isotopie de Thom. La difficulté réside dans le fait que l'application $f : X \to S$ n'est pas propre. Nous contournons ce problème en considérant la fermeture du graphe de f dans $\mathbb{P}^2 \times S$. Rappelons que C_f est la courbe donnée sur la surface affine $\mathbb{P}^2 \backslash V_{\overline{g}}$ par l'équation :

$$f = \frac{\overline{A}(X,Y,Z)}{\overline{g}(X,Y,Z)} = 0, \quad \text{avec} \quad \deg \overline{g} = \deg \overline{A}$$

et $(\overline{A}, \overline{g}) = 1$.

On considère $\overline{\Gamma}$ la fermeture du graphe de f dans $\mathbb{P}^2 \times S$. C'est l'hypersurface de $\mathbb{P}^2 \times S$ d'équation :

$$\overline{A}(x,y,z) - t\overline{g}(x,y,z) = 0.$$

On note $H_\infty = V_{\overline{g}} \times S$ l'hypersurface à l'infini de $\mathbb{P}^2 \times S$ et

$$\overline{\Gamma}_\infty = \overline{\Gamma} \cap H_\infty = (V_{\overline{A}} \cap V_{\overline{g}}) \times S$$

Comme $\overline{A}$ et $\overline{g}$ n'ont pas de facteur commun, on a $\dim(V_{\overline{A}} \cap V_{\overline{g}}) = 0$ et donc $\dim \overline{\Gamma}_\infty = 1$.

L'ensemble des points singuliers de $\overline{\Gamma}$ est défini par :

$$\overline{\Gamma}_{sing} = \left\{ a \in \overline{\Gamma}_\infty / \frac{\partial \overline{A}}{\partial x} - t\frac{\partial \overline{g}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial y} - t\frac{\partial \overline{g}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial z} - t\frac{\partial \overline{g}}{\partial z} = 0 \right\}$$

Soit $\mathcal{A} = (A_i)$ une stratification de Whitney de $\overline{\Gamma}_\infty$. Si l'on note $V_{\overline{A}} \cap V_{\overline{g}} = \{p_i, 1 \leq i \leq p\}$, on peut prendre par exemple la stratification :

$$A_i = p_i \times S$$

où les A_i sont des ouverts de Zariski de $p_i \times \mathbb{C}$, et on remarque que $\overline{\Gamma}_{sing}$ est une réunion de strates.

On considère la stratification de $\overline{\Gamma}$:

$$B_{-1} = \overline{\Gamma} \backslash \overline{\Gamma}_\infty, \qquad B_i = A_i.$$

On doit vérifier les conditions de régularité de B_{-1} sur B_i.

1. ou bien B_i n'est pas dans $\overline{\Gamma}_{sing}$ et les conditions de Whitney sont vérifiées. Cela résulte trivialement du fait que si $X = \mathbb{R}^k \times 0 \subset \mathbb{R}^n$ et $Y \subset \mathbb{R}^n \backslash X$ est un ouvert alors Y est Whitney-régulière sur X.
2. ou bien B_i est dans $\overline{\Gamma}_{sing}$. Comme la dimension de la strate B_i est 1, le critère de μ^*-constance [**10**], revient à vérifier que la famille à un paramètre de singularités le long de B_i définie par $\overline{B_{-1}}$ est μ-constante. Cela est réalisé par hypothèse du fait que $\lambda_t = 0, \forall t \in S$, et donc B_{-1} est Whitney-régulière sur B_i.

Pour conclure, on utilise le théorème d'isotopie de Thom pour l'application $pr_2 : \overline{\Gamma} \to \mathbb{C}$ qui est évidemment propre sur l'adhérence de chaque strate. □

Remarque 1. — Si $S' \subset \mathbb{C}$ est telle que f réalise une fibration localement triviale de $f^{-1}(S')$ au dessus de S' alors $S' \subset S$. En effet, il revient au même que B est le plus petit ensemble tel que f est une fibration localement triviale au dessus du complémentaire. Clairement si un ensemble jouit de cette propriété, il doit contenir les fibres singulières. De plus, comme le nombre de Milnor est un invariant topologique,au dessus de S', toutes les fibres ont même nombre de Milnor à l'infini.

Nous désignerons ici et dans la suite par F la fibre générique de f. Le théorème de fibration précédent nous permet d'obtenir des résultats sur la topologie de la fibre générique :

Corollaire 1. — Le premier nombre de Betti de la fibre générique est donné par la formule :

$$b_1(F) = 1 - \chi(U) + \mu(f) + \lambda(f).$$

Démonstration. — Du fait de l'additivité de la charactéristique d'Euler, on a

$$\chi(U) = \chi(X) + \sum_{b \in B} \chi(F_b).$$

D'après la proposition précédente,

$$\chi(X) = (1 - |B|)\chi(F)$$

où $|B|$ désigne le cardinal de l'ensemble B. Nous avons donc :

$$\chi(U) = \chi(F) + \sum_{b \in B} (\chi(F_b) - \chi(F)), \tag{4}$$

avec :

$$\chi(F_b) - \chi(F) = \chi(\overline{F_b}) - \chi(\overline{F}) \tag{5}$$

$$= [2 - 2\frac{(D-1)(D-2)}{2} + \sum_a \mu(\overline{F_b}, a)] \tag{6}$$

$$- [2 - 2\frac{(D-1)(D-2)}{2} + \sum_a \mu(\overline{F}, a)] \tag{7}$$

$$= (\mu_b + \mu_b^\infty) - \mu_{gén}^\infty \tag{8}$$

$$= \mu_b + \lambda_b \tag{9}$$

où D est le degré de $\overline{A}$. □

Dans le cas classique, C est la droite à l'infini, $U \simeq \mathbb{C}^2$ donc $\chi(U) = 1$ et $b_1(F) = \mu(f) + \lambda(f)$. La même formule reste vraie si :
– C est une conique lisse car alors $C \simeq \mathbb{P}^1$ et $\chi(U) = \chi(\mathbb{P}^2) - \chi(\mathbb{P}^1) = 1$.
– C est une cubique cuspidale. C est alors homéomorphe à $\mathbb{P}^1$ et l'on peut refaire le raisonnement précédent.

Nous avons la

Proposition 4. —

$$\dim H^1(U, F) = 0, \tag{10}$$

$$\dim H^2(U, F) = \mu(f) + \lambda(f). \tag{11}$$

Démonstration. — Nous avons la suite exacte suivante :

$$\begin{aligned} H^0(U) \to H^0(F) \to H^1(U,F) \to H^1(U) \xrightarrow{j^*} H^1(F) \to \\ \to H^2(U,F) \to H^2(U) \to H^2(F) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

La première assertion implique que j^* est injectif et la deuxième découle immédiatement du même fait et du corollaire 1 . On doit donc montrer que j^* est injectif ou que l'application duale

$$j_* : H_1(F) \to H_1(U)$$

est surjective, ou bien que :

$$j_\sharp : \pi_1(F) \to \pi_1(U)$$

est surjective. Pour cela, on utilise la suite exacte de la fibration [**1**][pp. 453] f de X sur S qui donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_2(S) \arrow[r, "\delta_\sharp"] & \pi_1(F) \arrow[r] \arrow[dr, "j_\sharp"] & \pi_1(X) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d, "p_\sharp"] & \pi_1(S) \arrow[r] & 1 \\
& & \pi_1(U) & &
\end{tikzcd}$$

où $\pi_2(S) = 1$ du fait que $\dim(S) = 1$.

Nous aurons besoin de la proposition suivante qui est un cas particulier du théorème de Zariski du type Lefschetz :

Fait 1 ([**3**] pp. 121). — Pour toute hypersurface $V \subset \mathbb{P}^n$ et toute droite L de $\mathbb{P}^n$ qui intersecte V de manière transverse en évitant la partie singulière V_{sing}, nous avons un épimorphisme :

$$\pi_1(L \backslash (V \cap L)) \to \pi_1(\mathbb{P}^n \backslash V)$$

qui provient de l'inclusion.

Comme $X = f^{-1}(S)$, l'application $p_\sharp$ est évidemment un épimorphisme. On se donne donc $[\alpha]$ un élément de $\pi_1(U)$ qui se relève en un élément $[\beta]$ de $\pi_1(X)$. Si $f_\sharp([\beta]) = 0$ alors $[\beta]$ se relève dans $\pi_1(F)$.

Dans le cas contraire, si l'on note $V = \mathbb{P}^2 \backslash X$, on se donne une droite L de $\mathbb{P}^2$ qui intersecte V de manière transverse en évitant la partie singulière V_{sing}. D'après la proposition, nous avons un épimorphisme :

$$\pi_1(L \backslash (V \cap L)) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_1(X)$$

De plus, si l'intersection $V \cap L$ consiste en d points $\{p_i, 1 \leq i \leq d\}$ alors $\pi_1(L \backslash (V \cap L))$ est le groupe libre engendré par $d-1$ générateurs.

On peut supposer que $L \cap f^{-1}(B) = \{p_i, 1 \leq i \leq k\}$ pour un entier $k \leq d$. Soit alors G le sous-groupe libre de $\pi_1(L \backslash (V \cap L))$ engendré par les classes associées à de petits lacets qui tournent autour des p_i pour $1 \leq i \leq k$. Alors le morphisme :

$$G \xrightarrow{i_\sharp} \pi_1(X) \xrightarrow{f_\sharp} \pi_1(S)$$

est un épimorphisme. En effet, si l'on note E le sous-groupe de $\pi_1(L \backslash (V \cap L))$ engendré par les classes associées à de petits lacets qui tournent autour des p_i, pour $k+1 \leq i \leq d-1$ alors le morphisme :

$$E \xrightarrow{i_\sharp} \pi_1(X) \xrightarrow{f_\sharp} \pi_1(S)$$

est nul et comme $\pi_1(L\backslash(V \cap L)) = G * E$ et que $i_\sharp \circ f_\sharp$ est surjectif, $i_\sharp \circ f_{\sharp|G}$ est surjectif.

Comme $i_\sharp$ est surjectif, $[\alpha]$ se relève en un élément $[\alpha'] \in \pi_1(L\backslash(V \cap L))$. De plus, $f_\sharp([\alpha]) \in \pi_1(S)$ se relève en un élément $[\beta] \in G$. On considère l'élément $[\gamma]$ de $\pi_1(X)$ défini comme $i_\sharp([\alpha'] - [\beta])$. Du fait que $p_\sharp \circ i_\sharp([\beta]) = 0$, nous avons $p_\sharp([\alpha]) = p_\sharp([\gamma])$ et de plus $f_\sharp([\gamma]) = 0$ ce qui nous ramène au premier cas. $\square$

Exemple 1. —

$$g = x^2 + y^2 + z^2$$
$$f = \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2}$$

L'équation de la fibre en t est :

$$F_t : xy - t(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - 2tx, \frac{\partial F}{\partial y} = x - 2ty, \frac{\partial F}{\partial z} = -2tz. \tag{14}$$

Donc les points singuliers de la fibre F_t sont :
– ou bien $t = 0$ et $(0 : 0 : 1)$ est un point singulier. Nous avons $\mu_0 = 1$,
– ou bien $x - 4t^2x = 0$, c'est-à-dire $t = \pm 1/2$ (car $X \neq 0$).
  – si $t = 1/2$, le point singulier a pour coordonnées homogènes $(1 : 1 : 0)$. On a

$$F_{1/2} : xy - 1/2(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

que l'on peut écrire dans l'ouvert affine $x \neq 0$ comme la courbe d'équation $f_{1/2}$ avec :

$$f_{1/2} : y - 1/2(1 + y^2 + z^2) = 0.$$

En faisant le changement de coordonnées $y \mapsto y + 1$, $z \mapsto z$ on obtient la courbe d'équation :

$$f_{1/2} : -1/2(y^2 + z^2) = 0,$$

$$\frac{\partial f_{1/2}}{\partial y} = -y, \frac{\partial f_{1/2}}{\partial z} = -z, \tag{15}$$

donc :

$$\mu_{1/2} = \dim \frac{\mathbb{C}\{y,z\}}{(-y,-z)} = 1.$$

– si $t = -1/2$, le point singulier a pour coordonnées homogènes $(1 : -1 : 0)$.

$$F_{-1/2} : xy + 1/2(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Que l'on peut écrire dans l'ouvert affine $x \neq 0$ comme la courbe d'équation $f_{1/2}$ avec :

$$f_{-1/2} : y + 1/2(1 + y^2 + z^2) = 0.$$

En faisant le changement de coordonnées $z \mapsto x$, $y \mapsto y - 1$ on obtient la courbe d'équation :

$$f_{-1/2} : 1/2(y^2 + z^2) = 0$$

$$\frac{\partial f_{-1/2}}{\partial y} = y, \frac{\partial f_{-1/2}}{\partial z} = z, \tag{16}$$

donc :

$$\mu_{-1/2} = \dim \frac{\mathbb{C}\{y,z\}}{(y,z)} = 1.$$

Conclusion : Pour cette courbe,

$$S = \mathbb{C}\backslash\{0, -1/2, 1/2\}, \mu = 3, \lambda = 0.$$

D'après le corollaire 1, $b_1(F) = \mu(f) + \lambda(f) = \mu = 3$. D'autre part, $F = \mathbb{P}^1\backslash\{4 \quad \text{points}\}$ donc F est homéomorphe à $S^1 \vee S^1 \vee S^1$.

Exemple 2. —

$$g = xyz, f = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$$

L'équation de la fibre en t est :

$$F_t : x^3 + y^3 + z^3 - t(xyz) = 0$$

Dans la suite nous poserons $h(x,y,z) = xyz - t(x^3 + y^3 + z^3)$. Les points singuliers sont solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = 3tx^2 - yz = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = 3ty^2 - xz = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} = 3tz^2 - xy = 0 \end{cases} \tag{17}$$

En prenant le produit de ces trois dernières équations on obtient :

$$27(xyz)^2 = t^3(xyz)^2$$

– Cas I : $xyz = 0$. Si par exemple $x = 0$ alors les équations (2.12) et (2.13) donnent $y = z = 0$ contradiction. Donc le cas I est impossible.
– Cas II : $xyz \neq 0$. Alors $t^3 = 27$ et nous posons :

$$t_1 = 3, t_2 = 3\epsilon, t_3 = 3\epsilon$$

avec $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$. On peut aussi prendre par exemple $x = 1$. Il vient :

$$\begin{cases} yz = \dfrac{3}{t} \\ tz = 3y^2 \\ ty = 3z^2 \end{cases} \tag{18}$$

et donc

$$\begin{cases} 3y^3 = 3 \\ z = \dfrac{3}{t}y^2 \end{cases} \tag{19}$$

Donc les points singuliers ont pour coordonnées homogènes :
– pour $t = 3$: $[1:1:1]$,$[1:\epsilon:\epsilon^2]$,$[1:\epsilon^2:\epsilon]$.
– pour $t = 3\epsilon$: $[1:1:\epsilon^2]$,$[1:\epsilon:\epsilon]$,$[1:\epsilon^2:1]$.
– pour $t = 3\epsilon^2$: $[1:1:\epsilon]$,$[1:\epsilon:1]$,$[1:\epsilon^2:\epsilon^2]$.

On a donc 9 points singuliers, tous dans U. La fibre générique, $F = F_0$ est une cubique lisse moins les 9 points d'intersection $C_1 \cap C_2$ où les courbes C_1 et C_2 sont données par les équations :

$$C_1 : X^3 + Y^3 + Z^3 = 0 \tag{20}$$

$$C_2 : XYZ = 0 \tag{21}$$

On a donc :

$$\chi(F) = \chi(C_1)\backslash\{9\text{points}\} = -9 \Rightarrow \mathrm{b}_1(\mathrm{F}) = 10 \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \chi(U) &= \chi(\mathbb{P}^2\backslash\text{trois} \quad \text{droites}) \\ &= \chi(\mathbb{A}^2\backslash\{xy = 0\}) \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Donc le corollaire 1 nous donne :

$$b_1(F) = \mu(f) + 1$$

et finalement $\mu(f) = 9$, c'est-à-dire que toutes les singularités de f sont de type A_1.

Exemple 3. — Si C est une courbe lisse de degré d. Comme

$$\chi(U) = \chi(\mathbb{P}^2) - \chi(C) = 2 - (2 - 2g) = (d-1)(d-2),$$

nous remarquons que du fait que :

$$\mu(f) + \lambda(f) \geq \chi(U) - 1$$

sur la surface U toute fonction admet soit des singularités dans U, soit un saut de nombre de Milnor à l'infini dès que $d > 2$.

3. Un analogue d'un résultat de Abhyankar et Moh

3.1. Un résultat élémentaire. — Dans la section précédente, nous avons étudié quelques propriétés des pinceaux de courbes définies par une fonction régulière sur une surface affine donnée comme le complément dans $\mathbb{P}^2$ d'une courbe réduite. L'objet de cette section est de démontrer un résultat qui dans le cas classique où la courbe à l'infini est la droite $\mathbb{P}^1$ se déduit d'un théorème dû à Abhyankar et Moh [**7**]. Nous énonçons tout d'abord ce théorème dans le contexte qui nous intéresse :

Théorème 2. — On se donne sur $\mathbb{C}^2$ une fonction régulière f et on suppose que $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ est une fibration localement triviale. Alors il existe une application birégulière α de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ telle que :

$$f \circ \alpha = p$$

où p est la projection de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ selon la première coordonnée.

Dans notre situation nous voulons démontrer le résultat analogue suivant :

Théorème 3. — On se donne sur la surface affine $U = \mathbb{P}^2 \backslash C$ où C est une courbe irréductible de $\mathbb{P}^2$, une fonction régulière f. On suppose que $f : U \to \mathbb{C}$ est une fibration localement triviale. Alors C est une droite projective et $F \simeq \mathbb{C}$.

Démonstration. — Puisque f réalise une fibration localement triviale sur $\mathbb{C}$ et que $\mathbb{C}$ est contractible, f est en fait une fibration triviale au dessus de $\mathbb{C}$. Nous obtenons un homéomorphisme :

$$U \simeq \mathbb{C} \times F. \qquad (24)$$

En particulier, F est connexe. Suivant [**3**][pp. 102] nous avons donc :

$$H_1(U,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \tag{25}$$

où d est le degré de la courbe C. De plus,

$$H_1(\mathbb{C}\times F,\mathbb{Z}) = H_1(F,\mathbb{Z}) = H_1(\bigvee_q S^1) = \mathbb{Z}^q. \tag{26}$$

De (25) et (26) nous tirons que $d = 1$ et $q = 0$ donc C est une droite et $F \simeq \mathbb{C}$ car toute courbe connexe lisse Y telle que $H_1(Y) = 0$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. $\square$

3.2. Un résultat plus général. — Le résultat précédent dont la démonstration est élémentaire peut se généraliser à la situation suivante.

THÉORÈME 4. — *Soit S une surface projective, $C \subset S$ une courbe irréductible. On pose $U = S\backslash C$ et on se donne une fonction régulière f sur U. On suppose que $f : U \to \mathbb{C}$ est une fibration localement triviale et que le premier nombre de Betti de S, $b_1(S)$ est nul, alors C est une courbe rationnelle homéomorphe à la droite projective.*

Nous reportons la démonstration de ce résultat pour donner les définitions et résultats que nous utiliserons dans le cours de la démonstration.

Nous nous plaçons donc dans la situation générale suivante : soit X une variété algébrique de dimension n. Dans tout le reste de la section, $H^j_c(X,\mathbb{C})$ désignera le j^{ieme} groupe de cohomologie de X à support compact et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Nous savons d'après [**2**] que $H^j(X,\mathbb{C})$ (resp. $H^j_c(X,\mathbb{C})$) est muni d'une structure de Hodge mixte et donc en particulier d'une filtration par le poids. Nous avons donc :

$$0 \subset W_0(H^j(X,\mathbb{C})) \subset \ldots \subset W_{2n}(H^j(X,\mathbb{C})) = H^j(X,\mathbb{C}) \tag{27}$$

$$(\textit{resp.}\quad 0 \subset W_0(H^j_c(X,\mathbb{C})) \subset \ldots \subset W_{2n}(H^j_c(X,\mathbb{C})) = H^j_c(X,\mathbb{C})) \tag{28}$$

DÉFINITION 1. — *Nous appellerons polynôme de Serre ou polynôme de poids de la variété X, le polynôme à coefficients entiers :*

$$W(X,t) = \sum_{m,j}(-1)^j \dim Gr^W_m H^j(X)t^m. \tag{29}$$

De la même manière nous définissons le polynôme de Serre à support compact comme :

$$W_c(X,t) = \sum_{m,j} (-1)^j \dim Gr_m^W H_c^j(X) t^m. \tag{30}$$

Le polynôme de poids jouit des mêmes propriétés que la caractéristique d'Euler tout en étant un invariant plus précis puisqu'il tient compte de la graduation par le poids de la cohomologie des variétés algébriques. En particulier le polynôme de poids est additif dans le sens suivant [**4**] :

Proposition 5. — Soit X une variété algébrique et soit $Y \subset X$ une sous-variété de X alors si l'on pose $U = X \backslash Y$ on a :

$$W_c(X,t) = W_c(Y,t) + W_c(U,t). \tag{31}$$

Il est aussi multiplicatif suivant le :

Théorème 5 ([**4**]). — Soient X et S deux variétés algébriques, $f : X \to S$ un morphisme qui réalise une fibration localement triviale de fibre F. Nous supposons de plus que le système local $R^j f_* \mathbb{C}_X$ est constant pour tout j alors :

$$W_c(X,t) = W_c(F,t) W_c(S,t). \tag{32}$$

Remarque 2. — Si X est une variété compacte alors $H_c^*(X) = H^*(X)$ et donc $W(X,t) = W_c(X,t)$.

Exemple 4. — Si C est une courbe lisse projective de genre g alors

$$W_c(C,t) = W(C,t) = 1 - 2gt + t^2. \tag{33}$$

En effet nous avons :
- $H^0(C,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ qui est muni d'une structure pure de poids 0.
- $H^1(C,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{2g}$ qui est muni d'une structure pure de poids 1.
- $H^2(C,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ qui est muni d'une structure pure de poids 2.

Exemple 5. — On se donne $F = C \backslash A$ où C est une courbe projective lisse de genre g et A un ensemble fini de points de C. Nous avons :

$$\begin{aligned} W_c(F,t) &= W_c(C,t) - W_c(A,t) \\ &= 1 - 2gt + t^2 - |A| \end{aligned} \tag{34}$$

Exemple 6. — On considère maintenant C une courbe projective irréductible mais peut-être singulière. Soit $n : \tilde{C} \to C$ une normalisation de C. Nous savons que $\tilde{C}$ est une courbe lisse projective et nous noterons g son genre.

Nous avons :

$$\begin{aligned} W(C,t) &= W_c(C,t) = W_c(C \backslash C_{sing}, t) + W_c(C_{sing}, t) \\ &= W_c(\tilde{C} \backslash n^{-1}(C_{sing}), t) + |C_{sing}| = W_c(\tilde{C}) - |n^{-1}(C_{sing})| + |C_{sing}| \end{aligned} \tag{35}$$

où C_{sing} désigne la partie singulière de la courbe C.

Comme de plus

$$|n^{-1}(C_{sing})| - |C_{sing}| = \sum_{a \in C_{sing}} (n(C,a) - 1), \tag{36}$$

où $n(C,a)$ désigne le nombre de composantes irréductibles locales de la courbe C en a. Nous obtenons finalement :

$$W(C,t) = 1 - 2gt + t^2 - \sum_{a \in C_{sing}} (n(C,a) - 1). \tag{37}$$

Exemple 7. — On suppose que $F = C \backslash A$ où C est une courbe projective peut-être singulière et A un nombre fini de points. Soit $n : \tilde{C} \to C$ une normalisation de C. Nous noterons g le genre de $\tilde{C}$. Alors :

$$W(C,t) = 1 - 2gt + t^2 - \sum_{a \in C_{sing}} (n(C,a) - 1) - |A|. \tag{38}$$

Cela résulte immédiatement des deux exemples précédent.

Nous pouvons maintenant revenir à la preuve du théorème 4.

Démonstration. — Nous pouvons écrire le polynône de Serre de S sous la forme :

$$W_c(S,t) = 1 - b_1(S)t + b_2(S)t^2 - b_3(S)t^3 + t^4, \tag{39}$$

où les $b_i(S)$ sont les nombres de Betti de S. Nous savons d'une part du fait de la dualité de Poincaré que $b_1(S) = b_3(S)$ d'autre part d'après la théorie de Hodge que $b_1(S)$ et $b_3(S)$ sont pairs. Par hypothèse, $b_1(S) = b_3(S) = 0$.

D'autre part comme :

$$f : U \to \mathbb{C}$$

réalise une fibration localement triviale, on a :

$$W_c(\mathbb{C},t)W_c(F,t) = W_c(U,t). \tag{40}$$

Il est facile de calculer $W_c(\mathbb{C},t)$:

$$\begin{aligned} W_c(\mathbb{C},t) &= W_c(\mathbb{P}^1,t) - W_c(\{\infty\},t) \\ &= 1 + t^2 - 1 = t^2. \end{aligned} \tag{41}$$

D'autre part nous avons :

$$\begin{aligned} W_c(U,t) &= W_c(S,t) - W_c(C,t) \\ = 1 - b_1(S)t + b_2(S)t^2 - b_3(S)t^3 + t^4 &- (1 - 2g_{\tilde{C}}t + t^2) + \sum_{a \in C_{sing}} (n(C,a) - 1) \\ = t^4 - b_3(S)t^3 + (b_2(S) - 1)t^2 &- (b_1(S) - 2g_{\tilde{C}})t + \sum_{a \in C_{sing}} (n(C,a) - 1), \end{aligned} \tag{42}$$

où $g_{\tilde{C}}$ désigne le genre de la courbe normalisée $\tilde{C}$ de C, et :

$$W_c(F,t) = (1 - 2g_{\tilde{F}}t + t^2) - \sum_{b \in \overline{F}_{sing}} (n(\overline{F},b) - 1) - |A|, \tag{43}$$

où $g_{\tilde{F}}$ désigne le genre de la courbe normalisée $\tilde{F}$ de $\overline{F}$ et $A = \overline{F} \cap C$.

En injectant (41), (42), (43) dans (40) et en identifiant les coefficients de même degré il vient :

$$2g_{\tilde{F}} = b_3(S), \tag{44}$$

$$1 - \sum_{b \in F_{sing}} (n(\overline{F},b) - 1) - |A|) = b_2(S) - 1, \tag{45}$$

$$b_1(S) - 2g_{\tilde{C}} = 0, \tag{46}$$

$$\sum_{a \in C_{sing}} (n(C,a) - 1) = 0. \tag{47}$$

Nous tirons successivement des équations précédentes que : Pour tout $a \in C_{sing}$, $n(C,a) = 1$ donc $n : \tilde{C} \to C$ est un homéomorphisme et $\tilde{C}$ est une courbe projective lisse de genre 0 donc $\tilde{C} = \mathbb{P}^1$ donc $C \simeq \mathbb{P}^1$. En particulier, si C est lisse alors $C = \mathbb{P}^1$. $\square$

Remarque 3. — Si l'on suppose de plus que $b_2(S) = 1$, alors nous tirons de (44) que $n(\overline{F},b) = 1$ pour $b \in F_{sing}$ donc $F = \overline{F} \backslash A$ où $\overline{F}$ est une courbe rationnelle à singularités irréductibles.

4. Cocycles invariants

Dans cette section, nous étudions les cocycles de F_{s_0} invariants par l'action de groupe fondamental de S.

Nous reprenons les notations des deux dernières sections. Comme X est un fibré localement trivial au dessus de S, nous avons une application naturelle :

$$\rho : \pi_1(S, s_0) \to Aut H^1(F_{s_0}),$$

la représentation de monodromie. Nous noterons $H^1(F_{s_0})$ les 1-cocycles invariants par la représentation de monodromie. La proposition suivante donne la dimension de $H^1(F_{s_0})$ et généralise un résultat de [**5**].

PROPOSITION 6. —

$$\dim H^1(F_{s_0})^\rho = n(C) - 1 + \sum_{b \in B} (n(F_b) - 1).$$

Démonstration. — Nous avons la suite exacte suivante :

$$0 \to H^1(S) \to H^1(X) \xrightarrow{i^*} H^1(F_{s_0})$$

où $\dim H^1(S) = |B|$ et $\dim H^1(X) = -1 + n(C) + \sum_{b \in B} n(F_b)$. □

De plus, nous pouvons représenter les classes de $H^1(F_{s_0})^\rho$ par des formes différentielles de la manière suivante :

Une base de $H^1(S)$ est donnée par les formes :

$$\alpha_b = \frac{dz}{z - b}$$

pour tout $b \in B$.

On obtient une base de $H^1(X)$ de la manière suivante. Soit $b \in B$ une valeur spéciale, on suppose que

$$f - b = f_{1b} \dots f_{n(b)b}$$

est une décomposition de $f - b$ en ses facteurs irréductibles. En particulier on a $n(b) = n(F_b)$. De même, on décompose la courbe à l'infini C_g en ses composantes irréductibles :

$$g = g_1 \dots g_{n(g)}.$$

Alors une base de $H^1(X)$ est donnée par les formes suivantes :

$$\alpha^l = \frac{dg_l}{g_l}, \qquad 1 \leq l \leq n(g) - 1,$$

$$\beta_b^l = \frac{df_{lb}}{f_{lb}}, \qquad b \in B, \qquad 1 \leq l \leq n(b) - 1.$$

Avec ces notations, on a :

$$f^*(\alpha_b) = \sum_{l=1}^{n(b)} \beta_b^l$$

Remarquons que les 1-formes α^l et β_b^l sont analytiques sur F_{s_0}. Nous avons donc prouvé la :

Proposition 7. — Les classes de cohomologie $j^*([\alpha^l])$ pour $1 \leq l \leq n(g) - 1$ et $j^*([\beta_b^l])$ pour $1 \leq l \leq n(b) - 1$ forment une base de $H^1(F_{s_0})^\rho$.

Références

[1] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry.* Springer-Verlag, graduate texts in mathematics edition, 1993.

[2] P. Deligne. Théorie de Hodge II. *Publ. I.H.E.S*, 40 :5–57, 1971.

[3] A. Dimca. *Singularities and Topology of Hypersurfaces.* Springer-Verlag, universitext edition, 1992.

[4] A. Dimca and G. I. Lehrer. Purity and equivariant weight polynomials. In *Algebraic groups and Lie groups*, pages 161–181. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[5] Alexandru Dimca. Invariant cycles for complex polynomials. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 43(1-2) :113–120, 1998. Collection of papers in memory of Martin Jurchescu.

[6] Milnor. *Singular Points of Complex Hypersurfaces.* Princeton University Press, annals of mathematics studies edition, 1974.

[7] T. Moh S. Abhyankar. Embeddings of the line in the plane. *Séminaire Bourbaki*, page 12, 1966/67.

[8] A. Schinzel. *Selected Topics on Polynomials.* The University of Michigan Press, 1982.

[9] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.

[10] B. Teissier. Cycles évanescents, sections planes et conditions de whitney. *Astérisque*, 718 :285–362, 1973.

[11] Lê Dung Trang and Claude Weber. Équisingularité dans les pinceaux de germes de courbes planes et C^0-suffisance. *Enseign. Math. (2)*, 43(3-4) :355–380, 1997.

[12] Hà Huy Vui and Lê Dung Tráng. Sur la topologie des polynômes complexes. *Acta Math. Vietnam.*, 9(1) :21–32 (1985), 1984.