Habilitation à diriger des recherches
mention « Mathématiques et applications »

Université de Rennes 1

présentée par

David Bourqui

Espaces de modules de courbes sur les hypersurfaces intrinsèques linéaires

soutenue le 28 novembre 2013
devant le jury composé de

Victor Batyrev *(université de Tübingen)*
Antoine Chambert-Loir *(université Paris XI)*
Driss Essouabri *(université Jean Monnet - St-Étienne)*
Emmanuel Peyre *(université Joseph Fourier - Grenoble 1)*
Julien Sebag *(université de Rennes 1)*

au vu des rapports de Victor Batyrev, Driss Essouabri
et Yuri Tschinkel *(université de New York)*

Je suis extrêmement reconnaissant envers les trois rapporteurs de ce travail. Ils me font un grand honneur mais aussi et surtout un immense plaisir d'avoir accepté cette tâche. Je remercie chaleureusement rapporteurs et membres du jury pour le temps qu'ils ont bien voulu consacrer à cette habilitation et plus généralement pour tout ce que, d'une façon ou d'une autre, ils m'ont apporté mathématiquement.

À l'occasion de cette soutenance, je dois des remerciements et parfois bien plus à de nombreux collègues, membres du personnel administratif, amis et bien sûr membres de ma famille. Qu'ils me pardonnent de ne pas m'acquitter ici de cette dette dans le détail, tenaillé par la crainte de ne pas y parvenir de manière satisfaisante en quelques lignes. Que tous soient en tout cas assurés que je ne peux oublier combien je leur suis redevable, et heureux de l'être.

Ce travail est dédié à Pierry, ses proches et ceux qui auraient pu l'être.

Ce texte présente les travaux de recherche que j'ai effectués après ma thèse de doctorat, c'est-à-dire essentiellement depuis mon arrivée à l'université de Rennes 1 en tant que maître de conférences en septembre 2004. La section d'introduction qui suit a pour but de décrire le contexte très général de ces travaux. Elle est suivie d'une section où sont détaillées les questions qui m'ont intéressé. La section 3 résume brièvement les résultats que j'ai obtenus et évoque les résultats d'autres auteurs relatifs à ces questions. Une description plus précise de mes résultats, ainsi que les idées principales qui sous-tendent les démonstrations, occupent les deux dernières sections. Ce texte étant un document de synthèse, je me suis permis à de nombreux endroits d'adopter un style d'exposition mettant en avant les aspects intuitifs des idées mises en jeu, au détriment de la rigueur formelle absolue.

Dans tout le texte, si A est un ensemble fini, on désigne par $|A|$ son cardinal.

1. Introduction

Une équation diophantienne est une équation polynomiale à coefficients entiers dont on recherche les solutions entières ou rationnelles. L'intérêt pour ces équations remonte à l'Antiquité et n'a toujours pas faibli aujourd'hui. Les questions naturelles soulevées par ces équations sont nombreuses : l'ensemble des solutions est-il non vide ? fini ? s'il est fini, peut-on contrôler son cardinal, voire le décrire explicitement ? s'il est infini, peut-on en donner un paramétrage simple ? et peut-on donner quand même, en un certain sens, une estimation quantitative du nombre de solutions ?

Dans le langage de la géométrie algébrique moderne, l'ensemble des solutions d'un système d'équations diophantiennes s'interprète comme l'ensemble des points rationnels d'une variété algébrique. Ceci amène un éclairage géométrique très utile et enrichissant sur les questions ci-dessus. L'idée directrice, largement popularisée en particulier par Serge Lang dans son ouvrage *Diophantine Geometry*, est que les propriétés de l'ensemble des solutions d'un système d'équations diophantiennes devraient être en un sens dictées par la géométrie de la variété algébrique correspondante. L'un des résultats les plus connus et spectaculaires en ce sens, conjecturé par Mordell en 1922 et démontré par Faltings en 1983, est le fait que si la variété en question une courbe de genre au moins 2, alors l'ensemble des solutions est fini.

La question qui nous intéresse ici est la dernière de la liste ci-dessus : lorsque l'ensemble des solutions est infini, peut-on en donner en un sens une estimation quantitative ? En accord avec la philosophie décrite précédemment, on s'attend à ce qu'une telle estimation puisse s'interpréter en termes de la géométrie de la variété correspondante. C'est à la fin des années 1980 que Manin et ses collaborateurs ont proposé un cadre d'étude systématique pour ce type de problème.

La notion d'estimation quantitative est précisée au moyen d'une certaine fonction numérique définie sur l'ensemble des points rationnels et permettant de mesurer leur complexité. De telles fonctions, baptisées hauteurs, avaient été initialement introduites par Weil dans les années 1920 pour démontrer que le groupe des points rationnels d'une variété abélienne est de type fini. Un exemple simple est la fonction H définie sur l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels par $H(\frac{p}{q}) = \mathrm{Max}(|p|, |q|)$, où p et q sont premiers entre eux. Une des propriétés fondamentales d'une fonction hauteur, que l'on constate aussitôt dans le cas de l'exemple simple précédent, est que le nombre de points rationnels de hauteur bornée est fini.

Pour une variété algébrique X définie sur $\mathbf{Q}$ ou plus généralement sur un corps de nombres K, et une fonction hauteur $H : X(K) \to \mathbf{R}$ sur l'ensemble de ses points rationnels, on peut alors considérer la fonction de comptage

$$N(X, H, B) \overset{\text{déf}}{=} |\{x \in X(K), \quad H(x) \leqslant B\}|, \quad B \in \mathbf{R}. \tag{1.1}$$

Lorsque $X(K)$ est infini, l'estimation quantitative du nombre de points rationnels se comprend alors comme la détermination, à divers degrés de précision, du comportement asymptotique de $N(X, H, B)$ lorsque B tend vers $+\infty$. Une des premières occurences historiques de ce type de question est le problème du cercle de Gauss, dont le but est d'estimer le nombre de points entiers contenu dans un disque dont le rayon tend vers l'infini.

Batyrev et Manin ont énoncé dans [**BM90**] un certain nombre de prédictions sur le comportement asympotique de $N(X, H, B)$, en liaison avec la géométrie de la variété X et le choix de la hauteur H (qui correspond en particulier au choix d'un fibré en droites sur X) Ces prédictions sont notamment assez détaillées dans le cas où le fibré anticanonique de X est « suffisamment positif ». Voici une variante de [**BM90**, conjecture C'].

Prédiction 1.1. — *Soit X une variété projective et lisse, définie sur un corps de nombres K, dont le fibré anticanonique est gros. Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites gros et $H_{\mathcal{L}}$ une hauteur associée à $\mathcal{L}$.*

Alors pour toute extension L/K assez grande, il existe un « bon ensemble » $A \subset X(L)$ de points rationnels tel qu'on a

$$|\{x \in A, \quad H_{\mathcal{L}}(x) \leqslant B\}| \underset{B \to +\infty}{\sim} c(H_{\mathcal{L}}, L)\, B^{a(\mathcal{L})} \log(B)^{b(\mathcal{L})}. \tag{1.2}$$

Dans cet énoncé, $a(\mathcal{L})$ et $b(\mathcal{L})$ sont des invariants de nature géométrique liés aux positions relatives de la classe de $\mathcal{L}$ et de celle du faisceau anticanonique dans le cône effectif $C_{\text{eff}}(X)$ de X. On a en particulier $a(\omega_X^{-1}) = 1$ et $b(\omega_X^{-1}) = \text{rg}(\text{NS}(X)) - 1$. Par ailleurs $c(H_{\mathcal{L}}, L)$ est une constante strictement positive de nature arithmético-géométrique dont une interprétation a été donnée par la suite par Peyre ([**Pey95**]) lorsque $\mathcal{L} = \omega_X^{-1}$ puis par Batyrev et Tschinkel ([**BT98b**]) dans le cas général. En ce qui concerne la définition précise du bon ensemble de points rationnels intervenant dans l'énoncé, il avait été initialement conjecturé qu'on pouvait toujours le prendre de la forme $U(L)$ où U est un ouvert de Zariski dense et assez petit ; des exemples simples montrent de toute façon qu'il existe en général des fermés stricts qui « accumulent » les points vis-à-vis de la hauteur considérée. Cependant un autre exemple exhibé par Batyrev et Tschinkel dans [**BT96**] a montré qu'il était nécessaire dans certains cas d'accepter des bons ensembles dont le complémentaire est dense pour la topologie de Zariski. On peut notamment se demander, suivant Peyre ([**Pey03**, §8]), si la notion la plus pertinente en toute généralité ne serait pas celle de complémentaire d'un ensemble mince de points rationnels. Un résultat très récent de Le Rudulier donne un indice positif dans cette direction.

Nonobstant le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel, au cours de ces vingt-cinq dernières années, de très nombreux travaux ont montré que la prédiction initiale (en prenant pour bon ensemble les points rationnels d'un ouvert dense) était correcte pour de très larges classes de variétés et la recherche sur ce sujet est toujours très active. Les articles [**Pey95, BT98a, Sal98, ST99, Bre02, CLT02, STBT07, BBD07, BD09, dlBBP12, LB12**] forment un petit échantillon (très loin d'être exhaustif) de ces travaux.

Le type de problème de comptage décrit précédemment, ayant pour cadre une variété algébrique définie sur un corps de nombres K, sera désigné dans ce qui suit par le terme générique de « conjectures de Manin arithmétiques ». Ce n'est pas dans ce cadre que se placent les travaux décrits ci-dessous. Comme dans tout problème de géométrie arithmétique où le corps de base est un corps de nombres, il est naturel de se pencher sur l'analogue pour les corps de fonctions de dimension 1. La question est brièvement évoquée dans l'article de Batyrev et Manin déjà cité ([**BM90**, §3.13]). Ce sont en fait notamment des considérations heuristiques liées à cet analogue fonctionnel qui ont inspiré des questions telles que la conjecture C' de [**BM90**].

D'un point de vue purement géométrique, il s'agit de substituer à l'ensemble des points rationnels d'une variété algébrique définie sur un corps de nombres celui des sections d'une famille de variétés dont la base est une courbe projective et lisse $\mathscr{C}$. Le pendant de la notion de hauteur d'un point rationnel est fourni par le degré d'une section. Je désignerai alors par le terme générique de « conjectures de Manin géométriques » tout problème pouvant s'énoncer, en un certain sens, sous la forme suivante : quel est le comportement asymptotique des espaces de sections de la famille quand le degré devient grand ? Mon travail concerne l'étude, dans certains cas particuliers, de divers aspects des conjectures de Manin géométrique. Je donne à la section suivante des précisions sur les questions considérées, et me contente dans la fin de cette introduction de quelques considérations très générales.

Étant donnée une famille $\mathscr{X}/\mathscr{C}$, l'ensemble des sections de degré au plus d (pour un certain choix de polarisation) est paramétrée par une variété quasi-projective $\mathbf{Sec}(\mathscr{X}/\mathscr{C}, d)$. L'ensemble des sections de $\mathscr{X}/\mathscr{C}$ définies sur k et de degré au plus d est l'ensemble des points k-rationnels de cette variété. Il s'identifie également à un sous-ensemble des points de la fibre générique X de $\mathscr{X}/\mathscr{C}$ à valeurs dans le corps des fonctions $k(\mathscr{C})$.

On peut alors essentiellement distinguer deux situations.

La première est celle où le corps de définition de $\mathscr{C}$ est un corps fini k. L'ensemble $\mathbf{Sec}(\mathscr{X}/\mathscr{C}, d)(k)$ est alors fini, et on peut donc s'intéresser au comportement asymptotique de son cardinal lorsque d devient grand. Si on considère ce cardinal comme celui d'un sous-ensemble de $X(k(\mathscr{C}))$ il s'agit vraiment de l'analogue formel strict des problèmes étudiés dans le cadre des conjectures de Manin arithmétiques, le corps global $k(\mathscr{C})$ remplaçant le corps de nombres K. Les prédictions de Batyrev et Manin et leurs variantes et raffinements se transposent alors aisément.

La seconde situation est celle où le corps de définition de la courbe est un corps quelconque. Cela n'a alors plus de sens de considérer le comportement asymptotique des nombres $|\mathbf{Sec}(\mathscr{X} \to \mathscr{C}, d)(k)|$, puisque ce dernier cardinal est infini en général.

Mais il existe de nombreux invariants numériques, par exemple de nature cohomologique, dont il est a priori intéressant et naturel de se demander comment ils varient lorsque le degré devient grand. On peut même imaginer étudier le comportement asymptotique d'invariants qui ne sont plus nécessairement numériques, à condition d'avoir à disposition une notion de convergence adéquate.

La première situation peut être vue en un sens comme un cas particulier de la seconde. Depuis la démonstration par Deligne des conjectures de Weil, on sait en un certain sens que si on sait contrôler la cohomologie d'une variété définie sur un corps fini, on sait contrôler son nombre de points rationnels. Ainsi de la connaissance du comportement asymptotique d'invariants cohomologiques de la variété on peut imaginer pouvoir déduire des renseignements sur le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée.

2. Versions géométriques des prédictions de Batyrev et Manin

Dans cette section, je précise les versions des conjectures de Manin qui ont constitué le cadre de mes travaux. Dans les cas que j'ai étudiés, la famille $\mathscr{X}/\mathscr{C}$ était constante, et c'est ce que je supposerai désormais dans cette présentation. Il faut remarquer que même sous cette hypothèse simplificatrice, l'attaque générale du problème semble extrêmement délicate.

Soit donc X une variété projective et lisse définie sur un corps de base k. Soit $\mathscr{C}$ une courbe projective et lisse définie sur k. Si $\mathcal{L}$ est un fibré ample sur X, on sait grâce aux travaux de Grothendieck (*cf.* [**Gro95, Deb01**]) qu'il existe pour tout entier positif d une variété quasi-projective $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, \mathcal{L}, d)$ définie sur k qui paramètre l'ensemble des morphismes de $\varphi : \mathscr{C} \to X$ vérifiant $\deg(\varphi^*\mathcal{L}) = d$. La quantité $\deg(\varphi^*\mathcal{L})$ peut être interprétée comme la hauteur (logarithmique) associée à $\mathcal{L}$ de φ, vu comme élément de $X(k(\mathscr{C}))$. On s'intéresse au comportement asympotique des variétés $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, \mathcal{L}, d)$ lorsque d devient grand. Avant de préciser ce qu'on peut entendre par comportement asymptotique d'une suite de variétés, commençons par remarquer que bien que la suite $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, \mathcal{L}, d)$ dépende du choix du fibré ample $\mathcal{L}$, il existe un moyen simple de se débarasser de cette dépendance. Définissons en effet le degré « absolu » d'un morphisme $\varphi : \mathscr{C} \to X$ comme l'élément $\mathbf{deg}(\varphi)$ du dual $\mathrm{NS}(X)^\vee$ du groupe de Néron-Severi défini par

$$\mathbf{deg}(\varphi) : \begin{array}{ccc} \mathrm{NS}(X) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ \mathcal{L} & \longmapsto & \deg(\varphi^*\mathcal{L}) \end{array} \tag{2.3}$$

Alors pour tout élément $y \in \mathrm{NS}(X)^\vee$ il existe une variété quasi projective $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$ qui paramètre les morphismes $\mathscr{C} \to X$ de degré absolu y, et on a pour tout fibré ample $\mathcal{L}$ une décomposition en une réunion finie disjointe d'ouverts

$$\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, \mathcal{L}, d) = \bigsqcup_{\substack{y \in \mathrm{NS}(X)^\vee \\ \langle y\,,\,\mathcal{L}\rangle = d}} \mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y). \tag{2.4}$$

Au lieu d'étudier le comportement asymptotique de $\{\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, \mathcal{L}, d)\}$ pour un certain fibré ample, on peut plus généralement étudier le comportement de $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$

quand le degré absolu y devient grand. Pour un fibré ample $\mathcal{L}$ donné, on pourra alors, sous certaines conditions, en déduire le comportement asymptotique de la suite $\{\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, \mathcal{L}, d)\}_{d\geqslant 0}$ grâce à la décomposition (2.4).

Batyrev a remarqué que des énoncés tels que la prédiction 1.1 avaient un lien heuristique profond avec les estimations de dimension pour les espaces de modules $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$ fournies par la théorie de la déformation. Les deux ingrédients qui supportent sa remarque sont :

— (A) une variété géométriquement irréductible de dimension d défini sur un corps fini k de cardinal q a environ q^d points rationnels sur k ;
— (B) la dimension attendue de toute composante de $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$ est $\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle + (1 - g_{\mathscr{C}})\dim(X)$, où $g_{\mathscr{C}}$ est le genre de $\mathscr{C}$.

L'ingrédient (A) peut être compris comme l'hypothèse que dans la formule de Grothendieck-Lefschetz donnant le cardinal de $X(k)$ en fonction de la somme alternée des traces du Frobenius sur les espaces de cohomologie ℓ-adiques, le terme dominant est donné par la contribution du terme de plus haut degré. Notons que d'après le théorème de Deligne, c'est rigoureusement ce qui se passe dans la situation où la variété est fixée et le cardinal de k tend vers l'infini ; mais ici, on est dans un cadre où k est fixé et y varie.

En ce qui concerne l'ingrédient (B), la théorie de la déformation montre en fait que toute composante de $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$ a une dimension au moins égale à la dimension attendue, et qu'on a égalité pour les composantes dites non obstruées (celles dont les éléments se déforment suffisamment).

Batyrev souligne ainsi l'intérêt d'étudier le comportement asymptotique de la dimension et du nombre de composantes des espaces de modules $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$. Il s'agit d'ailleurs d'une question géométrique naturelle. On peut par exemple, pour un corps de définition k a priori quelconque, formuler la prédiction suivante, heuristiquement compatible, compte tenu de (A), avec la transposition des conjectures de Manin arithmétiques aux corps de fonctions d'une variable sur un corps fini (*cf.* les prédictions 2.2 un peu plus loin).

Prédiction 2.1. — *Soit X une variété projective et lisse telle que le faisceau anticanonique ω_X^{-1} est gros.*

Il existe un ouvert dense U de X et un entier strictement positif N tel que pour tout $y \in C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \cap \mathrm{NS}(X)^\vee$ avec $\mathrm{dist}(y, \partial C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee)$ assez grand, l'ouvert $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y) \subset \mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$ constitué des morphismes qui ne se factorisent pas à traves $X \setminus U$ a la dimension attendue $\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle + (1 - g_{\mathscr{C}})\dim(X)$ et possède N composantes.

Compte tenu de [**BDPP13**], le dual $C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee$ du cône effectif de X sera désigné sous le nom de *cône des courbes mobiles.* Notons que dans le cas où le cône effectif de X est engendré par un nombre fini de classe de diviseurs, pour tout ouvert U inclus dans le complémentaire du support de ces diviseurs et tout y qui n'est pas dans le cône des courbes mobiles, l'espace de modules $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)$ est vide.

La théorie de la déformation montre par ailleurs que si M est une composante de $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$ telle que le morphisme d'évaluation $\mathscr{C} \times M \to X$ qui à (φ, x) associe

$\varphi(x)$ est dominant, alors M a la dimension attendue. On en déduit aussitôt que que pour un $y \in C_{\text{eff}}(X)^\vee$ donné, il existe un ouvert dense U de X tel que toutes les composantes de $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)$ ont la dimension attendue. Mais d'une part, ce résultat n'exclut pas que $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)$ puisse être vide, et d'autre part l'ouvert U en question dépend a priori de y. Ce type d'argument permet toutefois dans certains cas de conclure quant à la dimension des composantes de $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)$ pour un ouvert U indépendant de y, par exemple lorsque X est une compactification d'un espace homogène.

Revenons à présent au cas d'un corps fini. Comme je l'ai déjà signalé, compte tenu de (A), les prédictions suivantes sont heuristiquement compatibles avec la prédiction purement géométrique 2.1.

Prédictions 2.2. — *Soit X une variété projective et lisse définie sur un corps fini k de cardinal q. On suppose que le faisceau anticanonique ω_X^{-1} est gros.*

Soit $\operatorname{Ind}(\omega_X^{-1}, \operatorname{NS}(X))$ *le plus petit entier strictement positif N tel que $\omega_X^{-1} \in N\,\operatorname{NS}(X)$.*

Il existe alors un ouvert dense U de X et une constante strictement positive c tels qu'on ait

$$\lim_{\substack{y \in \operatorname{NS}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \operatorname{dist}(y, \partial C_{\text{eff}}(X)^\vee) \to +\infty}} q^{-\left\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\right\rangle} \left|\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)(k)\right| = c \tag{2.5}$$

et

$$\sum_{\substack{y \in \operatorname{NS}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \left\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\right\rangle = d}} \left|\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)(k)\right| \underset{\substack{d \to +\infty \\ \operatorname{Ind}(\omega_X^{-1}, \operatorname{NS}(X)) \text{ divise } d}}{\sim} c \left|\left\{y \in \operatorname{NS}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee, \quad \left\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\right\rangle = d\right\}\right| q^{d}. \tag{2.6}$$

Par ailleurs, la constante c est égale à la valeur prédite par Peyre, analogue de sa prédiction dans le cas de la conjecture de Manin arithmétique (cf. la prédiction 1.1).

La deuxième prédiction correspond peu ou prou à la transposée stricte des conjectures de Manin arithmétiques. La première s'intéresse en un certain sens à une propriété d'équicontribution des degrés absolus des morphismes de degré anticanonique d au nombre total de tels morphismes. La validité de l'une des deux prédictions n'entraîne pas a priori celle de l'autre. Cependant la validité des deux prédictions découlerait de celle de la prédiction plus forte suivante :

Prédiction 2.3. — *Soit X une variété projective et lisse définie sur un corps fini k de cardinal q. On suppose que le faisceau anticanonique ω_X^{-1} est gros.*

Il existe alors un ouvert dense U de X, une constante strictement positive c, correspondant à la valeur prédite par Peyre, et des éléments non nuls $x_1, \dots, x_t$ de $C_{\text{eff}}(X)$

tels qu'on ait :

$$\forall y \in \mathrm{NS}(X)^{\vee} \cap C_{\mathrm{eff}}(X)^{\vee}, \qquad \left| q^{-\left\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\right\rangle} \left|\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)(k)\right| - c \right| \ll \sum_{i=1}^{t} q^{-\langle y\,,\,x_i\rangle}. \tag{2.7}$$

La validité de cette dernière prédiction entraîne par exemple la version « équirépartie dans le cône des courbes mobiles » de (2.6) : pour tout sous-cône $\mathcal{C}$ du cône des courbes mobiles, on a

$$\sum_{\substack{y \in \mathrm{NS}(X)^{\vee} \cap \mathcal{C} \\ \left\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\right\rangle = d}} \left|\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)(k)\right| \underset{\substack{d \to +\infty \\ \mathrm{Ind}(\omega_X^{-1}, \mathrm{NS}(X)) \text{ divise } d}}{\sim} c \left| \left\{ y \in \mathrm{NS}(X)^{\vee} \cap \mathcal{C}, \quad \left\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\right\rangle = d \right\} \right| q^{d}. \tag{2.8}$$

La constatation que la prédiction géométrique 2.1 d'une part, et les prédictions arithmético-géométriques 2.2 d'autre part sont compatibles compte tenu de l'heuristique (A) est bien évidemment très loin de fournir un argument acceptable permettant d'établir un lien rigoureux entre les deux types d'énoncés. L'un des principaux ingrédients manquants pour ce faire est ce qui fait précisément défaut pour rendre l'énoncé (A) rigoureux, à savoir un contrôle de toute la cohomologie, et pas seulement de la cohomologie en plus haut degré. Une question naturelle qui se dégage est donc : au-delà de la dimension et du nombre de composantes, peut-on plus généralement contrôler asymptotiquement la cohomologie des espaces de modules $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$? Ellenberg et Venkatesh, qui avaient utilisé l'heuristique (A) dans un contexte un peu différent de celui de la version fonctionnelle des conjectures de Manin ([**EV05**]), ont remarqué que la notion de cohomologie stable, étudiée depuis longtemps par les topologues, pouvait être pertinente dans ce cadre.

Ici je suis une approche suggérée par Peyre et inspirée par une démarche utilisée dans la théorie de l'intégration motivique, initiée par Kontsevich et développée notamment par Denef et Loeser ([**DL99, DL01**]). Il s'agit d'étudier la classe des espaces de modules $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$ dans l'anneau de Grothendieck des variétés. La définition de cet anneau est très simple (en contrepartie, l'étude de ses propriétés algébriques est particulièrement délicate) : le groupe sous-jacent est engendré par les symboles $[X]$ où X est une k-variété, astreints à vérifier les relations $[X] = [F] + [X \setminus F]$ où X est une k-variété et F une sous-variété fermée de X. La multiplication est définie par la règle $[X]\,.\,[Y] \overset{\text{déf}}{=} [X \times Y]$, où X et Y sont des k-variétés. Cet anneau sera noté $K_0(\mathrm{Var}_k)$. Le lien entre $K_0(\mathrm{Var}_k)$ et la cohomologie des variétés est fourni par l'existence de diverses « caractéristiques d'Euler-Poincaré généralisées ». Il existe par exemple un « polynôme de Poincaré virtuel » qui est un morphisme Poinc : $K_0(\mathrm{Var}_k) \to \mathbf{Z}[u]$ vérifiant en particulier, pour toute k-variété X propre et lisse, la relation

$$\mathrm{Poinc}([X]) = \sum_{n \geqslant 0} \dim(H^n(X))\, u^n \tag{2.9}$$

pour toute théorie cohomologique $H^\bullet$ raisonnable (par exemple la cohomologie ℓ-adique, où ℓ est premier à la caractéristique de k). Le morphisme Poinc permet de retrouver en particulier la dimension et le nombre de composantes de dimension maximale de X à partir de sa classe $[X]$. Lorsque k est fini, le morphisme $K_0(\mathrm{Var}_k) \to \mathbf{Z}$ qui à la classe d'une k-variété X associe le cardinal de $X(k)$ est un autre exemple de caractéristique d'Euler-Poincaré généralisée.

On peut ainsi imaginer unifier les prédictions 2.1 et 2.2 en une prédiction plus générale portant sur le comportement asymptotique des classes $[\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)]$ lorsque y devient grand. Un exemple est donné par l'énoncé suivant :

Prédiction 2.4. — *Soit X une variété projective et lisse définie sur un corps k. On suppose que le faisceau anticanonique ω_X^{-1} est gros.*

Il existe alors un ouvert dense U de X tel qu'on ait

$$\lim_{\substack{y\in \mathrm{NS}(X)^\vee \cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \\ \mathrm{dist}(y, \partial C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee)\to+\infty}} \mathbf{L}^{-\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle}\,[\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)] = c, \tag{2.10}$$

avec $\deg(\mathrm{Poinc}(c)) = (1 - g_{\mathscr{C}}).\dim(X)$.

La limite s'entend au sens de la topologie introduite par Kontsevich et définie à partir de la filtration par la « dimension virtuelle » sur le localisé de $K_0(\mathrm{Var}_k)$ en la classe $\left[\mathbf{A}^1\right]$ de la droite affine, notée $\mathbf{L}$. Le cran d'indice d de la filtration est engendré par les éléments de la forme $\mathbf{L}^{-a}\,[X]$ où $a \in \mathbf{Z}$ est tel que $\dim(X) - a \leqslant d$. L'élément c de l'énoncé est un élément du complété de $K_0(\mathrm{Var}_k)[\mathbf{L}^{-1}]$ pour cette topologie. Lorsque k est fini, un tel énoncé ne permet pas de déduire quoi que ce soit concernant le comportement asymptotique des quantités $|\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)(k)|$. En effet le morphisme $[X] \mapsto |X(k)|$ n'est pas continu pour la topologie considérée. Par contre, dans le cas d'un corps de base k quelconque, la validité de la prédiction 2.4 entraîne aussitôt un énoncé du type « stabilisation des nombres de Betti virtuels en haut degré » généralisant la prédiction 2.1. Plus précisément, elle implique l'existence d'une suite d'entiers $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et d'un entier d_0 tel que pour tout N et pour tout y tel que $\mathrm{dist}(y, \partial C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee)$ est assez grand (en fonction de N), on a

$$\mathrm{Poinc}(\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)) - \sum_{n=0}^{N} h_n\, u^{2\,\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle + 2(1-g_{\mathscr{C}})\dim(X) - n} \\ \in u^{2\,\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle + 2(1-g_{\mathscr{C}})\dim(X) - N - 1}\mathbf{Z}[u]. \tag{2.11}$$

On peut aussi se risquer à une prédiction plus optimiste, analogue de la prédiction 2.3.

Prédiction 2.5. — *Soit X une variété projective et lisse définie sur un corps k. On suppose que le faisceau anticanonique ω_X^{-1} est gros.*

Il existe alors un ouvert dense U de X, un élément c du complété de $K_0(\mathrm{Var}_k)[\mathbf{L}^{-1}]$ *et des éléments non nuls $x_1, \ldots, x_t$ de $C_{\mathrm{eff}}(X)$ tels qu'on ait :*

$$\forall y \in \mathrm{NS}(X)^{\vee} \cap C_{\mathrm{eff}}(X)^{\vee}, \quad \mathbf{L}^{-\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle}\,[\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)] - c = \sum_{i=1}^{t} c_i(y)\,\mathbf{L}^{-\langle y\,,\,x_i\rangle} \tag{2.12}$$

où la dimension virtuelle des $c_i(y)$ est uniformément majorée et $\deg(\mathrm{Poinc}(c)) = (1 - g_{\mathscr{C}}).\dim(X)$.

3. Présentation succincte des travaux

La section 4 présente les travaux que j'ai consacrés à l'aspect motivique des conjectures de Manin géométriques. Les deux résultats principaux sont la validité de la prédiction forte 2.5 pour les variétés toriques déployées (au niveau de l'anneau de Grothendieck des motifs, et sous l'hypothèse que $\mathscr{C} = \mathbf{P}^1$) et l'existence d'un « nombre de Tamagawa motivique » pour les familles constantes, qui généralise la constante « motivique » apparaissant dans l'étude du cas des variétés toriques et possède de bonnes propriétés de spécialisations. Le contenu de la section reprend essentiellement celui des articles [**Bou09b**] et [**Bou10**], avec quelques différences, parfois assez notables, dans la présentation adoptée. Notamment, le théorème 4.3 donne des résultats sur la décomposition en produit eulerien de la fonction L d'Artin motivique un tout petit peu plus précis et généraux (et en outre, je l'espère, mieux structurés) que ceux figurant dans [**Bou10**]. Pour conserver une taille raisonnable à ce texte, je n'ai pas inclus tout le détail des nouveaux arguments nécessaires, sachant également qu'ils restent de même nature que ceux utilisés dans l'article originel.

La section 5 explique le contenu des articles [**Bou09a**], [**Bou11b**], [**Bou12**] et [**Bou13**]. Ces travaux s'intéressent à la prédiction 2.2, et, pour les deux derniers, à la prédiction 2.1 pour une famille de variétés dont le torseur universel a une présentation particulièrement simple. Je démontre que pour de telles variétés la prédiction forte 2.3 ainsi que la prédiction 2.1 sont valides au moins partiellement, c'est-à-dire sur certains sous-cônes du cône des courbes mobiles, et que dans certains cas la validité est totale. Dans le cadre des conjectures de Manin arithmétiques et sous l'impulsion notamment de Salberger et Peyre, le torseur universel s'est déjà révélé être un outil d'attaque extrêmement efficace dans certaines circonstances, et il n'est donc pas surprenant qu'il puisse s'avérer également utile dans l'étude conjectures de Manin géométriques. Il intervient d'ailleurs aussi dans le travail évoqué ci-dessus consacré à l'aspect motivique des conjectures de Manin pour les variétés toriques, et je l'avais auparavant utilisé dans ma thèse pour établir la prédiction 2.3 pour les variétés toriques définies sur un corps fini. Les variétés toriques sont les variétés dont le torseur universel est, en un sens, « le plus simple ». Les variétés considérée dans la section 5, baptisées *hypersurfaces intrinsèques linéaires* pour des raisons explicitées ci-dessous, peuvent être vues comme celles dont la complexité du torseur universel vient immédiatement après celle des variétés toriques. Notons qu'on retrouve parmi ces variétés un certain nombre de surfaces de del Pezzo singulières qui ont été intensément étudiées dans le cadre des conjectures de Manin arithmétiques.

Une partie de mon travail de recherche postérieur à la thèse a été également consacrée à l'achèvement du mémoire [**Bou11a**] sur la fonction zêta des hauteurs des variétés toriques non déployées. Il s'agit d'un travail déjà substantiellement entamé pendant la thèse et je n'en parlerai pas dans le présent texte.

Je termine cette courte section en évoquant certains résultats connus relatifs aux questions évoquées dans les sections précédentes.

Commençons par la prédiction 2.1 sur la dimension et le nombre de composantes des espaces de modules de morphismes de courbes. Si X est une variété de drapeaux généralisée, alors pour tout $y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee \cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee$, $\mathbf{Hom}(\mathbf{P}^1, X, y)$ est irréductible et de la dimension attendue ; ce résultat a été démontré indépendamment par Thomsen ([**Tho98**]), Kim-Pandharipande ([**KP01**]) et Perrin ([**Per02**]). Ainsi, si $\mathscr{C}$ est rationnelle, la prédiction 2.1 est vérifiée dans ce cas, et elle l'est également si X est une hypersurface générale de petit degré (Harris-Roth-Starr [**HRS04**], Coskun-Starr [**CS09**]), voire une intersection complète générale de petit degré (Beheshti-Kumar [**BK**]). Il est conjecturé pour $n \geqslant 4$ que si $X \subset \mathbf{P}^n$ est une hypersurface générale de degré au plus $n-2$ alors $\mathbf{Hom}(\mathbf{P}^1, X, d)$ est irréductible et de la dimension attendue pour tout degré d.

Toujours lorsque $\mathscr{C}$ est rationnelle, les auteurs de [**KLO07**] montrent que la prédiction 2.1 est partiellement vérifiée lorsque X est obtenu à partir d'un produit d'espaces projectifs par une suite d'éclatements de centres irréductibles et lisses. Plus précisément, si $U \subset X$ désigne le complémentaire des diviseurs exceptionnels, ils montrent que sous certaines conditions numériques sur le degré y, la variété $\mathbf{Hom}(\mathbf{P}^1, X, U, y)$ est irréductible et de la dimension attendue. Je peux comparer ces résultats avec ceux que j'obtiens dans le cas où X est une hypersurface intrinsèque linéaire (*cf.* la section 5.6 *in fine*).

Par ailleurs soit C une courbe de genre g et soit X l'espace de modules des fibrés vectoriels sur C stables de rang 2 et de déterminant fixé et de degré 1. Castravet montre dans [**Cas04**] que pour tout ouvert non vide U assez petit et tout degré d, $\mathbf{Hom}(\mathbf{P}^1, X, U, d)$ est de la dimension attendue et irréductible, sauf si g et pair et divise $d-1$, auquel cas l'espace de modules possède une composante supplémentaire ; on peut noter cependant qu'un membre général de cette composante supplémentaire est un morphisme libre, mais pas très libre. Il serait intéressant de déterminer le nombre de points à valeur dans un corps fini de ces espaces de modules ; en particulier, le nombre de points de la composante principale a-t-il le comportement attendu quand d tend vers l'infini ?

Dans le cadre de l'aspect motivique des conjectures de Manin, des questions similaires à la prédiction 2.4 ont été étudiées par Chambert-Loir et Peyre ([**Pey04**]) lorsque X est une variété de drapeaux puis plus récemment par Chambert-Loir et Loeser ([**LCL13**]) lorsque X est une compactification équivariante d'un espace affine. Les techniques utilisées sont des versions « motiviques » des outils d'analyse harmonique déjà employés avec succès dans l'étude des conjectures de Manin classiques pour ces mêmes familles de variétés. Comme je l'ai indiqué, mon approche de la prédiction 2.4 n'est pas basée sur l'analyse harmonique mais sur le torseur universel.

À la fin de la section 5.6, je compare les résultats que j'obtiens sur les hypersurfaces intrinsèques linéaires vis-à-vis de la prédiction 2.2 avec les résultats connus dans le cadre des conjectures de Manin arithmétiques. L'analogue des conjectures de Manin arithmétiques pour un corps global de caractéristique positive reste par ailleurs très peu étudié en comparaison du volume de travaux suscité par ces mêmes conjectures arithmétiques. On peut citer en dehors de mes propres travaux ceux de Lai et Yeung ([**LY02**]), Peyre ([**Pey12**]) et Thunder ([**Thu08**]) sur les variétés de drapeaux généralisées, ainsi que ceux de Thunder ([**Thu09**]) sur les variétés de Schubert.

4. Aspects « motiviques » des conjectures de Manin géométriques : variétés toriques et nombre de Tamagawa motivique

4.1. Comportement asymptotique des courbes rationnelles sur les variétés toriques. — L'énoncé du théorème 4.1 ci-dessous rassemble les principaux résultats de l'article [**Bou09b**]. J'introduis d'abord quelques notations.

Soit k un corps. Rappelons que $K_0(\mathrm{Var}_k)$ est le groupe abélien libre engendré par les symboles $[X]$ des k-variétés modulo les relations de découpages $[X] = [F]+[X \setminus F]$ où F est un fermé de X, muni de la multiplication induite par le produit de variétés. Soit $\mathcal{M}_k$ le localisé de l'anneau $K_0(\mathrm{Var}_k)$ en la classe $\mathbf{L} \overset{\text{déf}}{=} \left[\mathbf{A}^1\right]$ de la droite affine. On note $\mathscr{F}^d\mathcal{M}_k$ le sous-groupe de $\mathcal{M}_k$ engendré par les éléments de la forme $\mathbf{L}^a\ [X]$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $\dim(X) + a \leqslant d$. Pour $x \in \mathcal{M}_k$, soit $\dim(x)$ la dimension virtuelle de x, c'est-à-dire

$$\dim(x) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Min}\{d \in \mathbf{Z}, \quad x \in \mathscr{F}^d\mathcal{M}_k\} \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}. \tag{4.1.1}$$

Soit $\widehat{\mathcal{M}_k}$ le complété de $\mathcal{M}_k$ pour la topologie définie par la filtration $\mathscr{F}^\bullet$. Si k est de caractéristique 0, on sait qu'il existe un unique morphisme χ^{mot} de source $K_0(\mathrm{Var}_k)$ et à valeurs dans l'anneau de Grothendieck des motifs de Chow $K_0(\mathrm{CHM}(k))$ qui envoie une variété projective et lisse sur la classe du motif de Chow associé. Soit $\mathcal{M}_k^{\mathrm{mot}}$ l'image de $\mathcal{M}_k$ par χ^{mot} et $\widehat{\mathcal{M}_k^{\mathrm{mot}}}$ son complété pour la filtration image de $\mathscr{F}^\bullet$. La définition de la dimension virtuelle s'étend naturellement aux éléments de $\widehat{\mathcal{M}_k}$, $\mathcal{M}_k^{\mathrm{mot}}$ et $\widehat{\mathcal{M}_k^{\mathrm{mot}}}$.

Soit X une compactification projective et lisse d'un tore déployé défini sur k. Soit U l'orbite ouverte de X et $\{\mathscr{D}_i\}_{i\in I}$ les diviseurs irréductibles de $X \setminus U$. Pour tout $d \in \mathbf{N}$, on identifie les points de $\mathbf{P}_k^d$ à l'ensemble des droites de l'espace vectoriel des polynômes homogènes à deux variables de degré d à coefficients dans k. Pour $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I$, soit $\mathbf{P}_k^{\boldsymbol{d}} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{i\in I} \mathbf{P}_k^{d_i}$ et $(\mathbf{P}_k^{\boldsymbol{d}})_X$ l'ouvert de $\mathbf{P}_k^{\boldsymbol{d}}$ constitué des éléments $(P_i)_{i\in I}$ vérifiant la condition suivante : pour tout $J \subset I$ tel que $\cap_{i\in J}\mathscr{D}_i = \varnothing$, les $\{P_i\}_{i\in J}$ n'ont pas de zéro commun non trivial.

Soit $\mu_X^{\mathrm{geom}} : \mathbf{N}^I \to K_0(\mathrm{Var}_k)$ l'unique fonction qui satisfait la propriété

$$\forall\, \boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I, \quad \left[(\mathbf{P}_k^{\boldsymbol{d}})_X\right] = \sum_{0\leqslant \boldsymbol{d}'\leqslant \boldsymbol{d}} \mu_X^{\mathrm{geom}}(\boldsymbol{d}') \left[\mathbf{P}^{\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}'}\right]. \tag{4.1.2}$$

Si k est de caractéristique zéro, pour tout $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I$, on pose $\mu_X^{\mathrm{mot}}(\boldsymbol{d}) = \chi^{\mathrm{mot}}(\mu_X^{\mathrm{geom}}(\boldsymbol{d}))$.

Théorème 4.1. — *On suppose k de caractéristique zéro, sauf pour le premier des résultats ci-dessous. Avec les notations précédentes, on a alors :*

1. *Pour tout $y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee \cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee$, on a dans $K_0(\mathrm{Var}_k)$ l'égalité*
$$\big[\mathbf{Hom}(\mathbf{P}^1, X, U, y)\big] = (\mathbf{L}-1)^{\dim(X)} \left[(\mathbf{P}_k^{(\langle y\,,\,\mathscr{D}_i\rangle)_{i\in I}})_X\right]. \tag{4.1.3}$$
2. *On a*
$$\forall\, \boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I, \quad \dim(\mu_X^{\mathrm{mot}}(\boldsymbol{d})) \leqslant \frac{|\boldsymbol{d}|}{2}. \tag{4.1.4}$$
3. *Posons*
$$c \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^I} \mu_X^{\mathrm{mot}}(\boldsymbol{d})\,\mathbf{L}^{-|\boldsymbol{d}|} \quad \in \widehat{\mathcal{M}_k^{\mathrm{mot}}} \tag{4.1.5}$$
et, pour $\varnothing \neq J \subset I$ et $y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee \cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee$,
$$c_J(y) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^I \\ \forall i\in J,\quad d_i\leqslant\langle y\,,\,\mathscr{D}_i\rangle}} \mu_X^{\mathrm{mot}}(\boldsymbol{d})\,\mathbf{L}^{-\sum\limits_{i\notin J} d_i} \quad \in \widehat{\mathcal{M}_k^{\mathrm{mot}}}. \tag{4.1.6}$$
On a alors dans $\widehat{\mathcal{M}_k^{\mathrm{mot}}}$ la relation
$$\begin{aligned}&\mathbf{L}^{-\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle}\,\big[\mathbf{Hom}(\mathbf{P}^1, X, U, y)\big] \\ &= \frac{\mathbf{L}^{\dim(X)}}{(1-\mathbf{L}^{-1})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))}}\left[c + \sum_{\varnothing\neq J\subset I}(-1)^{|J|}\left(c\,\mathbf{L}^{-\sum\limits_{i\in J}\langle y\,,\,\mathscr{D}_i\rangle} + c_J(y)\sum_{K\subset I\setminus J}(-1)^{|K|}\,\mathbf{L}^{-\sum\limits_{i\in K\cup J}\langle y\,,\,\mathscr{D}_i\rangle}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.1.7}$$
4. *La constante c a une interprétation en termes de « produit eulérien motivique » analogue au produit eulérien définissant la constante de Peyre dans le cas d'une variété torique projective et lisse définie sur un corps fini k.*

L'estimation (4.1.4) sur la dimension virtuelle de $\mu_X^{\mathrm{mot}}(\boldsymbol{d})$ montre que c est bien définie et non nulle et que $c_J(y)$ est bien défini et vérifie $\dim(c_J(y)) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i\in J}\langle y\,,\,\mathscr{D}_i\rangle$. Ainsi le troisième point montre que si k est de caractéristique zéro la prédiction 2.5 est valide si X est une variété torique déployée projective et lisse, quitte à se placer dans l'anneau de Grothendieck des motifs. Notons que remplacer l'anneau de Grothendieck des variétés par celui des motifs n'est pas problématique si on s'intéresse par exemple au comportement asymptotique du polynôme de Poincaré virtuel.

Dans l'article originel, le troisième point du théorème ci-dessus est énoncé sous une forme plus faible mettant en jeu les « pôles » de la série génératrice suivante (la « fonction zêta des hauteurs motivique ») :
$$\sum_{y\in\mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee} \big[\mathbf{Hom}(\mathbf{P}^1, X, U, y)\big]\; t^{\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle}. \tag{4.1.8}$$

Cependant tous les arguments permettant d'obtenir le troisième point tel qu'énoncé ici étaient déjà donnés ; en fait, le troisième point découle des deux premiers via un calcul élémentaire. Pour déduire du troisième point des renseignements sur les pôles de la fonction zêta des hauteurs motivique, on écrit $C_{\text{eff}}(X)^{\vee}$ comme le support d'un éventail régulier et on regarde la décomposition associée de la fonction zêta.

J'explique à présent les grandes lignes de la démonstration du théorème. Le premier point est une application de la description du torseur universel au-dessus de la variété torique X, et plus précisément d'un résultat de Cox explicitant le foncteur des points de X en termes de cette description. Je reviendrai sur cette technique à la section 5, dans un cadre un peu plus général (*cf.* la remarque 5.7). Comme je viens de le signaler, le troisième point découle facilement des deux premiers. D'ailleurs, si on savait démontrer l'analogue du deuxième point pour la fonction μ_X^{geom}, on en déduirait aussitôt l'analogue du troisième point dans $\widehat{\mathcal{M}_k}$.

La démonstration du deuxième point est la partie la plus délicate du théorème, et le quatrième point est un sous-produit de cette démonstration. Elle fait appel à une notion de « produit eulérien motivique » et à un résultat de Denef et Loeser permettant d'associer un motif virtuel à une formule du premier ordre.

Avant de donner quelques détails sur la démonstration du deuxième point, disons quelques mots des extensions possibles du théorème. Généraliser le résultat aux espaces $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, U, y)$, où $\mathscr{C}$ est de genre quelconque, ne poserait sans doute pas de difficulté insurmontable et ne nécessiterait a priori pas d'idées fondamentalement nouvelles ; le plus délicat serait d'obtenir un analogue de la relation (4.1.3) et le reste des arguments se transposera aisément (avec quelques complications techniques dûes au fait qu'on a une « formule exacte » pour $\left[\operatorname{Sym}^d \mathscr{C}\right]$, à savoir $\left[\operatorname{Sym}^d \mathscr{C}\right] = [\operatorname{Jac}(\mathscr{C})]\left[\mathbf{P}^{d-g_{\mathscr{C}}}\right]$, uniquement pour $d \geqslant 2\,g_{\mathscr{C}} - 1$). Un problème plus intéressant, mais sans doute plus difficile, serait de démontrer le résultat au niveau de l'anneau de Grothendieck des variétés, ce qui revient essentiellement, comme je l'ai déjà signalé, à étendre le deuxième point du théorème 4.1 à ce cadre. Les outils utilisés au niveau de l'anneau des motifs virtuels ne sont alors a priori plus disponibles, et une nouvelle approche semble nécessaire. Quelques cas très particuliers (espaces projectifs, surfaces de Hirzebruch) sont traités dans [**Bou09b**], mais l'extension à une variété torique quelconque semble loin d'être évidente. Enfin, il serait bien sûr intéressant d'étendre cette approche de la conjecture de Manin motivique via les torseurs universels à des variétés non toriques. Les variétés étudiées à la section 5 sont de bons candidats à une telle extension.

Revenons donc au deuxième point du théorème 4.1. Pour comprendre l'idée de la démonstration, supposons provisoirement que k est un corps fini. On note $M \mapsto |M(k)|$ le morphisme de source $K_0(\mathrm{Var}_k)$ qui à la classe $[X]$ d'une k-variété associe son nombre de points k-rationnels.

Soit

$$\mu_{X,k} \,:\, \bigsqcup_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^I} \mathbf{P}^{\boldsymbol{d}}(k) \to \mathbf{Z}, \tag{4.1.9}$$

l'unique application vérifiant

$$\forall \boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I, \quad \forall \mathfrak{D} \in \mathbf{P}^{\boldsymbol{d}}(k), \qquad \sum_{\mathfrak{D}' \leqslant \mathfrak{D}} \mu_{X,k}(\mathfrak{D}') = \mathbf{1}_{\mathbf{P}^{\boldsymbol{d}}_X}(\mathfrak{D}). \tag{4.1.10}$$

On identifie ici un élément de de $\mathbf{P}^{\boldsymbol{d}}(k)$ à un I-uple de diviseurs effectifs de $\mathbf{P}^1$ définis sur k et de multidegré $\boldsymbol{d}$. Alors l'application

$$\left|\mu_X^{\mathrm{geom}}(\,.\,)(k)\right| \,:\, \mathbf{N}^I \to \mathbf{Z} \tag{4.1.11}$$

vérifie pour tout $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I$

$$\left|\mu_X^{\mathrm{geom}}(\boldsymbol{d})(k)\right| = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathbf{P}^{\boldsymbol{d}}(k)} \mu_{X,k}(\mathfrak{D}). \tag{4.1.12}$$

Or il est facile de vérifier que $\mu_{X,k}$ est multiplicative, ce qui permet d'écrire la série génératrice associée à $\left|\mu_X^{\mathrm{geom}}(\,.\,)(k)\right|$ comme un produit eulerien

$$\sum_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I} \left|\mu_X^{\mathrm{geom}}(\boldsymbol{d})(k)\right| \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}} = \prod_{v \in (\mathbf{P}^1)^{(0)}} \sum_{\boldsymbol{n} \in \{0,1\}^I} \mu_X^{\circ}(\boldsymbol{n})\; \boldsymbol{t}^{f_v \boldsymbol{n}} \tag{4.1.13}$$

où $\mu_X^{\circ} \,:\, \{0,1\}^I \to \mathbf{Z}$ est caractérisée par

$$\forall \boldsymbol{n} \in \{0,1\}^I, \qquad \sum_{0 \leqslant \boldsymbol{n}' \leqslant \boldsymbol{n}} \mu_X^{\circ}(\boldsymbol{n}') = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \bigcap\limits_{i \in I,\, n_i = 1} \mathscr{D}_i \neq \varnothing \text{ ou } \boldsymbol{n} = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.1.14}$$

En particulier on a

$$\forall \boldsymbol{n} \in \{0,1\}^I, \quad \sum_{i \in I} n_i = 1 \Rightarrow \mu_X^{\circ}(\boldsymbol{n}) = 0 \tag{4.1.15}$$

ce qui montre en particulier, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, l'estimation

$$\forall \boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I, \quad \left|\mu_X^{\mathrm{geom}}(\boldsymbol{d})(k)\right| \ll_{\varepsilon} q^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)|\boldsymbol{d}|}. \tag{4.1.16}$$

Ce genre d'estimation était cruciale dans [**Bou03**].

Revenons au cas d'un corps k quelconque. Pour contrôler la dimension virtuelle de $\mu_X^{\mathrm{geom}}(\boldsymbol{d})$, on voudrait de manière analogue à (4.1.13) une décomposition :

$$\sum_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I} \mu_X^{\mathrm{geom}}(\boldsymbol{d})\, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}} = \prod_{\nu \geqslant 1} \left(\sum_{\boldsymbol{n} \in \{0,1\}^I} \mu_X^{\circ}(\boldsymbol{n})\, \boldsymbol{t}^{\nu\, \boldsymbol{n}} \right)^{\Phi_\nu(\mathbf{P}^1)} \tag{4.1.17}$$

où $\{\Phi_\nu(\mathbf{P}^1)\}_{\nu \geqslant 1}$ est l'unique famille d'éléments de $K_0(\mathrm{Var}_k) \otimes \mathbf{Q}$ vérifiant [(1)]

$$\sum_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I} \left[\mathrm{Sym}^d\, \mathbf{P}^1\right] t^d = \prod_{\nu \geqslant 1} (1 - t^\nu)^{-\Phi_\nu(\mathbf{P}^1)}. \tag{4.1.18}$$

Le membre de gauche de (4.1.18) est l'analogue dans $K_0(\mathrm{Var}_k)$ de la fonction zêta de Hasse-Weil classique de $\mathbf{P}^1$ sur un corps fini. De telles « fonctions zêta de Hasse-Weil motiviques » ont été initialement introduites par Kapranov dans [**Kap00**]. La variété

1. La famille d'opérateurs notée dans le présent texte $\Phi_\bullet$ (respectivement $\Psi_\bullet$, *cf.* plus loin (4.1.23)) était notée $\Psi_\bullet$ (respectivement $\Phi_\bullet$) dans les articles originels [**Bou09b**] et [**Bou10**] ; la notation choisie ici respecte l'usage traditionnel de la lettre Ψ pour désigner les « opérateurs d'Adams ».

virtuelle $\Phi_\nu(\mathbf{P}^1)$ peut alors être vue comme une sorte d'« espace de paramètres » pour les points fermés de degré ν de $\mathbf{P}^1_k$ (ou plutôt de ses « réductions modulo p »). On peut vérifier assez aisément qu'on a $\dim(\Phi_\nu(\mathbf{P}^1)) \leqslant \nu$. *Si* la relation (4.1.17) est satisfaite, on en déduit alors en « développant » le membre de droite (*cf.* [**Bou09b**, Lemme 2.16] et en utilisant (4.1.15) le contrôle voulu sur la dimension virtuelle de $\mu_X^{\mathrm{geom}}(\boldsymbol{d})$.

Je ne sais pas démontrer (4.1.17) dans $K_0(\mathrm{Var}_k)\otimes\mathbf{Q}$. Mais je démontre cependant que cette relation est en tout cas vraie dans l'anneau des motifs de Chow virtuels (tensorisé par $\mathbf{Q}$). J'indique à présent, en restant à un niveau très informel et intuitif, le procédé utilisé.

La démonstration fait appel à la construction de Denef et Loeser (*cf.* [**DL01, DL02**]) permettant d'associer un motif de Chow virtuel (avec dénominateur) à une formule du premier ordre, de sorte que pour une formule ayant n variable libres, le motif de Chow associé « compte » le nombre de points « modulo p » de $\mathbf{A}^n$ qui satisfont la formule. Plus précisément, supposant pour simplifier que le corps de base est $\mathbf{Q}$, il permet de retrouver par spécialisation pour presque tout nombre premier p le nombre d'éléments de $\mathbf{A}^n(\mathbf{F}_p)$ qui satisfont la formule. Par exemple, la formule $\exists y,\ x = y^2$ a pour motif virtuel associé $\frac{\mathbf{L}+1}{2}$.

Je commence alors par interpréter les motifs virtuels $\{\Phi_\nu(\mathbf{P}^1)\}_{\nu\geqslant 1}$ comme des motifs associés à une famille naturelle de formules, dont la « réduction modulo p » définit pour tout p l'ensemble des points fermés de degré ν de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_p}$. Grâce au résultat de Denef et Loeser, la validité de (4.1.17) se ramène alors en un certain sens à la vérification du fait que certaines paires de formules définissent des ensembles de points $\mathbf{F}_p$-rationnels équipotents pour presque tout p. Et cette dernière vérification est essentiellement équivalente à une démonstration combinatoire de la décomposition en produit eulerien sur un corps fini, c'est-à-dire de la relation (4.1.13).

Compte tenu de (4.1.17), on a la conséquence suivante du troisième point du théorème 4.1 :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{y\in\mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee\\ \mathrm{dist}(y,\partial C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee)\to+\infty}} & \mathbf{L}^{-\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle}\left[\mathbf{Hom}(\mathbf{P}^1,X,U,y)\right]\\ &= \frac{\mathbf{L}^{\dim(X)}}{(1-\mathbf{L}^{-1})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))}}\prod_{\nu\geqslant 1}\left(\sum_{\boldsymbol{n}\in\{0,1\}^I}\mu_X^\circ(\boldsymbol{n})\,\mathbf{L}^{-\nu\,|\boldsymbol{n}|}\right)^{\Phi_\nu(\mathbf{P}^1)}\end{aligned}\tag{4.1.19}$$

que l'on peut comparer au résultat connu sur un corps fini

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{y\in\mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee\\ \mathrm{dist}(y,\partial C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee)\to+\infty}} & q^{-\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle}\left|\mathbf{Hom}(\mathbf{P}^1,X,U,y)(k)\right|\\ &= \frac{q^{\dim(X)}}{(1-q^{-1})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))}}\prod_{\nu\geqslant 1}\left(\left(1-q^{-n}\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))}\frac{\left|X(\mathbf{F}_{q^n})\right|}{q^{n\dim(X)}}\right)^{\left|(\mathbf{P}^1)^{(0)}_\nu\right|}\end{aligned}\tag{4.1.20}$$

où $\left(\mathbf{P}^1\right)^{(0)}_\nu$ est l'ensemble des points fermés de $\mathbf{P}^1$ de degré n.

Le membre de droite de (4.1.20) correspond à la constante prédite par Peyre, et celui de (4.1.19) en est un analogue « motivique ».

En effet, pour un corps k quelconque, en utilisant le torseur universel de X on montre dans $K_0(\mathrm{Var}_k)[\mathbf{L}^{-1}]$ et pour tout ν la relation [(2)]

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\{0,1\}^I} \mu^{\circ}_X(\boldsymbol{n})\,\mathbf{L}^{-\nu\,|\boldsymbol{n}|} = (1-\mathbf{L}^{-n})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))}\frac{\Psi_\nu(X)}{\mathbf{L}^{\nu\,\dim(X)}} \tag{4.1.21}$$

avec

$$\sum_{\nu\geqslant 1}\Psi_\nu(X)t^\nu \overset{\text{déf}}{=} t\,\frac{d\log}{dt}\sum_{d\geqslant 0}\left[\mathrm{Sym}^d X\right]\,t^d. \tag{4.1.22}$$

En particulier pour un corps fini k de cardinal q on a

$$\forall\nu\geqslant 1,\quad |\Psi_\nu(X)(k)| = \left|X(\mathbf{F}_{q^\nu})\right|. \tag{4.1.23}$$

4.2. Fonction L d'Artin et nombre de Tamagawa motiviques. —

4.2.1. Motivations et cadre de travail. — Dans la précédente section, consacrée à l'étude asymptotique des espaces de modules de courbes rationnelles sur une variété torique déployée, est apparue une constante, élément de l'anneau de Grothendieck des motifs complété, dont on a mis en évidence l'analogie avec le nombre de Tamagawa défini par Peyre dans le cadre des conjectures de Manin sur un corps global de caractéristique non nulle. Il est naturel de se demander si on peut définir un tel « nombre de Tamagawa motivique » pour des variétés plus générales que les variétés toriques déployées. Une telle construction, mise en oeuvre dans l'article [**Bou10**], va être décrite ci-dessous. Il serait intéressant d'étendre la construction à des familles non constantes, et par ailleurs également de voir le nombre de Tamagawa motivique ainsi défini apparaître « en situation » lors de l'étude asymptotique des espaces de modules de courbes sur une variété non nécessairement torique.

La définition de Peyre du nombre de Tamagawa fait intervenir les facteurs locaux de la fonction L d'Artin associé au module de Picard de la variété. On a besoin ici d'un pendant motivique de cette notion. Un analogue motivique de la fonction L d'Artin a été introduit par Dhillon et Minac dans [**DM06**], mais leur construction, quoique compacte et élégante, présente justement le défaut vis-à-vis de nos objectifs de ne pas faire intervenir de facteurs locaux. Une partie du travail va consister à exprimer la fonction L d'Artin motivique en termes d'un produit eulérien motivique analogue à celui déjà rencontré dans la section précédente.

Soit k un corps, $\mathscr{C}$ une k-courbe projective, lisse et géométriquement intègre et X une k-variété projective et lisse. On supposera que les hypothèses suivantes sont

2. *cf.* [**Bou09b**, Proposition 5.18], où les hypothèses sont a priori plus restrictives : k est supposé de caractéristique zéro et on se place dans l'anneau des motifs virtuels ; ces hypothèses étaient motivée par le fait que Ψ_ν n'est pas un morphisme d'anneaux sur l'anneau de Grothendieck des variétés alors que c'en est un sur celui des motifs (*cf.* [**Bou10**, Remarque 2.7]) ; mais en fait dans la situation présente on a juste besoin du fait que la restriction de Ψ_ν à $\mathbf{Z}[\mathbf{L}]$ est un morphisme d'anneaux, ce qui est facilement vérifié.

vérifiées pour définir le nombre de Tamagawa motivique de la famille constante $X \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$.

Hypothèses 4.2. — *1. La famille constante $X \times_k \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ vérifie l'approximation faible.*

2. On a $H^1(X, \mathscr{O}_X) = H^2(X, \mathscr{O}_X) = 0$.

3. $\mathrm{Pic}(X^{\,\text{sép}})$ est un $\mathcal{G}_k$-module discret libre de rang fini qui coïncide avec $\mathrm{Pic}(\overline{X})$.

4. Le rang de $\mathrm{Pic}(X^{\,\text{sép}})$ coïncide avec le deuxième nombre de Betti de X.

Si k est de caractéristique zéro, ces hypothèses sont vérifiées par exemple si X est une variété de Fano.

Soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{G}_k$ agissant trivialement sur $\mathrm{Pic}(\overline{X})$, $k' \overset{\text{déf}}{=} (k^{\,\text{sép}})^{\mathcal{H}}$, $G \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Gal}(k'/k)$ et $\mathscr{D} \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{C} \times_k k'$. On note ρ_{NS} la $\mathbf{Q}$-représentation de G induite par l'action de $\mathcal{G}_k$ sur $\mathrm{Pic}(\overline{X})$.

Si k est fini, le nombre de Tamagawa de X relativement à $\mathscr{C}$, défini par Peyre et qui apparaît conjecturalement dans l'étude asymptotique des nombres $\{|\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)(k)|\}_{y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee}$, s'exprime alors comme

$$\tau(X, \mathscr{C}) \quad \overset{\text{déf}}{=} \quad q^{(1-g(\mathscr{C}))\,\dim(X)} \left[(1-q\,t)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(\overline{X})^G)}\, L(\mathscr{D}, G, \rho_{\text{NS}}, t)\right]_{t=q^{-1}} \Pi(X, \mathscr{C}), \tag{4.2.1}$$

où

$$\Pi(X, \mathscr{C}) \overset{\text{déf}}{=} \prod_{v \in \mathscr{C}^{(0)}} L_v(\mathscr{D}, G, \rho_{\text{NS}}, q^{-1})^{-1} \frac{|X(\kappa_v)|}{|\kappa_v|^{\dim(X)}}, \tag{4.2.2}$$

$L(\mathscr{D}, G, \rho_{\text{NS}}, t)$ est la fonction L d'Artin associée à la G-variété $\mathscr{D}$ et à la représentation ρ_{NS}, et les $L_v(\mathscr{D}, G, \rho_{\text{NS}}, t)$ sont ses facteurs locaux.

Pour un groupe fini G quelconque, on note $\mathbf{Conj}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de G, et $\mathbf{Conj}_{\mathrm{c}}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes cycliques de G. Si $\mathcal{I}, \mathcal{C} \in \mathbf{Conj}(G)$, on note $\mathcal{I} \lhd \mathcal{C}$ s'il existe $I \in \mathcal{I}$ et $C \in \mathcal{C}$ tels qu'on ait $I \subset C \subset N_G(I)$. Dans le cas où C/I est cyclique (on dira alors que $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ est cyclique), si ρ est une $\mathbf{Q}$-représentation de G d'espace V, on pose

$$\mathscr{P}_{\rho,\mathcal{I},\mathcal{C}}(t) \overset{\text{déf}}{=} \det(\mathrm{Id} - t.g|V^I) \quad \in \mathbf{Q}[t] \tag{4.2.3}$$

où g est un élément de C quelconque qui engendre C/I ; le polynôme $\mathscr{P}_{\rho,\mathcal{I},\mathcal{C}}$ ne dépend effectivement que de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{C}$ et pas des choix de C, I et g.

Soit X une k-G-variété quasi-projective. Pour tout $\mathcal{I}, \mathcal{D} \in \mathbf{Conj}(G)$ tels que $\mathcal{I} \lhd \mathcal{D}$, on note $\left(X^{(0)}\right)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}$ l'ensemble des points fermés de X/G ayant inertie $\mathcal{I}$ et décomposition $\mathcal{D}$ dans le revêtement $X \to X/G$, et $\left(X^{(0)}_\nu\right)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}$ l'ensemble des éléments de $\left(X^{(0)}\right)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}$ qui sont de degré ν. La fonction L d'Artin associée à la G-variété X et à la représentation ρ peut alors s'écrire

$$L(X,G,\rho,t) = \prod_{\nu\geqslant 1} \prod_{\substack{\mathcal{I},\mathcal{D}\in\mathbf{Conj}(G)\\ \mathcal{I}\lhd\mathcal{D}\\ \mathcal{D}/\mathcal{I}\text{ cyclique}}} \mathscr{P}_{\rho,\mathcal{I},\mathcal{C}}(t)^{\left|(X_\nu^{(0)})_{G,\mathcal{I},\mathcal{C}}\right|}. \tag{4.2.4}$$

Par ailleurs, le membre de droite de (4.2.2) se réécrit

$$\prod_{\nu\geqslant 1} \left(\frac{\left|X(\mathbf{F}_{q^\nu})\right|}{q^{\nu\dim(X)}}\right)^{\left|\mathscr{C}_\nu^{(0)}\right|} \prod_{\mathcal{D}\in\mathbf{Conj}_{\mathrm{c}}(G)} \mathscr{P}_{\rho_{\mathrm{NS}},\{e\},\mathcal{D}}(q^{-\nu})^{\left|(\mathscr{D}_\nu^{(0)})_{G,\{e\},\mathcal{D}}\right|} \tag{4.2.5}$$

(notons que le G-revêtement $\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ n'est pas ramifié).

Pour obtenir un pendant motivique de l'expression (4.2.5), il faut trouver des incarnation motiviques raisonnables des familles d'ensembles $\{X(\mathbf{F}_{q^\nu})\}$, $\{\mathscr{C}_\nu^{(0)}\}$ et $\{(\mathscr{D}_\nu^{(0)})_{G,\{e\},\mathcal{D}}\}$. On a déjà vu à la section précédente, dans des cas particuliers, une solution de ce problème pour les deux premières familles : en toute généralité, une incarnation motivique de la famille $\{X(\mathbf{F}_{q^\nu})\}$ (respectivement $\{X_\nu^{(0)}\}$) est fournie par la famille $\{\Psi_\nu(X)\}$ définie par la relation

$$\sum_{\nu\geqslant 1} \Psi_\nu(X)\, t^\nu \overset{\text{déf}}{=} t\,\frac{d\log}{dt} \sum_{d\geqslant 0} \left[\mathrm{Sym}^d X\right]\, t^d, \tag{4.2.6}$$

respectivement par la famille $\{\Phi_\nu(X)\}$ définie par les relations

$$\forall d\geqslant 1,\quad \Psi_d(X) = \sum_{\nu\mid d} \nu\,\Phi_\nu(X). \tag{4.2.7}$$

Notons que même dans le cas où le groupe de Picard de X est un module galoisien trivial, l'analogue motivique naturel du membre de droite de (4.2.2), à savoir

$$\prod_{\nu\geqslant 1} \left((1-\mathbf{L}^{-\nu})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))}\frac{\Psi_\nu(X)}{\mathbf{L}^{\nu\dim(X)}}\right)^{\Phi_\nu(\mathscr{C})} \tag{4.2.8}$$

pose déjà des problèmes de convergence non triviaux ; dans le cas d'une variété torique, ces problèmes étaient résolus grâce à la relation (4.1.21), c'est-à-dire en fait grâce à la décomposition cellulaire explicite de la variété.

Dans le cas où k est de caractéristique 0, nous allons voir qu'on peut obtenir une incarnation motivique de la famille $\{(X_\nu^{(0)})_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}\}$ pour toute k-G-variété quasi-projective X, ce qui permet d'obtenir une décomposition de la fonction L d'Artin de Dhillon et Minac en produit eulerien motivique. Pour un corps k de caractéristique quelconque, on aura une construction analogue mais limitée au cas où X est de dimension au plus 1.

4.2.2. Fonction L d'Artin motivique et décomposition en produit eulerien motivique. — Soit X une k-variété quasi-projective. La fonction zêta (de Hasse-Weil) « motivique » [3] de X est la série à coefficients dans $K_0(\mathrm{Var}_k)$ définie par

$$Z(X,t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n\geqslant 0} [\mathrm{Sym}^n X]\ t^n. \tag{4.2.9}$$

Par ailleurs, si M est un motif de Chow, sa fonction zêta motivique est la série à coefficients dans $K_0(\mathrm{CHM}(k))$ définie par

$$Z(M,t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n\geqslant 0} [\mathrm{Sym}^n M]\ t^n. \tag{4.2.10}$$

Rappelons que $\mathrm{Sym}^n X$ désigne la variété quotient $X^n/\mathfrak{S}_n$, et que $\mathrm{Sym}^n M$ désigne l'image du projecteur $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma$.

Soit G groupe fini, X une k-variété munie d'une action de G (en abrégé une k-G-variété) supposée projective et lisse et ρ une $\mathbf{Q}$-représentation de G d'espace V. Les auteurs de [**DM06**], associent à ces données une « fonction L d'Artin motivique »

$$L^{\mathrm{DM}}_{\mathrm{mot}}(X,G,\rho,t) \quad \in 1+t.K_0(\mathrm{CHM}(k))[[t]] \tag{4.2.11}$$

obtenue comme la fonction zêta du motif $(h(X)\otimes V)^G$, où $h(X)$ est le motif de Chow associé à X. Ils montrent notamment que cette définition est compatible à la restriction et à l'induction en un sens analogue à celui qui vaut pour la fonction L d'Artin classique.

Si k est de caractéristique zéro, grâce au théorème de Bittner sur la présentation de l'anneau de Grothendieck des variétés en termes de variétés projectives et lisses ([**Bit04**]), cette définition s'étend de manière unique en un morphisme de groupes :

$$L^{\mathrm{DM}}_{\mathrm{mot}}(\,.\,,G,\rho,t)\ :\ K_0(G-\mathrm{Var}_k)\to 1+t.K_0(\mathrm{CHM}(k))[[t]]. \tag{4.2.12}$$

où $K_0(G-\mathrm{Var}_k)$ désigne l'anneau de Grothendieck des k-G-variétés.

Théorème 4.3. — *1. Supposons k de caractéristique zéro. Il existe une unique famille de morphismes additifs*

$$\left\{\Phi_\nu(\,.\,)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}\ :\ K_0(G-\mathrm{Var}_k)\to K_0(\mathrm{CHM}(k))\otimes\mathbf{Q}\right\}_{\substack{G \text{ groupe fini}\\ \nu\geqslant 1\\ \mathcal{I},\mathcal{D}\in \boldsymbol{Conj}(G)\\ \mathcal{I}\lhd\mathcal{D}\\ \mathcal{D}/\mathcal{I}\text{ cyclique}}} \tag{4.2.13}$$

vérifiant la propriété suivante : soit G un groupe fini, ρ une $\mathbf{Q}$-représentation de G, $\mathcal{I}$ une classe de conjugaison de sous-groupes de G, X une k-G-variété et $X_{\mathcal{I}}$ le sous-ensemble constructible G-stable de X formé des éléments dont le stabilisateur est un élément de $\mathcal{I}$; on a alors la relation

$$L^{\mathrm{DM}}_{\mathrm{mot}}(X_{\mathcal{I}},G,\rho,t) = \prod_{\substack{\nu\geqslant 1\\ \mathcal{D}\in\boldsymbol{Conj}(G)\\ \mathcal{I}\lhd\mathcal{D}\\ \mathcal{D}/\mathcal{I}\text{ cyclique}}} \mathscr{P}_{\rho,\mathcal{I},\mathcal{D}}(t^n)^{-\Phi_\nu(X)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}} \quad \in 1+t\,K_0(\mathrm{CHM}(k))\otimes\mathbf{Q}[[t]]. \tag{4.2.14}$$

3. « géométrique par morceaux » serait peut-être un qualificatif plus approprié.

2. *On suppose toujours k de caractéristique* 0. *La famille précédente peut également se définir en utilisant le morphisme de Denef et Loeser associant un motif virtuel à une formule du premier ordre. La formule permettant d'obtenir* $\Phi_{\nu}(X)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}$ *définit, après réduction modulo p, l'ensemble des points fermés de degré ν de la réduction modulo p de X/G ayant inertie $\mathcal{I}$ et décomposition $\mathcal{D}$.*

3. *Soit k un corps de caractéristique quelconque. Il existe une unique famille*

$$\left\{\Phi_{\nu}(X)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}\right\}_{\substack{\nu\geqslant 1\\ X\ k\text{-}G\text{-variété projective et lisse}\\ \dim(X)\leqslant 1\\ \mathcal{I},\mathcal{D}\in \boldsymbol{Conj}(G)\\ \mathcal{I}\lhd\mathcal{D}\\ \mathcal{D}/\mathcal{I}\text{ cyclique}}} \in K_0\left(\mathrm{CHM}(k)\right)\otimes \mathbf{Q} \qquad (4.2.15)$$

vérifiant pour tout groupe fini G, toute $\mathbf{Q}$*-représentation ρ, toute classe de conjugaison $\mathcal{I}$ de sous-groupes de G et toute k-G-variété X projective et lisse de dimension au plus* 1 *la relation* (4.2.14)*.*

4. *Lorsque k est un corps fini, les motifs virtuels décrits précédemment ont de bonnes propriétés de spécialisation : en prenant la trace du Frobenius sur une réalisation ℓ-adique de* $\Phi_{\nu}(X)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}$*, on retrouve le cardinal de* $(X_{\nu}^{(0)})_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}$*. Une propriété analogue vaut si k est un corps global : G et X étant donnés (avec X de dimension au plus* 1 *si k n'est pas de caractéristique nulle), en dehors d'un ensemble fini de places $\mathfrak{p}$, la trace d'un Frobenius local en $\mathfrak{p}$ sur une réalisation ℓ-adique de* $\Phi_{\nu}(X)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}$ *permet de retrouver le cardinal de* $(X_{\mathfrak{p},\nu}^{(0)})_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}$ *pour tous ν, G, $\mathcal{I}$, $\mathcal{D}$, où $X_{\mathfrak{p}}$ est la réduction de X modulo $\mathfrak{p}$.*

5. *Soit* $\mathrm{Spec}(k')\to\mathrm{Spec}(k)$ *un revêtement galoisien de groupe G. On a pour tout* $\mathcal{D}\in\boldsymbol{Conj}_c(G)$

$$\forall\nu\in\mathbf{N}_{\geqslant 1},\quad \Phi_{\nu}(\mathrm{Spec}(k'))_{G,\{e\},\mathcal{D}} = \begin{cases} \sum_{\rho\in\mathrm{Irr}_{\mathbf{Q}}(G)}\widetilde{m}_{\rho,\mathcal{D}}\,[V_\rho] & \textit{si } \nu=1\\ 0 & \textit{sinon}\end{cases} \qquad (4.2.16)$$

où $\mathrm{Irr}_{\mathbf{Q}}(G)$ *est l'ensemble des classes d'isomorphie des* $\mathbf{Q}$*-représentations irréductibles de G et V_ρ est l'espace de la représentation ρ, identifié au motif d'Artin associé (cf. ci-dessous pour la définition de* $\widetilde{m}_{\rho,\mathcal{C}}$*).*

6. *Soit $\mathscr{C}$ une k-courbe projective et lisse et* $\mathscr{D}\overset{\text{déf}}{=}\mathscr{C}\times_{\mathrm{Spec}(k)}\mathrm{Spec}(k')$ *où* $\mathrm{Spec}(k')\to\mathrm{Spec}(k)$ *est galoisien de groupe G.*

   On a alors pour tout $\nu\geqslant 1$ l'égalité

$$\Phi_{\nu}(\mathscr{D})_{G,\{e\},\mathcal{C}} = \left(\sum_{\substack{\mathcal{D}\in\boldsymbol{Conj}_c(G)\\ \mathcal{D}^{\nu}=\mathcal{C}}}\Phi_1(\mathrm{Spec}(k'))_{G,\{e\},\mathcal{D}}\right).\Phi_{\nu}(\mathscr{C}) \qquad (4.2.17)$$

(cf. ci-dessous pour la définition de $\mathcal{D}^{\nu}$).

Avant de dire quelques mots de la démonstration du théorème, j'introduis quelques notations. Soit G un groupe fini, $\mathcal{C}\in\mathbf{Conj}_c(G)$ et $\theta_{\mathcal{C}}$ la fonction indicatrice de l'ensemble des éléments de G qui engendrent un élément de $\mathcal{C}$. C'est une fonction

$\mathbf{Q}$-centrale. Il existe donc une unique famille de rationnels $(\widetilde{m}_{\rho,\mathcal{C}})_{\rho\in\mathrm{Irr}_{\mathbf{Q}}(G)}$ tels qu'on ait

$$\theta_{\mathcal{C}} = \sum_{\rho\in\mathrm{Irr}_{\mathbf{Q}}(G)} \widetilde{m}_{\rho,\mathcal{C}}\,\chi_\rho. \tag{4.2.18}$$

Pour tout groupe cyclique C et $\nu \geqslant 1$, on note C^ν le sous-groupe de C d'indice $\nu\wedge|C|$, en d'autres termes le sous-groupe engendré par g^ν où g est un générateur quelconque de C. Pour tout $\mathcal{C}\in\mathbf{Conj}_{\mathrm{c}}(G)$ et $\nu\geqslant 1$, on note $\mathcal{C}^\nu$ la classe de conjugaison de C^ν, où C est un élément quelconque de $\mathcal{C}$.

Le lemme suivant est utilisé dans la démonstration du théorème 4.3.

Lemme 4.4. — *Soit A un anneau contenant $\mathbf{Q}$,*

$$\Phi\ :\ \mathbf{N}_{\geqslant 1}\times \boldsymbol{Conj}_c(G)\to A \tag{4.2.19}$$

une application, et $\{Z(\rho,t)\}$ une famille d'éléments de $1+t\,A[[t]]$ indexées par les classes d'isomorphie de $\mathbf{Q}$-représentations irréductibles.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. pour toute $\mathbf{Q}$-représentation irréductible ρ on a

$$Z(\rho,t) = \prod_{\substack{\nu\geqslant 1\\ \mathcal{C}\in \boldsymbol{Conj}_c(G)}} \mathscr{P}_{\rho,\{e\},\mathcal{C}}(t^\nu)^{-\Phi(\nu,\mathcal{C})} \tag{4.2.20}$$

2. Pour tout $\mathcal{C}\in\boldsymbol{Conj}_c(G)$, on a

$$\sum_{\rho\in\mathrm{Irr}_{\mathbf{Q}}(G)} \widetilde{m}_{\rho,\mathcal{C}}\, t\,\frac{d\log}{dt}Z(\rho,t) = \sum_{n\geqslant 1}\left[\sum_{d|\nu}\left(\sum_{\substack{\mathcal{D}\in \boldsymbol{Conj}_c(G)\\ \mathcal{D}^{\frac{\nu}{d}}=\mathcal{C}}} d\,\Phi(d,\mathcal{D})\right)\right] t^\nu. \tag{4.2.21}$$

En particulier, étant donnée une famille $\{Z(\rho,t)\}$ d'éléments de $1+t\,A[[t]]$ indexées par les classes d'isomorphie de $\mathbf{Q}$-représentations irréductibles, il existe une unique application

$$\Phi\ :\ \mathbf{N}_{\geqslant 1}\times \boldsymbol{Conj}_c(G)\to A \tag{4.2.22}$$

telle qu'on ait, pour toute $\mathbf{Q}$-représentation irréductible ρ,

$$Z(\rho,t) = \prod_{\substack{\nu\geqslant 1\\ \mathcal{C}\in \boldsymbol{Conj}_c(G)}} \mathscr{P}_{\rho,\{e\},\mathcal{C}}(t^n)^{-\Phi(\nu,\mathcal{C})} \tag{4.2.23}$$

La démonstration du lemme est basée sur les relations d'orthogonalité

$$\sum_{\mathcal{C}\in\mathbf{Conj}_{\mathrm{c}}(G)} \chi_{\rho_0}(\mathcal{C})\,\widetilde{m}_{\rho,\mathcal{C}} = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & \rho\neq\rho_0\\ 1 & \text{si} & \rho=\rho_0\end{array}\right. \tag{4.2.24}$$

et des calculs analogues à ceux de [**Bou10**, p. 209-210].

Indiquons à présent les grandes lignes de la démonstration du théorème 4.3.

Pour démontrer le premier point, on utilise d'abord le lemme qui permet de montrer l'existence et l'unicité des $\Phi_\nu(X)_{G,\{e\},\mathcal{C}}$ pour les variétés X munies d'une action libre de G. Pour une G-variété X quelconque et I un sous-groupe de G, on utilise alors le fait que $N_G(I)/I$ agit librement sur le sous-ensemble constructible X_I des points de stabilisateur I et la compatibilité de $L_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{DM}}$ à l'induction et à la restriction pour se ramener au premier cas. On obtient en particulier la relation

$$\Phi_\nu(X)_{G,\mathcal{I},\mathcal{C}} = \Phi_\nu(X_I)_{N_G(I)/I,\{e\},\mathcal{C}/I} \tag{4.2.25}$$

où I est un élément de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{C}/I$ est l'ensemble des quotients C/I, pour $C \in \mathcal{C}$ vérifiant $I \subset C \subset N_G(I)$. On utilise une démarche analogue pour démontrer le troisième point.

Pour le deuxième point, une fois définis les $\Phi_\nu(X)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}$ comme motifs virtuels associés à des formules (*cf.* [*op.cit.*, §4.3]) on définit une nouvelle fonction L d'Artin motivique par la relation

$$L_{\mathrm{mot}}(X,G,\rho,t) \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\substack{\nu \geqslant 1 \\ \mathcal{I},\mathcal{D} \in \mathbf{Conj}(G) \\ \mathcal{I} \lhd \mathcal{D} \\ \mathcal{D}/\mathcal{I} \text{ cyclique}}} \mathscr{P}_{\rho,\mathcal{I},\mathcal{D}}(t^\nu)^{-\Phi_\nu(X)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}}. \tag{4.2.26}$$

On démontre que L_{mot} est compatible à l'induction et à la restriction [*op.cit.*,§4.5.2]. Pour démontrer l'égalité $L_{\mathrm{mot}} = L_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{DM}}$ dans $1 + t\,K_0\,(\mathrm{CHM}(k)) \otimes \mathbf{Q}[[t]]$, en utilisant le théorème d'Artin qui permet d'exprimer tout caractère comme combinaison à coefficients rationnels de caractères d'induites de représentations triviales, on se ramène au cas d'une représentation triviale, pour laquelle le résultat est connu grâce à la décomposition en produit eulerien motivique de la fonction zêta motivique d'une variété, établie dans [**Bou09b**] (*cf.* [**Bou10**, Corollaire 4.31]).

Le quatrième point découle du théorème d'Artin et du lemme ci-dessus.

Le cinquième point, qui est une égalité entre éléments du K_0 des motifs d'Artin, se ramène à une identité aisée à vérifier entre caractères virtuels de G.

Pour le sixième point, rappellons que la fonction $L_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{DM}}(\mathscr{D},G,\rho)$ est par définition la fonction zêta motivique associée au motif $([h(\mathscr{C}) \otimes h(\mathrm{Spec}(k'))] \otimes V_\rho)^G$; comme l'action de G sur $h(\mathscr{C})$ est triviale, ce motif s'écrit $h(\mathscr{C}) \otimes (h(\mathrm{Spec}(k')) \otimes V_\rho)^G$. On a donc l'égalité

$$L_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{DM}}(\mathscr{D},G,\rho) = Z(\mathscr{C},t) \bullet L_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{DM}}(\mathrm{Spec}(k'),G,\rho) \tag{4.2.27}$$

où $\bullet$ est la multiplication pour la structure naturelle de λ-anneau sur $1 + t\,K_0\,(\mathrm{CHM}(k))\,[[t]]$.

Des identités

$$Z(\mathscr{C},t) = \prod_{\nu \geqslant 1} (1-t^\nu)^{-\Phi_\nu(\mathscr{C})} \tag{4.2.28}$$

$$L_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{DM}}(\mathrm{Spec}(k'),G,\rho) = \prod_{\mathcal{D} \in \mathbf{Conj}_c(G)} \mathscr{P}_{\rho,\{e\},\mathcal{D}}(t)^{-\Phi_1(\mathrm{Spec}(k'))_{G,\{e\},\mathcal{D}}} \tag{4.2.29}$$

et

$$(1-t^\nu) \bullet \mathscr{P}_{\rho,\{e\},\mathcal{D}}(t) = \mathscr{P}_{\rho,\{e\},\mathcal{D}^\nu}(t^\nu) \tag{4.2.30}$$

on déduit le résultat voulu.

Remarque 4.5. — Le sixième point du théorème ci-dessus est important pour la définition et la convergence du nombre de Tamagawa motivique.

En reprenant la notation (5.2.9) de [**Bou10**], on a en fait

$$\sum_{\substack{\mathcal{D}\in\mathbf{Conj}_c(G)\\ \mathcal{D}^\nu=\mathcal{C}}} \Phi_1(\mathrm{Spec}(k'))_{G,\{e\},\mathcal{D}} = \eta_{k',G,\mathcal{D},\nu} \tag{4.2.31}$$

En raisonnant en termes de caractères virtuels, on constate en effet aisément qu'on a, avec les notations de *op.cit.*,

$$\varphi_{\mathrm{Spec}(k'),G,\mathcal{D}} = \Phi_1(\mathrm{Spec}(k'))_{G,\{e\},\mathcal{D}}. \tag{4.2.32}$$

La formule (4.2.17) est démontrée dans *op.cit.*(*cf.* la proposition 5.13) mais uniquement en caractéristique zéro et en utilisant de manière cruciale la définition des $\Phi_\nu(\,.\,)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}$ comme motif virtuel de formules. La démonstration présentée ici, plus naturelle lorsque l'on définit les $\Phi_\nu(\,.\,)_{G,\mathcal{I},\mathcal{D}}$ directement à partir de $L^{\mathrm{DM}}_{\mathrm{mot}}$, s'étend en outre en caractéristique quelconque.

4.2.3. Nombre de Tamagawa motivique. — Soit A et B des anneaux et $\varphi : A \longrightarrow B[u,u^{-1}]$ un morphisme d'anneaux. On définit une filtration décroissante de A en posant, pour $i\in\mathbf{Z}$, $\mathscr{F}^iA \overset{\text{déf}}{=} \{a\in A,\ \deg(\varphi(a))\leqslant -i\}$. et on pose $\hat{A}^\varphi \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim A/\mathscr{F}^iA$. Le morphisme φ s'étend alors en un morphisme d'anneaux $\widehat{\varphi} : \hat{A}^\varphi \to B((u^{-1}))$ à valeurs dans l'anneau des séries de Laurent à coefficients dans B.

Je vais définir le nombre de Tamagawa motivique comme un élément de l'anneau complété $[K_0\left(\widehat{\mathrm{CHM}(k)_{\mathbf{Q}}}\right)\otimes\mathbf{Q}]^{\mathrm{Poinc}_\ell}$ où Poinc_ℓ est le polynôme de Poincaré virtuel ℓ-adique. Ainsi, dans ce qui suit, B sera l'anneau de Grothendieck de la catégorie des $\mathbf{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action de $\mathcal{G}_k$, tensorisé par $\mathbf{Q}$.

On considérera également le polynôme de Poincaré virtuel « motivique »

$$\mathrm{Poinc}_{\mathrm{mot}} : \begin{array}{ccc} K_0(\mathscr{S}_k) & \longrightarrow & K_0(\mathscr{S}_k)[u,u^{-1}] \\ [M] & \longmapsto & \sum\limits_{i\in\mathbf{Z}} \left[h^i(M)\right]\, u^i \end{array} \tag{4.2.33}$$

où $\mathscr{S}_k$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{CHM}(k)_{\mathbf{Q}}$ dont les objets sont les motifs découpés sur les variétés de dimension au plus 2, leurs sommes et leurs duaux. L'existence d'un tel polynôme est dû à Murre, qui a démontré que toute variété de dimension au plus deux admettait une décomposition de Chow-Künneth ([**Mur90**]).

Théorème 4.6. — *Soit k un corps, $\mathscr{C}$ une k-courbe projective, lisse et géométriquement intègre et X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre et vérifiant les hypothèses 4.2.*

1. Le produit eulérien motivique

$$\prod_{\nu\geqslant 1}\left[\frac{\Psi_\nu(X)}{\mathbf{L}^{\nu\dim(X)}}\prod_{\mathcal{C}\in\boldsymbol{Conj}_c(G)}\mathscr{P}_{\rho_{NS},\{e\},\mathcal{C}}(\mathbf{L}^{-n})^{\sum\limits_{\substack{\mathcal{D}\in\boldsymbol{Conj}_c(G)\\ \mathcal{D}^\nu=\mathcal{C}}}\Phi_1(\mathrm{Spec}(k'))_{G,\{e\},\mathcal{D}}}\right]^{\Phi_\nu(\mathscr{C})} \tag{4.2.34}$$

converge dans $[K_0\left(\widehat{\mathrm{CHM}(k)_{\mathbf{Q}}}\right)\otimes\mathbf{Q}]^{\mathrm{Poinc}_\ell}$.

2. *On suppose en outre que X est une surface telle que $A_0(X_{k(X)})$ est nul. Alors* (4.2.34) *converge en fait dans* $[K_0(\widehat{\mathscr{S}_k) \otimes \mathbf{Q}}]^{\mathrm{Poinc}_{\mathrm{mot}}}$
3. *On suppose que k est un corps global. Alors, pour presque toute place finie $\mathfrak{p}$ de k, notant $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}}$ un Frobenius en $\mathfrak{p}$, la série*
$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}}\,|\,\mathrm{Poinc}_\ell[(4.2.34)]) \in \mathbf{C}[[u^{-1}]] \tag{4.2.35}$$
converge absolument en $u = -1$ vers $\Pi(X_{\mathfrak{p}}, \mathscr{C}_{\mathfrak{p}})$ (cf. (4.2.2)*) où $X_{\mathfrak{p}}$ et $\mathscr{C}_{\mathfrak{p}}$ sont les réductions de X et $\mathscr{C}$ modulo $\mathfrak{p}$.*
4. *On suppose que k est un corps fini ; soit $F_k \in \mathcal{G}_k$ le Frobenius. Alors pour tout entier m assez grand, la série*
$$\mathrm{Tr}\,(F_k^m\,|\,\mathrm{Poinc}_\ell[(4.2.34)]) \in \mathbf{C}[[u^{-1}]] \tag{4.2.36}$$
converge absolument en $u = -1$ vers $\Pi(X \times_k k_{_m}, \mathscr{C} \times_k k_{_m})$, où $k_{_m}$ est une extension de k de degré m.

Démonstration. — (esquisse) Pour tout G-module V de caractère χ, on note $P_\nu(V)$ la représentation virtuelle de caractère $g \mapsto \chi(g^\nu)$. Par exemple $P_2(V) = [V]^2 - \left[\overset{2}{\wedge} V\right]$. On notera abusivement ℓ la classe de $\mathbf{Q}_\ell(-1)$ dans l'anneau de Grothendieck des $\mathcal{G}_k$-$\mathbf{Q}_\ell$-représentations.

Une « formule de MacDonald motivique », dûe à Del Bano ([**dBR01**]), et généralisant la formule de MacDonald classique exprimant les nombres de Betti d'un produit symétrique, permet d'obtenir pour tout ν une expression de $\mathrm{Poinc}_\ell(\Psi_{_\nu}(X))$ en fonction des $P_\nu(H^i_\ell(X))$ (*cf.* [**Bou10**, Proposition 2.12])

En utilisant les hypothèses 4.2 et leurs conséquences (notamment la nullité du premier nombre de Betti) on en déduit alors pour tout ν l'estimation
$$\mathrm{Poinc}_\ell\left(\frac{\Psi_{_\nu}(X)}{\mathbf{L}^{\nu\,\dim(X)}}\right) - [1 + \ell^{-\nu}\,u^{-2\,\nu}\,P_{_\nu}\left(\mathrm{Pic}(\bar{X})\right)] \in u^{-3\,\nu}\,B[u^{-1}]. \tag{4.2.37}$$
On en déduit aussi qu'on a $\deg(\mathrm{Poinc}_\ell(\Phi_{_\nu}(\mathscr{C}))) \leqslant 2\nu$.

Par ailleurs, en utilisant le sixième point du théorème 4.3 et les relations d'orthogonalité (4.2.24), on voit que le polynôme de Poincaré virtuel ℓ-adique de
$$\prod_{\mathcal{C} \in \mathbf{Conj}_{\mathrm{c}}(G)} \mathscr{P}_{\rho_{\mathrm{NS}},\{e\},\mathcal{C}}(\mathbf{L}^{-n})^{\sum\limits_{\substack{\mathcal{D} \in \mathbf{Conj}_{\mathrm{c}}(G)\\ \mathcal{D}^\nu = \mathcal{C}}} \Phi_1(\mathrm{Spec}(k'))_{G,\{e\},\mathcal{D}}} \tag{4.2.38}$$
s'écrit
$$1 - \ell^{-\nu}\,P_{_\nu}\left(\mathrm{Pic}(\bar{X})\right)\,u^{-2\nu} + u^{-4\nu}Q(u^{-1}) \tag{4.2.39}$$
où Q est un élément de $B[[u]]$. Ces estimations permettent de conclure quant au premier point.

La démonstration du deuxième point est tout à fait similaire. Le point clef est que sous les hypothèses faites, un théorème de Murre, Kahn et Pedrini sur la partie transcendante de la décomposition de Chow-Künneth du motif de Chow d'une surface permet de montrer que (4.2.37) est en fait déjà valable pour le polynôme de Poincaré motivique $\mathrm{Poinc}_{\mathrm{mot}}$.

Les résultats de spécialisation sont des conséquences un peu techniques mais relativement élémentaires des propriétés de spécialisation des motifs virtuels $\Phi_1(\mathrm{Spec}(k'))_{G,\{e\},\mathcal{D}}$ ainsi que de la formule de Mac Donald motivique. $\square$

5. Espaces de modules de courbes des hypersurfaces linéaires intrinsèques : comptage de points sur les corps finis, dimension et nombre de composantes

5.1. Anneaux de Cox, application à la description du foncteur de points et au comptage de courbes. —

5.1.1. Anneaux de Cox. — Je fais quelques rappels sur la théorie des « anneaux de Cox », initiée dans les années 1990 par Cox dans [**Cox95b**] dans le cas des variétés toriques, et qui a connu depuis d'importants développements (*cf.* entre autres [**BH07, TVAV09, HS10, ADHL10**]...). On peut présenter cette théorie comme une généralisation des coordonnées homogènes sur les espaces projectifs. Bien entendu, on sait de très longue date munir une variété projective de coordonnées homogènes en la plongeant dans un espace projectif, ce qui correspond au choix d'un sous-espace adéquat de l'espace des sections globales d'un fibré très ample sur la variété. La nouvelle idée est en quelque sorte de s'affranchir du caractère non intrinsèque d'un tel choix de coordonnées en considérant simultanément tous les espaces de sections globales de fibrés inversibles sur la variété. Hassett et Tschinkel ont montré que cette théorie fournissait un outil efficace pour la détermination explicite des équations de certains torseurs universels (*cf.* [**Has04**]). En un sens, anneaux de Cox et torseurs universels ne sont que deux incarnations d'une même notion, la seconde, historiquement la plus ancienne, étant invoquée plutôt dans des contextes de saveur arithmétique.

Soit k un corps et X une variété projective, lisse et géométriquement intègre définie sur k. On suppose que $X(k)$ est non vide et que le groupe de Picard de X est libre de rang fini et déployé, c'est-à-dire que $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ coïncide avec $\mathrm{Pic}(X^{\text{sép}})$ et l'action du groupe de Galois absolu est triviale.

Soit $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_r$ une famille finie de diviseurs dont les classes dans le groupe de Picard en forment une base. L'anneau de Cox de X est le k-espace vectoriel

$$\mathrm{Cox}(X) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\mathbf{Z}^r} H^0(X, \mathscr{O}_X(n_1\mathscr{D}_1 + \cdots + n_r\mathscr{D}_r). \tag{5.1.1}$$

Cet espace vectoriel est muni d'une structure naturelle de k-algèbre, ainsi que d'une graduation naturelle par $\mathrm{Pic}(X)$. Cette définition dépend du choix d'une base de $\mathrm{Pic}(X)$, mais on vérifie aisément que deux choix différents conduisent à des k-algèbres $\mathrm{Pic}(X)$-graduées isomorphes.

On suppose désormais que $\mathrm{Cox}(X)$ est une k-algèbre de type fini. Un résultat de Birkar, Cascini, Hacon and McKernan ([**BCHM10**, Corollary 1.3.2.]) assure que c'est le cas si X est une variété de Fano. Indépendamment de ce résultat général, cette propriété est connue pour de nombreux exemples de variétés (variétés toriques, surfaces de del Pezzo...).

Soit $(u_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ une famille finie de sections globales (non constantes) qui engendrent $\mathrm{Cox}(X)$. On sait ([**EKW04, BH03**]) que $\mathrm{Cox}(X)$ est un anneau factoriel, et on peut donc toujours choisir une telle famille de sorte que les u_i soient irréductibles et non 2 à 2 associés. Pour $i \in \mathfrak{I}$, soit $\mathscr{E}_i$ le diviseur des zéros de u_i et $[\mathscr{E}_i]$ sa classe dans $\mathrm{Pic}(X)$. On définit une $\mathrm{Pic}(X)$-graduation sur l'anneau de polynômes $k[\mathfrak{u}_i]_{i\in\mathfrak{I}}$ en posant $\deg(\mathfrak{u}_i) = [\mathscr{E}_i]$, de sorte que le morphisme naturel $k[\mathfrak{u}_i]_{i\in\mathfrak{I}} \to \mathrm{Cox}(X)$ est homogène. Soit $\mathscr{I}_X$ l'idéal homogène noyau de ce morphisme, de sorte qu'on a un isomorphisme de k-algèbes $\mathrm{Pic}(X)$-graduée $\mathrm{Cox}(X) \xrightarrow{\sim} k[\mathfrak{u}_i]_{i\in\mathfrak{I}}/\mathscr{I}_X$. La $\mathrm{Pic}(X)$-graduation sur $k[\mathfrak{u}_i]_{i\in\mathfrak{I}}$ induit une action du tore de Néron-Severi $T_{\mathrm{NS}(X)} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(X), \mathbf{G}_m)$ sur $\mathbf{A}^{\mathfrak{I}}$, et $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(X))$ s'identifie à un sous-schéma fermé $T_{\mathrm{NS}(X)}$-invariant de $\mathbf{A}^{\mathfrak{I}}$, d'idéal $\mathscr{I}_X$.

Soit $\mathcal{D}$ une classe ample de $\mathrm{Pic}(X)$ et $\widehat{X}$ l'ensemble des points de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(X))$ semi-stables vis-à-vis de la $T_{\mathrm{NS}(X)}$-linéarisation sur le fibré trivial de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(X))$ donnée par $\mathcal{D}$, considéré comme caractère de $T_{\mathrm{NS}(X)}$. C'est un ouvert non vide $T_{\mathrm{NS}(X)}$-stable de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(X))$, qui ne dépend pas du choix de $\mathcal{D}$.

Théorème 5.1 **(Hu-Keel,Hassett-Tschinkel)**. — *Le quotient géométrique de $\widehat{X}$ par $T_{NS(X)}$ existe et s'identifie naturellement à X. En outre le morphisme quotient $\mathfrak{T}_X : \widehat{X} \to X$ représente l'unique classe de torseurs universels au-dessus de X, et pour tout $i \in \mathfrak{I}$ le diviseur $\mathfrak{T}_X^* \mathscr{E}_i$ est principal, engendré par $\mathfrak{u}_i$.*

Pour la démonstration, on se reportera à [**Has09**, Theorem 5.6] (*cf.* aussi [**ADHL10**, §I.6]). La première assertion est dûe à Hu et Keel ([**HK00**, Proposition 2.9]).

Ce théorème va permettre de donner une description très explicite du torseur universel comme sous-variété localement fermée de l'espace affine $\mathbf{A}^{\mathfrak{I}}$, en termes de la présentation $\mathrm{Cox}(X) \xrightarrow{\sim} k[\mathfrak{u}_i]/\mathscr{I}_X$ et des relations d'incidence des diviseurs $\mathscr{E}_i$.

Une classe $\mathfrak{C}$ de parties de $\mathfrak{I}$ sera dite *admissible* si on a

$$\widehat{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(X)) \bigcap \left(\bigcup_{\mathfrak{K}\in\mathfrak{C}} \prod_{i\in\mathfrak{K}} \mathfrak{u}_i \neq 0 \right). \tag{5.1.2}$$

Lemme 5.2. — *(*[**Bou11b**, p. 5]*) La classe*

$$\mathfrak{C}_{inc} \overset{déf}{=} \{\mathfrak{K} \subset \mathfrak{I}, \quad \bigcap_{i\notin\mathfrak{K}} \mathscr{E}_i \neq \varnothing\} \tag{5.1.3}$$

est admissible.

5.2. Application à la description du foncteur des points. — Ja vais utiliser la description de X comme le quotient géométrique $\widehat{X}/T_{\mathrm{NS}(X)}$ pour donner une description du foncteur des points de X en termes d'une présentation de son anneau de Cox. Le résultat est en fait une généralisation aisée et naturelle de la description de Cox du foncteur des points d'une variété torique projective et lisse donnée dans [**Cox95a**].

Soit X_0 l'ouvert de X égal au complémentaire de la réunion des diviseurs $\{\mathscr{E}_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$. Comme les sections $\{u_i\}$ engendrent $\mathrm{Cox}(X)$, $\mathrm{Pic}(X)$ est engendré par les $\{[\mathscr{E}_i]\}$, et l'application qui à un diviseur associe sa classe dans le groupe de Picard induit la suite exacte

$$0 \longrightarrow N_X \xrightarrow{\iota} \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \mathbf{Z}\,\mathscr{E}_i \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0. \tag{5.2.1}$$

où N_X désigne le $\mathbf{Z}$-module $k[X_0]^\times/k^\times$. Pour tout groupe abélien A, cette suite exacte induit des suites exactes

$$0 \longrightarrow N_X \otimes A \xrightarrow{\iota} A^{\mathfrak{I}} \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}(X) \otimes A \longrightarrow 0. \tag{5.2.2}$$

et

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)^\vee \otimes A \xrightarrow{\pi^\vee} A^{\mathfrak{I}} \xrightarrow{\iota^\vee} N_X^\vee \otimes A \longrightarrow 0. \tag{5.2.3}$$

Choisissons arbitrairement (et une fois pour toutes) une section du morphisme quotient $k[X_0]^\times \to N_X$. Une telle identification peut être fournie par le choix d'un point k-rationnel. La suite exacte (5.2.1) induit alors pour tout $m \in N_X$ un isomorphisme

$$c_m \;:\; \bigotimes_{i\in\mathfrak{I}} \mathscr{O}_X(\mathscr{E}_i)^{\nu_{\mathscr{E}_i}(m)} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_X \tag{5.2.4}$$

où $\nu_{\mathscr{E}_i}$ représente l'ordre d'annulation le long du diviseur $\mathscr{E}_i$. Pour tous m, m', on a $c_m \otimes c_{m'} = c_{m+m'}$.

Soit $f : S \to X$ un morphisme d'un k-schéma S vers X. Alors

$$(\{(f^*\mathscr{O}_X(\mathscr{E}_i), f^*u_i)\}_{i\in\mathfrak{I}}, \{f^*c_m\}_{m\in N_X}) \tag{5.2.5}$$

est une X-collection sur S, dans le sens suivant :

Définition 5.3. — Soit S un k-schéma. Une *X-collection sur S* est la donnée pour tout $i \in \mathfrak{I}$ d'un couple $(\mathcal{L}_i, s_i)$ où $\mathcal{L}_i$ est un fibré en droites sur S et $s_i \in H^0(S, \mathcal{L}_i)$, et pour tout $m \in N_X$ d'un isomorphisme

$$d_m \;:\; \bigotimes_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{L}_i^{\nu_{\mathscr{E}_i}(m)} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_S, \tag{5.2.6}$$

ces données étant astreintes à vérifier les conditions suivantes :

1. pour tous $m, m' \in N_X$ on a
$$d_m \otimes d_{m'} = d_{m+m'}\;; \tag{5.2.7}$$
2. pour tout $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{I}$ tel que $\bigcap_{i\in\mathfrak{K}} \mathscr{E}_i \neq \varnothing$, les sections $\{s_i\}_{i\in\mathfrak{K}}$ ne s'annulent pas simultanément ;
3. pour tout élément homogène F de $\mathscr{I}_X$, on a
$$F(s_i)_{i\in\mathfrak{I}} = 0. \tag{5.2.8}$$

C'est la donnée de la famille d'isomorphisme $\{d_m\}$ qui permet de donner un sens à la condition (5.2.8). Plus précisément si F est homogène de degré $\mathcal{D}$, et (a_i) est un élément de $\mathbf{Z}^{\mathfrak{I}}$ qui vérifie $\mathcal{D} = \sum a_i\,[\mathscr{E}_i]$, elle permet d'interpréter $F(s_i)$ comme une section de $\bigotimes_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{L}_i^{a_i}$, dont la nullité ne dépend pas du choix de (a_i) (*cf.* [**Bou09a**, p. 1852]).

Si $f : T \to S$ est un morphisme de k-schémas et C est une X-collection sur S, f^*C a un sens évident et est une X-collection sur T. On note C_X la X-collection sur X donnée par $(\{(\mathscr{O}_X(\mathscr{E}_i), u_i)\}_{i\in\mathfrak{I}}, \{c_m\}_{m\in N_X})$.

On note $\mathrm{Coll}_X(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de X-collections sur S, et $\mathrm{Coll}_X^\circ S \subset \mathrm{Coll}_X(S)$ le sous-ensemble constituée des classes d'isomorphie de collections non dégénérées, c'est-à-dire celles pour lesquelles aucune des sections s_i n'est la section nulle.

On a une application fonctorielle en S

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_k(S,X) & \longrightarrow & \mathrm{Coll}_X(S) \\ f & \longmapsto & f^*C_X \end{array} \tag{5.2.9}$$

On note par ailleurs $\mathrm{Hom}_k(S,X,X_0)$ l'ensemble des k-morphismes de S vers X dont l'image schématique rencontre l'ouvert X_0.

Théorème 5.4. — *L'application* (5.2.9) *est une bijection pour tout S. En d'autres termes X représente le foncteur $S \mapsto \mathrm{Coll}_X(S)$.*

L'application (5.2.9) *induit une bijection de* $\mathrm{Hom}_k(S,X,X_0)$ *sur* $\mathrm{Coll}_X^\circ S$.

Démonstration. — (esquisse) C'est une adaptation de la démonstration du théorème principal de [**Cox95a**].

Commençons par expliquer de manière informelle comment est construit le morphisme $S \to X$ correspondant à la X-collection $((\mathcal{L}_i, s_i), (d_m))$: le morphisme en question associe à $x \in S$ le « point de coordonnées homogènes $(s_i(x))$ ». La suite exacte (5.2.1) montre que le $\mathfrak{I}$-uple $(s_i(x))$ est bien défini modulo l'action de $T_{\mathrm{NS}(X)}$. Les conditions 2 et 3 de la définition 5.3 assurent que $(s_i(x))$ est un élément de l'ouvert $\widehat{X}$.

Pour la démonstration proprement dite, on commence par remarquer que $S \mapsto \mathrm{Coll}_X(S)$ est un faisceau de Zariski. Les deux autres ingrédients cruciaux de la démontration sont alors le fait que la collection $\mathcal{T}_X^* C_X$ est isomorphe à $(\{(\mathscr{O}_{\widehat{X}}, \mathfrak{u}_i)\}, \{1\})$ et le fait que le torseur $\mathcal{T}_X$ est localement trivial pour la topologie de Zariski. Tout ceci permet de se ramener à l'énoncé : la restriction de (5.2.9) aux éléments de $\mathrm{Hom}_k(S,X)$ qui se factorisent par $\mathcal{T}_X$ induit une bijection sur l'ensemble des classes d'isomorphie de X-collections vérifiant $\mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_S$ pour tout $i \in I$. Ce dernier résulat découle alors à peu près directement des définitions.

Pour la deuxième assertion du théorème, on raisonne de manière similaire en utilisant le fait que $\mathcal{T}_X^{-1}(X_0)$ est l'ouvert d'équation $\prod \mathfrak{u}_i \neq 0$.

□

5.3. Description des morphismes de $\mathscr{C}$ vers X : montée au torseur universel. — Soit $\mathscr{C}$ une courbe projective, lisse et géométriquement intègre définie sur k. On note $g_{\mathscr{C}}$ son genre. Pour $y \in C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \cap \mathrm{Pic}(X)^\vee$, on cherche à décrire l'ensemble des k-morphismes de $\mathscr{C}$ vers X dont l'image rencontre X_0 et de degré absolu y en termes de l'anneau de Cox de X et sous une forme adaptée au comptage lorsque le corps de base k est fini. Le résultat est donné par la proposition 1.20 de [**Bou09a**]. Je l'énonce ici sous la forme légèrement différente et sans doute un peu plus agréable utilisée dans [**Bou11b, Bou12, Bou13**]. Ce dernier énoncé est tributaire du choix d'une base du groupe de Picard de X, ce qui n'était pas le cas dans [**Bou09a**], mais cela se faisait au prix du choix arbitraire d'une section du morphisme $\mathrm{Div}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Pic}(\mathscr{C})$

qui avait sans doute tendance à obscurcir la démarche, alors que de toute façon la définition même de l'anneau de Cox de X fait appel au choix d'une base de $\mathrm{Pic}(X)$.

Notations 5.5. — On note $\mathscr{C}^{(0)}$ l'ensemble des points fermés de $\mathscr{C}$ et $\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})$ le monoïde des diviseurs effectifs de $\mathscr{C}$, c'est-à-dire le monoïde abélien libre de base $\mathscr{C}^{(0)}$.

Pour tout $v \in \mathscr{C}^{(0)}$ et $\mathcal{D} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})$, on note $v(\mathcal{D})$ la multiplicité de $\mathcal{D}$ en v.

Soit

$$\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{\mathfrak{I}}_{\mathrm{prim}} = \{\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{\mathfrak{I}}, \quad \forall v \in \mathscr{C}^{(0)}, \quad \underset{\mathfrak{K}\in\mathfrak{C}_{\mathrm{inc}}}{\mathrm{Min}} \sum_{i\in\mathfrak{K}} v(\mathcal{E}_i) = 0\} \tag{5.3.1}$$

Soit $I \subset \mathfrak{I}$ tel que les classe des diviseurs $\{\mathscr{E}_i\}_{i\in I}$ forment une base de $\mathrm{Pic}(X)$. Soit $J = \mathfrak{I} \setminus I$ et pour $j \in J$ soit $(b_{i,j}) \in \mathbf{Z}^I$ l'unique I-uplet vérifiant

$$\mathscr{E}_j \sim \sum_{i\in I} b_{i,j}\mathscr{E}_i. \tag{5.3.2}$$

Pour tout $\mathcal{D} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})$, on note $s_{\mathcal{D}}$ la section canonique de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D})$, et pour tout $\boldsymbol{\mathcal{F}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I$, on note $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$ l'ensemble des éléments

$$(s_j) \in \prod_{j\in J} H^0(\mathscr{C}, \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\sum_{j\in J} b_{i,j}\mathcal{F}_i)) \setminus \{0\} \tag{5.3.3}$$

vérifiant

— pour tout élément homogène F de $\mathscr{I}_X$, $F((s_{\mathcal{F}_i})_{i\in I}, (s_j)_{j\in J}) = 0$;

— $((\mathcal{F}_i)_{i\in I}, \mathrm{div}(s_j)_{j\in J})$ est un élément de $\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{\mathfrak{I}}_{\mathrm{prim}}$.

En utilisant le théorème 5.4, l'action naturelle de $(k(\mathscr{C})^\times)^{\mathfrak{I}}$ sur les X-collections sur $\mathscr{C}$ et la suite exacte (5.2.1), on montre la proposition suivante.

Proposition 5.6. — *Soit $y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee$. La bijection* (5.2.9) *induit une bijection de* $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)(k)$ *sur*

$$\bigsqcup_{\substack{\boldsymbol{\mathcal{F}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I \\ \forall i\in\mathfrak{I}, \quad \deg(\mathcal{F}_i)=\langle y\,,\,\mathscr{E}_i\rangle}} \mathcal{N}(\boldsymbol{\mathcal{F}}). \tag{5.3.4}$$

Remarque 5.7. — Dans le cas où X est une variété torique, ce résultat peut être utilisé pour donner une expression de la classe de l'espace de modules $\mathbf{Hom}(\mathbf{P}^1, X, X_0, y)$ dans l'anneau de Grothendieck des variétés (*cf.* le premier point du théorème 4.1).

Remarque 5.8. — Si k est un corps fini, cette proposition va permettre de ramener, modulo une inversion de Möbius, la détermination du cardinal de $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)(k)$ pour $y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee$, à celle du nombre de solutions du système d'équations $F(s_i)_{i\in\mathfrak{I}} = 0$, pour F décrivant les éléments homogènes de $\mathscr{I}_X$, les variables $\{s_i\}_{i\in I}$ représentant certaines sections globales de fibrés en droites sur $\mathscr{C}$.

En termes de ce dénombrement, le choix de la décomposition $\mathfrak{I} = I \sqcup J$ se traduit par le fait qu'on va d'abord considérer les variables indexées par I comme des paramètres ; on dénombre alors, en fonctions de ces paramètres, le nombre de solutions du système d'équations en les variables indexées par J, pour finalement sommer sur toutes les valeurs possibles des paramètres.

La situation que nous allons considérer ci-dessous est celle où l'anneau de Cox n'a qu'une relation qui dépend en outre linéairement des variables indexées par J. En un sens, il s'agit donc de la situation la plus simple après celle des variétés toriques (où il n'y a pas de relation, l'anneau de Cox étant polynomial).

Notons que dans ladite situation, il se peut très bien qu'il y ait plusieurs choix possibles de l'ensemble I, c'est-à-dire plusieurs choix possibles de l'ensemble des paramètres tels que la dépendance linéaire en les variables restantes soit satisfaite. Ceci est un atout, car la méthode de comptage utilisée, pour un choix de paramètres donné, ne s'applique pas en général à tous les éléments du cône des courbes mobiles, mais seulement à ceux pour lesquels, en un certain sens, le degré des paramètres est suffisamment grand. En faisant varier le choix des paramètres, on peut alors couvrir une région plus grande du cône des courbes mobiles.

5.4. Inversion de Möbius et formules de comptages. — *On suppose désormais que k est un corps fini de cardinal q.* Afin de se « débarasser » de la condition « de coprimalité »

$$((\mathcal{F}_i)_{i\in I}, \operatorname{div}(s_j)_{j\in J}) \in \operatorname{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})^{\mathfrak{I}}_{\text{prim}} \tag{5.4.1}$$

apparaissant dans la définition des ensembles $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$ de la proposition 5.6, il est classique d'utiliser une inversion de Möbius. On a la généralisation classique suivante de la formule d'inversion de Möbius (*cf. e.g.* [**Bou09a**, proposition 1.21]).

Proposition 5.9. — *1. Il existe une unique fonction $\mu^{\circ}_X : \mathbf{N}^{\mathfrak{I}} \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant*

$$\forall \boldsymbol{e} \in \mathbf{N}^{\mathfrak{I}}, \qquad \sum_{0\leqslant \boldsymbol{e}'\leqslant \boldsymbol{e}} \mu^{\circ}_X(\boldsymbol{e}') = \begin{cases} 1 & si \underset{i,\ e_i\neq 0}{\cap} \mathscr{E}_i \neq \varnothing \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{5.4.2}$$

En particulier, on a $\mu^{\circ}_X(\boldsymbol{e}) = 0$ dans les cas suivants :

(a) il existe $i \in \mathfrak{I}$ tel que $e_i \geqslant 2$;

(b) $\boldsymbol{e}$ est non nul et l'intersection $\underset{i,\ e_i\neq 0}{\cap} \mathscr{E}_i$ est non vide ; ceci vaut en particulier si on a $\sum_{i\in\mathfrak{I}} e_i = 1$.

2. La fonction $\mu_X : \operatorname{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})^{\mathfrak{I}} \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$\forall \boldsymbol{\mathcal{D}} \in \operatorname{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})^{\mathfrak{I}}, \quad \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{D}}) = \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} \mu^{\circ}_X(v(\mathcal{D}_i))_{i\in\mathfrak{I}} \tag{5.4.3}$$

est l'unique fonction vérifiant

$$\forall\, \boldsymbol{\mathcal{D}} \in \operatorname{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})^{\mathfrak{I}}, \qquad \sum_{0\leqslant \mathcal{E}_i\leqslant \mathcal{D}_i} \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \mathbf{1}_{\operatorname{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})^{\mathfrak{I}}_{prim}}(\boldsymbol{\mathcal{D}}). \tag{5.4.4}$$

Elle est multiplicative, c'est-à-dire que si $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ vérifient

$$\forall i \in \mathfrak{I}, \quad \forall v \in \mathscr{C}^{(0)}, \quad \operatorname{Min}(v(\mathcal{D}_i), v(\mathcal{E}_i)) = 0 \tag{5.4.5}$$

alors on a

$$\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{D}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{D}})\,\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}}). \tag{5.4.6}$$

La fonction μ_X° permet d'exprimer, pour tout $v \in \mathscr{C}^{(0)}$, le facteur local du nombre de Tamagawa défini par Peyre en termes de la présentation de l'anneau de Cox. Plus précisément, notons κ_v le corps résiduel en v et q_v son cardinal. Comme X est le quotient géométrique $\widehat{X}/T_{\mathrm{NS}(X)}$ et $T_{\mathrm{NS}(X)}$ est déployé on a

$$|X(\kappa_v)| = \frac{\left|\widehat{X}(\kappa_v)\right|}{(q_v-1)^{\mathrm{rg}(T_{\mathrm{NS}(X)})}}. \tag{5.4.7}$$

En utilisant la description explicite de $\widehat{X}$ comme ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(X))$ (*cf.* (5.1.2) et le lemme 5.2), on démontre alors :

Lemme 5.10. — *(*[**Bou09a**, Lemme 1.25]*) On a la relation*

$$\begin{aligned}&(1-q_v^{-1})^{\mathrm{rg}(T_{NS(X)})}\frac{|X(\kappa_v)|}{q_v^{\dim(X)}}\\ &= \sum_{\boldsymbol{n}\in\{0,1\}^{\mathfrak{I}}} \frac{\mu_X^\circ(\boldsymbol{n})}{q_v^{\dim(\mathfrak{T}_X)}} \left|\{(x_i)\in\kappa_v^{\mathfrak{I}},\quad \forall i\in\mathfrak{I},\quad x_i=0 \ \mathit{si}\ n_i=1,\quad \forall F\in\mathscr{I}_X,\quad F(x_i)=0\}.\right|\end{aligned} \tag{5.4.8}$$

Dans [**Bou13**], cette formule est un des ingrédients qui me permet de montrer, dans le cas où X est une hypersurface intrinsèque linéaire, que la constante apparaissant dans l'équivalent asymptotique « attendu » pour $|\mathbf{Hom}(\mathscr{C},X,X_0,y)(k)|$ correspond bien à la constante de Peyre (et donc que la prédiction 2.2 est valide lorsque l'on sait également contrôler les termes d'erreur).

Remarque 5.11. — Dans [**Bou13**], j'utilise en fait une inversion de Möbius « partielle » associée au choix de paramètres effectué (*cf.* la remarque 5.8). L'un des intérêts est que certaines séries génératrices qui interviennent dans la détermination du cardinal des ensembles $\mathbf{Hom}(\mathscr{C},X,X_0,y)(k)$ à partir de la proposition 5.6 ont de meilleures propriétés si la condition de coprimalité est traitée à l'aide d'une inversion partielle plutôt que totale. Dans les travaux antérieurs [**Bou09a, Bou11b, Bou12**], où l'inversion totale était utilisée, on avait besoin d'hypothèses supplémentaires sur ces séries génératrices, dont certaines exigeaient des calculs lourds et peu éclairants pour leur vérification ; de telles hypothèses n'étaient d'ailleurs pas satisfaites pour toutes les surfaces de la « liste de Derenthal » (*cf.* les exemples 5.13 ci-dessous). Pour ne pas alourdir le présent texte, dans l'exposition qui suit j'utiliserai cependant uniquement l'inversion de Möbius telle que décrite ci-dessus.

Pour tout $(\boldsymbol{\mathfrak{G}},\boldsymbol{\mathfrak{F}}) \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^J \times \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I$, on note $\widetilde{\mathscr{N}}(\boldsymbol{\mathfrak{G}},\boldsymbol{\mathfrak{F}})$ l'ensemble des éléments

$$(s_j) \in \prod_{j\in J} H^0(\mathscr{C},\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(-\mathfrak{G}_j + \sum_{j\in J} b_{i,j}\mathfrak{F}_i)) \setminus \{0\} \tag{5.4.9}$$

vérifiant, pour tout élément homogène F de $\mathscr{I}_X$, $F((s_{\mathfrak{G}_j}.s_j)_{j\in J},(s_{\mathfrak{F}_i})_{i\in I}) = 0$.

Pour tout $y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee \cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee$, on déduit facilement des propositions 5.6 et 5.9 la formule suivante :

$$|\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)(k)| = \sum_{\substack{(\mathfrak{D},\mathfrak{F})\in\left(\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I\right)^2 \\ \deg(\mathfrak{F}_i)+\deg(\mathfrak{D}_i)\leqslant\langle y\,,\mathscr{E}_i\rangle,\quad i\in I \\ \mathfrak{G}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^J}} \mu_X(\mathfrak{G},\mathfrak{F})\,\left|\widetilde{\mathscr{N}}(\mathfrak{G},\mathfrak{D}+\mathfrak{F})\right|. \tag{5.4.10}$$

Notons que dans le membres de droite de cette identité, la somme porte en fait uniquement sur les éléments $\mathfrak{G}$ qui vérifient $\deg(\mathfrak{G}_j) \leqslant \langle y\,, \mathscr{E}_j\rangle$ pour tout $j \in J$; en effet, si cette condition n'est pas vérifiée, au moins l'un des diviseurs intervenant dans (5.4.9) est de degré strictement négatif et $\widetilde{\mathscr{N}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{D}+\mathfrak{F})$ est vide.

5.5. Estimation dans le cas des hypersurfaces intrinsèques linéaires. — Une fois établie l'identité (5.4.10) le point crucial est d'obtenir une estimation suffisamment fine des fonctions de comptages $\left|\widetilde{\mathscr{N}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{D}+\mathfrak{F})\right|$. Rappelons qu'il s'agit en toute généralité d'estimer le nombre de sections globales de certains fibrés en droites de la courbe $\mathscr{C}$ vérifiant en outre certaines relations de dépendance algébrique, relations très étroitement liées aux équations définissant une présentation de l'anneau de Cox de X. Encore une fois, la situation la plus simple à cet égard correspond au cas où X est une variété torique : il n'y a alors pas de relations de dépendance à prendre en compte, et il s'agit essentiellement uniquement d'évaluer la dimension de certains espaces de sections globales. Le théorème de Riemann-Roch fournit alors les estimations nécessaires.

Dans le cas où X n'est plus torique, il est peut-être déraisonnable d'espérer développer une méthode générale d'attaque du problème. Je me suis concentré sur le cas où l'anneau de Cox de X est présenté par une unique relation, pour laquelle il existe en outre un choix de paramètres tels que la dépendance en les variables restante soit linéaire. De manière plus formelle, on dit que X est une *hypersurface intrinsèque linéaire* si l'idéal $\mathscr{I}_X \subset k[\mathfrak{u}_i]_{i\in\mathfrak{I}}$ est principal et la propriété suivante est vérifiée : il existe $J \subset \mathfrak{I}$ et une famille $\{I_j\}_{j\in J}$ de parties non vides deux à deux disjointes de $\mathfrak{I} \setminus J$ tels que les classes des diviseurs $\{\mathscr{E}_i\}_{i\in\mathfrak{I}\setminus J}$ forment une base de $\mathrm{Pic}(X)$ et, après une renormalisation éventuelle des $\{u_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$, un générateur de $\mathscr{I}_X$ est de la forme

$$\mathcal{F} = \sum_{j\in J} \mathfrak{u}_j \prod_{i\in I_j} \mathfrak{u}_i^{a_i}, \quad a_i \in \mathbf{N}_{>0}. \tag{5.5.1}$$

Toute partie J de $\mathfrak{I}$ vérifiant la propriété précédente est alors appelé un *choix admissible de variables.*

Remarque 5.12. — La terminologie « hypersurface intrinsèque » est empruntée à [**BH07**, Definition 9.1] ; elle vient du fait que la variété X est alors une hypersurface de toute variété torique dans laquelle elle est plongée « raisonnablement » (*cf.* [*op.cit.*, §3]).

Exemple 5.13. — En utilisant la classification de [**Der12**], on constate que parmi les 35 surfaces de del Pezzo généralisées dont l'anneau de Cox n'a qu'une équation, 30 sont des hypersurfaces intrinsèques linéaires. Il y a une exception en degré 3, 2 exceptions en degré 2 et 3 exceptions en degré 1.

Dans [**Bou11b**, Section 4] j'exhibe une famille d'hypersurfaces intrinsèques linéaires de dimension non bornée. J'utilise notamment un résultat de Berchtold et Hausen ([**BH07**]) permettant de construire des variétés d'anneaux de Cox donné. En deux mots, on obtient de telles variétés en les plongeant dans une variété torique adéquate, le plongement étant défini par les équations d'une présentation de l'anneau.

La description des anneaux de Cox des variétés munies de l'action d'un tore de complexité 1 ([**HS10, HH13**]) permet de construire d'autres exemples d'hypersurfaces intrinsèques linéaires.

J'explique à présent les idées clefs qui interviennent dans l'estimation de la quantité $|\mathbf{Hom}(\mathscr{C},X,X_0,y)(k)|$ à partir de la formule (5.4.10) lorsque X est une hypersurface intrinsèque linéaire, et comment cette estimation permet d'obtenir des renseignements au moins partiels sur les prédictions 2.1 et 2.3 dans ce cas. Les résultats finaux seront explicités à la sous-section 5.6.

Avant toute chose, il faut souligner que quelle que soit la nature de l'objectif visé concernant le comportement asymptotique des espaces de modules de morphisme, (estimation de la dimension et du nombre de composantes si k est quelconque, ou estimation du nombre de points k-rationnels si k est fini), l'argument clef sera toujours une estimation du type de celle donnée par la prédiction 2.3 lorsque k est un corps fini.

Pour un corps k quelconque, les conjectures de Weil démontrées par Deligne permettent en effet d'obtenir des informations sur la dimension et le nombre de composantes de $\mathbf{Hom}(\mathscr{C},X,X_0,y)$ à partir d'informations sur le nombre de points rationnels dans les « réduction modulo p » de $\mathbf{Hom}(\mathscr{C},X,X_0,y)$. Par exemple, supposant pour simplifier que $k=\mathbf{Q}$, Weil-Deligne et la minoration de la dimension donnée par la théorie de la déformation des morphismes entraînent facilement le lemme suivant.

Lemme 5.14. — *Soit $y\in \operatorname{Pic}(X)^\vee$. Alors $\mathbf{Hom}(\mathscr{C},X,X_0,y)$ est géométriquement irréductible de dimension $\langle y\,,\,-\omega_X\rangle+(1-g_{\mathscr{C}})\dim(X)$ si et seulement si pour presque tout nombre premier p on a*

$$\lim_{r\to+\infty} p^{\,r[(g_{\mathscr{C}}-1)\dim(X)-\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle]}\,|\mathbf{Hom}(\mathscr{C},X,X_0,y)(\mathbf{F}_{p^r})|=1 \tag{5.5.2}$$

On notera que dans cet énoncé, y est fixé.

Supposons par ailleurs qu'on ait démontré l'énoncé qui suit : il existe une constante M et, pour presque tout nombre premier p, une famille de réels $\{c(p,r)\}_{r\geqslant 1}$ avec $\lim\limits_{r\to+\infty} c(p,r)=1$ et des éléments non nuls $x_1,\dots,x_t$ de $C_{\text{eff}}(X)$ tels qu'on ait :

$$\forall y\in \operatorname{Pic}(X)^\vee\cap C_{\text{eff}}(X)^\vee,$$

$$\left|p^{\,r\,((g_{\mathscr{C}}-1)\dim(X)+\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle)}\,|\mathbf{Hom}(\mathscr{C},X,X_0,y)(\mathbf{F}_{p^r})|-c(p,r)\right|\ll_p p^{\,r\,M}\sum_{i=1}^{t}p^{\,-r\langle y\,,\,x_i\rangle}. \tag{5.5.3}$$

Alors, d'après le lemme ci-dessus, on obtient que $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)$ est géométriquement irréductible de la dimension attendue $\left\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\right\rangle + (1 - g_{\mathscr{C}})\,\dim(X)$ pour tous les y tels que les $\langle y\,,\,x_i\rangle$ sont assez grands, c'est-à-dire la validité de la prédiction 2.1.

Rappelons par ailleurs que si le corps de base k est fini la prédiction 2.3 s'énonce ainsi : il existe une constante strictement positive c et des éléments non nuls $x_1, \ldots, x_t$ de $C_{\text{eff}}(X)$ tels qu'on ait :

$$\forall y \in \operatorname{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee, \quad \left| q^{-\left\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\right\rangle} \left|\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)(k)\right| - c \right| \ll \sum_{i=1}^{t} q^{-\langle y\,,\,x_i\rangle}. \tag{5.5.4}$$

On note aussitôt l'analogie forte entre (5.5.3) et (5.5.4). Les techniques que j'utilise pour obtenir des versions (en général partielles) de chacun de ces deux énoncés à partir de la formule (5.4.10) lorsque X est une hypersurface intrinsèque linéaire sont assez similaires. Je me limite dans la suite de cette exposition au cas de l'énoncé (5.5.4), et je renvoie à [**Bou12, Bou13**] pour le détail des adaptations nécessaires pour l'énoncé (5.5.3).

Définition 5.15. — Soit $n \geqslant 1$ un entier, $\{\mathcal{D}_j, \mathcal{D}'_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et $\mathcal{D}$ des diviseurs de $\mathscr{C}$ tels que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_j + \mathcal{D}'_j$ sont linéairement équivalents pour tout j. On suppose en outre les diviseurs $\mathcal{D}_j$ effectifs. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, soit s_j une section globale non nulle de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_j)$. Soit $\mathcal{E} = \operatorname{pgcd}(\operatorname{div}(s_j))$.

On fixe des isomorphismes

$$\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}_j + \mathcal{D}'_j) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}) \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{5.5.5}$$

ce qui permet de définir l'application linéaire

$$\varphi_{\boldsymbol{s}} \,:\, \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} H^0(\mathscr{C}, \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}'_j)) \to H^0(\mathscr{C}, \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D} - \mathcal{E})) \tag{5.5.6}$$

qui à (s'_j) associe $\sum s'_j\,\frac{s_j}{s_{\mathcal{E}}}$.

La *dimension attendue* de $\operatorname{Ker}(\varphi_{\boldsymbol{s}})$ est la dimension de $\operatorname{Ker}(\varphi_{\boldsymbol{s}})$ lorsque $\varphi_{\boldsymbol{s}}$ est surjective, soit

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \dim(H^0(\mathscr{C}, \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}'_j)) - \dim(H^0(\mathscr{C}, \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D} - \mathcal{E}))). \tag{5.5.7}$$

La *dimension attendue en degré assez grand* de $\operatorname{Ker}(\varphi_{\boldsymbol{s}})$ est la dimension attendue de $\operatorname{Ker}(\varphi_{\boldsymbol{s}})$ lorsque les dimensions des H^0 coïncident avec les caractéristiques d'Euler (en particulier lorsque $\deg(\mathcal{D}'_j) \geqslant 2\,g_{\mathscr{C}} - 1 + \deg(\mathcal{E})$ pour tout j), soit d'après le théorème de Riemann-Roch

$$(n-1)(1 - g_{\mathscr{C}}) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \deg(\mathcal{D}'_j) - \deg(\mathcal{D}) + \deg(\mathcal{E}). \tag{5.5.8}$$

L'idée pour l'estimation du membre de droite de (5.4.10) est que $\left|\widetilde{\mathscr{N}}(\mathfrak{G}, \boldsymbol{\mathfrak{D}} + \boldsymbol{\mathfrak{F}})\right|$ devrait pouvoir être bien approximé par $q^{d(\mathfrak{G}, \boldsymbol{\mathfrak{F}} + \boldsymbol{\mathfrak{D}})}$ où $d(\mathfrak{G}, \boldsymbol{\mathfrak{F}})$ est la dimension attendue en degré assez grand du sous-espace vectoriel de

$$\prod_{j\in J} H^0(\mathscr{C},\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(-\mathcal{G}_j+\sum_{j\in J} b_{i,j}\mathcal{F}_i))\setminus\{0\} \tag{5.5.9}$$

formé des J-uples (s_j) vérifiant la relation

$$\sum_{j\in J} s_j \left[s_{\mathcal{G}_j} \prod_{i\in I_j} s_{\mathcal{F}_i}^{a_i} \right] = 0. \tag{5.5.10}$$

Ainsi on a, notant $\mathcal{D}_{\mathrm{tot}}$ le degré d'un générateur de l'idéal $\mathscr{I}_X$,

$$d(\boldsymbol{\mathcal{G}},\boldsymbol{\mathcal{F}}+\boldsymbol{\mathcal{D}}) = (|J|-1)(1-g_{\mathscr{C}})+\sum_{j\in J}(\langle y\,,\,\mathscr{E}_j\rangle-\deg(\mathcal{G}_j))-\langle y\,,\,\mathcal{D}_{\mathrm{tot}}\rangle-\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{G}_j+\sum_{i\in I_j} a_i(\mathcal{F}_i+\mathcal{D}_i)) \tag{5.5.11}$$

soit en utilisant (5.4.10) et la formule d'adjonction de Berchtold et Hausen (*cf.* [**BH07**, proposition 8.5])

$$|\mathbf{Hom}(\mathscr{C},X,X_0,y)(k)|_{\mathrm{attendu}} \tag{5.5.12}$$

$$= \sum_{\substack{(\boldsymbol{\mathcal{D}},\boldsymbol{\mathcal{F}})\in\left(\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I\right)^2\\ \deg(\mathcal{F}_i)+\deg(\mathcal{D}_i)\leqslant\langle y\,,\mathscr{E}_i\rangle,\quad i\in I\\ \boldsymbol{\mathcal{G}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^J}} \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{G}},\boldsymbol{\mathcal{F}})\; q^{d(\boldsymbol{\mathcal{G}},\boldsymbol{\mathcal{F}}+\boldsymbol{\mathcal{D}})} \tag{5.5.13}$$

$$= q^{\left\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\right\rangle+(1-g_{\mathscr{C}})\dim(X)} \tag{5.5.14}$$

$$\times \sum_{\substack{\boldsymbol{\mathcal{G}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^J_{\leqslant 1}\\ \boldsymbol{\mathcal{F}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I_{\leqslant 1}}} \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{G}},\boldsymbol{\mathcal{F}})\, n((\langle y\,,\,\mathscr{E}_i\rangle-\deg(\mathcal{F}_i))_{i\in I},\boldsymbol{\mathcal{G}},\boldsymbol{\mathcal{F}})\, q^{-\sum_{i\in I}\deg(\mathcal{F}_i)-\sum_{j\in J}\deg(\mathcal{G}_j)} \tag{5.5.15}$$

où

$$n(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{G}},\boldsymbol{\mathcal{F}}) \overset{\text{déf}}{=} q^{-\sum_{i\in I} d_i} \sum_{\substack{\boldsymbol{\mathcal{D}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I\\ \deg(\mathcal{D}_i)=d_i,\quad i\in I}} q^{-\deg(\mathrm{pgcd}(\mathcal{G}_j+\sum_{i\in I_j} a_i(\mathcal{F}_i+\mathcal{D}_i)))}. \tag{5.5.16}$$

Une étude des séries génératrices

$$\sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^I} n(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{G}},\boldsymbol{\mathcal{F}})t^{\boldsymbol{d}} \tag{5.5.17}$$

basée sur leur décomposition en produit eulérien, les estimées de Cauchy et le lemme 5.10 permettent d'obtenir finalement pour tout $\varepsilon>0$ l'estimation (*cf.* [**Bou11b**, §3.1 et 3.4.1] et [**Bou13**, §4])

$$\left| q^{\left\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\right\rangle} |\mathbf{Hom}(\mathscr{C},X,X_0,y)(k)|_{\mathrm{attendu}} - \gamma(X)\right| \ll_\varepsilon \sum_{i\in\mathfrak{I}} q^{-\varepsilon\langle y\,,\,\mathscr{E}_i\rangle} \tag{5.5.18}$$

où

$$\gamma(X) \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{h_{\mathscr{C}}\, q^{(1-g_{\mathscr{C}})}}{q-1}\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))} \quad q^{(1-g_{\mathscr{C}})\,\dim(X)} \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} (1-q_v^{-1})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))}\, \frac{|X(\kappa_v)|}{q_v^{\dim(X)}} \tag{5.5.19}$$

est la constante prédite par Peyre.

Pour obtenir la validité de la prédiction 2.3 pour l'hypersurface linéaire intrinsèque X, il reste donc à contrôler de manière acceptable l'erreur commise en approximant $|\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)(k)|$ par $|\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)(k)|_{\text{attendu}}$, c'est-à-dire plus précisément l'erreur commise en approximant $\left|\widetilde{\mathcal{N}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{D}+\mathfrak{F})\right|$ par $q^{d(\mathfrak{G},\mathfrak{F}+\mathfrak{D})}$.

La méthode que j'utilise ne me permet de le faire en général que sur certains sous-cônes du cône des courbes mobiles. Ce sont essentiellement les sous-cônes définis par la condition « les degrés des coefficicients de la relation linéaire en les (s_j) donnée par (5.5.10) sont suffisamment grands ». En effet, en revenant plus généralement à la situation et aux notations de la définition 5.15, lorsque le degré des diviseurs $\mathcal{D}'_j$ est suffisamment grand par rapport au degré total $\deg(\mathcal{D})$ (respectivement par rapport à $\deg(\mathcal{D})$ et $g_{\mathscr{C}}$) la dimension du noyau est égale à la dimension attendue (respectivement à la dimension attendue en degré assez grand), en d'autres termes, il n'y a pas de syzygies. On montre par exemple, à partir de techniques d'algèbre linéaire élémentaire, le résultat suivant ([**Bou11b**, Proposition 14.3]) :

Proposition 5.16. — *On suppose qu'on a*

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant n-1, \quad \deg(\mathcal{D}'_j) + \deg(\mathcal{D}'_{j+1}) \geqslant \deg(\mathcal{D}) - \deg(\mathcal{E}) + 2\, g_{\mathscr{C}} - 1. \tag{5.5.20}$$

Alors $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_{\boldsymbol{s}}))$ *coïncide avec la dimension attendue en degré assez grand.*

On a divers raffinements et variantes de ce résultat, mais tous sans exception mettent en jeu des conditions sur les degrés des diviseurs, qui, lorsqu'on les traduit en termes de conditions sur le degré absolu y, imposent à y de satisfaire des inéquations de la forme « $\langle y\,,\,\mathscr{E}\rangle$ assez grand », où $\mathscr{E}$ est un diviseur dont la classe n'a aucune raison en général d'être dans le cône effectif, et ainsi ces inéquations nous coupent d'une partie du cône des courbes mobiles. On n'obtient donc en général que la validité partielle des prédictions 2.1 et 2.2 pour une hypersurface intrinsèque linéaire quelconque. Pour espérer raffiner la méthode afin d'obtenir la validité totale inconditionnelle de ces prédictions pour toute hypersurface intrinsèque linéaire, il semble inévitable de devoir tenir compte des syzygies en bas degré, ce qui paraît délicat mais peut-être pas insurmontable. La sous-section suivante résume les résultats obtenus vis-à-vis des prédictions 2.1 et 2.3 pour les hypersurfaces intrinsèques linéaires dans les quatre articles déjà cités.

5.6. Résultats obtenus concernant les prédictions 2.1 et 2.3. — Dans [**Bou09a**], on démontre la validité de la prédiction 2.3 lorsque X est le plan projectif éclaté en trois points alignés.

Dans [**Bou11b**], on démontre la validité de cette même prédiction pour une famille $\{X_n\}_{n\geqslant 3}$ d'hypersurfaces linéaires intrinsèques, vérifiant en particulier $\dim(X_n) = n$. C'est une généralisation du résultat précédent, la variété X_3 étant le plan projectif éclaté en trois points alignés. Plus généralement, pour une hypersurface linéaire intrinsèque quelconque X, on dégage des conditions suffisantes permettant d'aboutir à la validité de la prédiction 2.3, et on montre qu'elles sont satisfaites par la famille $\{X_n\}$. Ces conditions portent d'une part sur des propriétés de séries génératrices du type (5.5.17), d'autre part sur les degrés des coefficients de l'équation de l'anneau de Cox de la variété. Elles sont entièrement explicite en termes des données définissant une présentation de l'anneau de Cox, et, pour une variété donnée, peuvent être vérifiées par un logiciel de calcul formel si on dispose effectivement d'une telle présentation (bien entendu, pour la famille $\{X_n\}$, les arguments utilisés sont de nature différente).

Dans [**Bou12**], on démontre une version partielle explicite de la prédiction 2.1 pour les hypersurfaces intrinsèques linéaires, sous une hypothèse sur les séries génératrices du même type que celle formulée dans [**Bou11b**]. Plus précisément, on démontre sous cette hypothèse que pour tout $y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee$ vérifiant les inégalités

$$\left\langle y\,,\,\frac{1}{\dim(X)}\sum_{j\in J}\mathscr{E}_j - \mathcal{D}_{\mathrm{tot}}\right\rangle \geqslant \mathrm{Max}\left(1,\frac{4}{\dim(X)}\right) g_{\mathscr{C}} \tag{5.6.1}$$

(rappelons que $\mathcal{D}_{\mathrm{tot}}$ est le degré d'un générateur de l'idéal $\mathscr{I}_X$ des relations dans l'anneau de Cox) et

$$\forall i \in \mathfrak{I},\quad \langle y\,,\,\mathscr{E}_i\rangle \geqslant g_{\mathscr{C}} + 1 \tag{5.6.2}$$

alors $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)$ est géométriquement irréductible, a la dimension attendue, et en outre est dense dans $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$. Le résultat est donc optimal lorsque la classe de $\frac{1}{\dim(X)}\sum_{j\in J}\mathscr{E}_j - \mathcal{D}_{\mathrm{tot}}$ est un élément non nul du cône effectif. C'est le cas de la famille $\{X_n\}$ considérée précédemment. Pour certaines surfaces de la liste de Derenthal (10 au total, sans compter X_3), on obtient à l'aide de ce résultat une proportion strictement positive d'éléments y du cône des courbes mobiles tels que la conclusion ci-dessus vaut, proportion par ailleurs effectivement calculable (*cf.* [**Bou12**, Table 1]). Bien que les détails n'aient pas été rédigés, les techniques de l'article permettent également de montrer que si X est une variété torique, alors pour tout élément $y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee$ vérifiant, pour tout diviseur $\mathscr{E}$ du bord, l'inégalité $\langle y\,,\,\mathscr{E}\rangle \geqslant C$ où C est une constante positive ne dépendant que de $g_{\mathscr{C}}$, alors $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)$ est géométriquement irréductible, a la dimension attendue, et est dense dans $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$.

Dans [**Bou13**], comme on l'a déjà évoqué ci-dessus, je démontre pour une hypersurface intrinsèque linéaire X quelconque l'estimation

$$\left| q^{-\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle}\, |\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)(k)|_{\mathrm{attendu}} - \gamma(X)\right| \ll_{\varepsilon} \sum_{i\in\mathfrak{I}} q^{-\varepsilon\,\langle y\,,\,\mathscr{E}_i\rangle} \tag{5.6.3}$$

où $\gamma(X)$ est la constante prédite par Peyre (*cf.* (5.5.19))

Lorsque X est une surface, je démontre en outre, pour tout ensemble admissible J de variables, tout $j_0 \in J$, et tous $\lambda, \varepsilon > 0$ l'estimation

$$\left| q^{-\langle y\,,\,\omega_X^{-1}\rangle} \left(|\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)(k)| - |\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)(k)|_{\mathrm{attendu}}\right)\right|$$

$$\ll_{\varepsilon,\lambda} \sum_{i\in\mathfrak{I}} q^{-\varepsilon\,\langle y\,,\,\mathscr{E}_i\rangle} + q^{\left\langle y\,,\,(1-\lambda)\sum_{j\in J\setminus\{j_0\}}\mathscr{E}_j - \mathcal{D}_{\mathrm{tot}}\right\rangle} \tag{5.6.4}$$

Ceci est insuffisant pour obtenir la prédiction 2.3 car en général il n'y a aucune raison que l'on puisse trouver λ, J et j_0 tels que la classe de $(1-\lambda)\sum_{j\in J\setminus\{j_0\}}\mathscr{E}_j - \mathcal{D}_{\mathrm{tot}}$ soit un élément non nul du cône effectif. Cependant, en tirant partie des divers choix possibles pour J et j_0, cette estimation permet en particulier de montrer la validité des prédictions 2.1 et 2.2 (avec la version « équirépartie » (2.8)) pour deux nouvelles surfaces de la liste de Derenthal : la quintique avec singularité $\mathbf{A}_2$ et la quartique avec singularités $\mathbf{A}_3+\mathbf{A}_1$. Pour toutes les autres surfaces de la liste, on obtient une proportion strictement positive (et explicitement calculable) du cône des courbes mobiles sur laquelle les prédictions 2.1 et 2.2 valent (*cf.* la table 1). En particulier, les résultats de [**Bou12**] sont sensiblement améliorés.

Pour cinq des surfaces, on obtient d'ailleurs une validité « à la limite », c'est-à-dire qu'en faisant tendre le paramètre λ intervenant dans (5.6.4) vers 0 la proportion tend vers 1. D'ailleurs, on obtiendrait pour ces cinq surfaces la validité du deuxième énoncé (2.6) des prédictions 2.2 (et la version équirépartie) si on pouvait établir (5.6.4) avec $\lambda = 0$. J'ai le sentiment que ce dernier énoncé est accessible sans idée fondamentalement nouvelle (c'est-à-dire en particulier sans tenir compte du délicat problème des syzygies en bas degré).

Il est à noter que dans [**Bou13**] aucune hypothèse sur les séries génératrices n'est nécessaire. Ceci est dû notamment aux améliorations techniques apportées par l'utilisation d'une inversion de Möbius « partielle ». Par contre (5.6.4) est limité au cas des surfaces. Il est probable que de telles estimations puissent se généraliser en dimension supérieure, avec du travail mais là encore sans idée vraiment nouvelle. Il est quasiment certain en revanche que l'implémentation de l'inversion partielle dans les arguments de [**Bou12**] et [**Bou11b**] permettrait de s'affranchir des hypothèses sur les séries génératrices mises en jeu.

Par ailleurs, dans [**Bou11b**], on démontre la validité des prédictions 2.3 pour une surface de la liste de Derenthal (la sextique avec singularité $\mathbf{A}_2$) en utilisant un choix de paramètres tel que la relation définissant l'anneau de Cox n'est pas linéaire en les variables restantes. Avec la technique « purement linéaire » mise en jeu dans [**Bou11b**], on n'obtient la validité qu'« à la limite » pour cette surface. Il est très probable qu'une combinaison des deux techniques permettrait d'améliorer encore les résultats de la table 1 (mais il faut s'attendre à certaines complications pour traiter les séries génératrices issues de l'approche non linéaire).

Je termine par quelques commentaires sur la comparaison de mes résultats avec ce qui est connu dans le cas arithmétique.

La conjecture de Manin arithmétique a été établie à l'aide du torseur universel pour un très grand nombre de surfaces de la liste de Derenthal (par exemple, à ma connaissance, en degré au moins 4 seule la quintique avec singularité $\mathbf{A}_1$ n'a pas été traitée) mais dans la presque totalité des cas, le corps de base est le corps des rationnels ; ce n'est que très récemment que des travaux de Derenthal et Frei ont étendu certains résultats au cas d'un corps de base quadratique imaginaire. Par ailleurs, en dehors de la technique de montée au torseur universel et de quelques autres considérations assez générales (*cf. e.g.* [**Der09**]), les arguments employés restent assez spécifiques à chaque surface traitée. Notre approche dans le cas fonctionnel, bien que ne fournissant que

degré	singularités	limite de la proportion du cône des courbes mobiles sur laquelle les prédictions valent lorsque λ tend vers 0
6	$\mathbf{A}_1$	1
6	$\mathbf{A}_2$	1
5	$\mathbf{A}_1$	1
5	$\mathbf{A}_2$	1
5	$\mathbf{A}_3$	$\geqslant 0.81$
5	$\mathbf{A}_4$	$\geqslant 0.76$
4	$3\mathbf{A}_1$	1
4	$\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1$	1
4	$\mathbf{A}_3$	1
4	$\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1$	1
4	$\mathbf{A}_4$	$\geqslant 0.72$
4	$\mathbf{D}_4$	$\geqslant 0.43$
4	$\mathbf{D}_5$	$\geqslant 0.34$
3	$\mathbf{D}_4$	$\geqslant 0.95$
3	$2\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1$	$\geqslant 0.97$
3	$\mathbf{A}_3 + 2\,\mathbf{A}_1$	$\geqslant 0.92$
3	$\mathbf{A}_4 + \mathbf{A}_1$	$\geqslant 0.98$
3	$\mathbf{D}_5$	$\geqslant 0.28$
3	$\mathbf{A}_5 + \mathbf{A}_1$	$\geqslant 0.68$
3	$\mathbf{E}_6$	$\geqslant 0.08$
2	$\mathbf{D}_5 + \mathbf{A}_1$	$\geqslant 0.73$
2	$\mathbf{E}_6$	$\geqslant 0.06$
2	$2\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1$	$\geqslant 0.63$
2	$\mathbf{A}_5 + \mathbf{A}_2$	$\geqslant 0.86$
2	$\mathbf{D}_4 + 3\mathbf{A}_1$	$\geqslant 0.54$
2	$\mathbf{D}_6 + \mathbf{A}_1$	$\geqslant 0.21$
2	$\mathbf{E}_7$	$\geqslant 0.01$
1	$\mathbf{E}_6 + \mathbf{A}_2$	$\geqslant 0.28$
1	$\mathbf{E}_7 + \mathbf{A}_1$	$\geqslant 0.02$
1	$\mathbf{E}_8$	$\geqslant 7.10^{-4}$

Table 1

des résultats limités à un sous-ensemble strict du cône des courbes mobiles pour la très grande majorité des surfaces de la liste, est en contrepartie complètement uniforme et vaut par ailleurs pour une courbe de genre quelconque ; en particulier, pour la quintique avec singularité $\mathbf{A}_2$ et la quartique avec singularités $\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1$, l'analogue de notre résultat sur un corps de nombres quelconques n'est a priori actuellement pas démontré, bien qu'il puisse probablement être obtenu en exploitant la structure de compactification équivariante de groupe algébrique dont on peut munir chacune de ces variétés (*cf.* [**TT12**], où cependant seul le cas où le corps de base est $\mathbf{Q}$ est considéré).

On peut également souligner que le résultat principal de [**Bou11b**] donne des exemples non toriques en dimension arbitraire où la méthode du torseur universel s'applique avec succès. Il n'existe à ma connaissance pas d'analogue connu dans le cas arithmétique, où en dehors du monde torique seules des variétés de dimension au plus 4 ont été jusqu'ici traitées par cette méthode (et il y a très peu d'exemples en dimensions 3 et 4). Toutefois l'analogue pour les corps de nombres du résultat principal de *op.cit.* est connu grâce à [**CLT02**], car les variétés considérées sont des compactifications équivariantes d'espaces affines. Il est sans doute possible (quoique certainement non trivial) d'exhiber des exemples auxquels s'appliquent la stratégie générale de [**Bou11b**] mais qui ne sont pas des compactifications équivariantes.

Il n'existe par ailleurs à ma connaissance pas d'analogue sur les corps de nombres de résultats du type (2.8) (version « équirépartie dans le cône des courbes mobiles » de la conjecture de Manin).

Enfin, les résultats concernant la dimension et l'irréductibilité des espaces de modules sont évidemment spécifiques au cadre géométrique des conjectures de Manin. Je peux comparer ces derniers résultats avec ceux de [**KLO07**], où les auteurs considèrent le cas d'une variété X obtenue par éclatements successifs d'un produit d'espace projectif le long de sous-variétés lisses irréductibles ; ils utilisent des techniques basées sur la théorie de la déformation. Si U désigne le complémentaire des diviseurs exceptionnels, ils montrent en particulier que $\mathbf{Hom}(\mathbf{P}^1, X, U, y)$ est irréductible et de la dimension attendue pour tout degré y appartenant à un certain sous-cône du cône des courbes mobiles. Pour les surfaces de la liste de Derenthal, auxquelles les deux approches s'appliquent, on peut constater que notre approche fournit une région plus importante du cône des courbes mobiles sur lequel le résultat vaut (*cf.* [**Bou12**]). Par ailleurs, nos résultats sont également valables en genre supérieur (il est cependant probable que les arguments de [**KLO07**] puisse se généraliser en genre supérieur). J'ignore si les variétés considérées dans [**Bou11b**] peuvent s'obtenir par éclatements successifs d'un produit d'espaces projectifs. Notons que dans le cadre de mon approche on peut également envisager de raffiner l'étude asymptotique du cardinal $|\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, X_0, y)(\mathbf{F}_{p^r})|$ ce qui pourrait permettre d'aboutir à des renseignements sur le comportement asymptotique des nombres de Betti des espaces de modules auxquels la méthode s'applique.

On peut espérer en toute généralité que l'utilisation de l'anneau de Cox de X puisse donner des informations intéressantes sur la géométrie des espaces de modules $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, X, y)$, au moins quand ses équations sont assez simples.

Références

[ADHL10] Ivan V. Arzhantsev, Ulrich Derenthal, Jürgen Hausen, and Antonio Laface. Cox rings. `http://www.mathematik.uni-tuebingen.de/~hausen/CoxRings/download.php?name=coxrings.pdf`, 2010.

[BBD07] Régis de la Bretèche, Timothy D. Browning, and Ulrich Derenthal. On Manin's conjecture for a certain singular cubic surface. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(1) :1–50, 2007.

[BCHM10] Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher D. Hacon, and James McKernan. Existence of minimal models for varieties of log general type. *J. Amer. Math. Soc.*, 23(2) :405–468, 2010.

[BD09] Timothy D. Browning and Ulrich Derenthal. Manin's conjecture for a quartic del Pezzo surface with A_4 singularity. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(3) :1231–1265, 2009.

[BDPP13] Sébastien Boucksom, Jean-Pierre Demailly, Mihai Păun, and Thomas Peternell. The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension. *J. Algebraic Geom.*, 22(2) :201–248, 2013.

[BH03] Florian Berchtold and Jürgen Hausen. Homogeneous coordinates for algebraic varieties. *J. Algebra*, 266(2) :636–670, 2003.

[BH07] Florian Berchtold and Jürgen Hausen. Cox rings and combinatorics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(3) :1205–1252 (electronic), 2007.

[Bit04] Franziska Bittner. The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero. *Compos. Math.*, 140(4) :1011–1032, 2004.

[BK] Roya Beheshti and Mohan Kumar. Spaces of rational curves on complete intersections. to appear in Compositio Math.

[BM90] Victor Batyrev and Yuri I. Manin. Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques. *Math. Ann.*, 286(1-3) :27–43, 1990.

[Bou03] David Bourqui. Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques déployées dans le cas fonctionnel. *J. Reine Angew. Math.*, 562 :171–199, 2003.

[Bou09a] David Bourqui. Comptage de courbes sur le plan projectif éclaté en trois points alignés. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(5) :1847–1895, 2009.

[Bou09b] David Bourqui. Produit eulérien motivique et courbes rationnelles sur les variétés toriques. *Compos. Math.*, 145(6) :1360–1400, 2009.

[Bou10] David Bourqui. Fonctions L d'Artin et nombre de Tamagawa motiviques. *New York J. Math.*, 16 :179–233, 2010.

[Bou11a] David Bourqui. Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques non déployées. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 211(994) :viii+151, 2011.

[Bou11b] David Bourqui. La conjecture de Manin géométrique pour une famille de quadriques intrinsèques. *Manuscr. Math.*, 135(1-2) :1–41, 2011.

[Bou12] David Bourqui. Moduli spaces of curves and Cox rings. *Michigan Math. J.*, 61 :593–613, 2012.

[Bou13] David Bourqui. Exemples de comptages de courbes sur les surfaces. *Math. Ann.*, 357(4) :1291–1327, 2013.

[Bre02] Régis de la Bretèche. Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de del Pezzo de degré 5. *Duke Math. J.*, 113(3) :421–464, 2002.

[BT96] Victor Batyrev and Yuri Tschinkel. Rational points on some Fano cubic bundles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(1) :41–46, 1996.

[BT98a] Victor Batyrev and Yuri Tschinkel. Manin's conjecture for toric varieties. *J. Algebraic Geom.*, 7(1) :15–53, 1998.

[BT98b] Victor Batyrev and Yuri Tschinkel. Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties. *Astérisque*, (251) :299–340, 1998. Nombre et répartition de points de hauteur bornée (Paris, 1996).

[Cas04] Ana-Maria Castravet. Rational families of vector bundles on curves. *Internat. J. Math.*, 15(1) :13–45, 2004.

[CLT02] Antoine Chambert-Loir and Yuri Tschinkel. On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups. *Invent. Math.*, 148(2) :421–452, 2002.

[Cox95a] David A. Cox. The functor of a smooth toric variety. *Tohoku Math. J. (2)*, 47(2) :251–262, 1995.

[Cox95b] David A. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. Algebraic Geom.*, 4(1) :17–50, 1995.

[CS09] Izzet Coskun and Jason Starr. Rational curves on smooth cubic hypersurfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (24) :4626–4641, 2009.

[dBR01] Sebastian del Baño Rollin. On the Chow motive of some moduli spaces. *J. Reine Angew. Math.*, 532 :105–132, 2001.

[Deb01] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[Der09] Ulrich Derenthal. Counting integral points on universal torsors. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (14) :2648–2699, 2009.

[Der12] Ulrich Derenthal. Singular Del Pezzo surfaces whose universal torsors are hypersurfaces. `arXiv:math/0604194v2`, 2012.

[DL99] Jan Denef and François Loeser. Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration. *Invent. Math.*, 135(1) :201–232, 1999.

[DL01] Jan Denef and François Loeser. Definable sets, motives and p-adic integrals. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(2) :429–469 (electronic), 2001.

[DL02] J. Denef and F. Loeser. Motivic integration and the Grothendieck group of pseudo-finite fields. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, pages 13–23, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.

[dlBBP12] Régis de la Bretèche, Timothy Browning, and Emmanuel Peyre. On Manin's conjecture for a family of Châtelet surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 175(1) :297–343, 2012.

[DM06] Ajneet Dhillon and Ján Mináč. A motivic Chebotarev density theorem. *New York J. Math.*, 12 :123–141 (electronic), 2006.

[EKW04] E. Javier Elizondo, Kazuhiko Kurano, and Kei-ichi Watanabe. The total coordinate ring of a normal projective variety. *J. Algebra*, 276(2) :625–637, 2004.

[EV05] Jordan S. Ellenberg and Akshay Venkatesh. Counting extensions of function fields with bounded discriminant and specified Galois group. In *Geometric methods in algebra and number theory*, volume 235 of *Progr. Math.*, pages 151–168. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005.

[Gro95] Alexander Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 6*, pages Exp. No. 221, 249–276. Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Has04] Brendan Hassett. Equations of universal torsors and Cox rings. In *Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen : Seminars Summer Term 2004*, pages 135–143. Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 2004.

[Has09] Brendan Hassett. Rational surfaces over nonclosed fields. In *Arithmetic geometry*, volume 8 of *Clay Math. Proc.*, pages 155–209. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[HH13] Jürgen Hausen and Elaine Herppich. Factorially graded rings of complexity one. In *Torsors, étale homotopy and applications to rational points*, volume 405 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[HK00] Yi Hu and Sean Keel. Mori dream spaces and GIT. *Michigan Math. J.*, 48 :331–348, 2000. Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday.

[HRS04] Joe Harris, Mike Roth, and Jason Starr. Rational curves on hypersurfaces of low degree. *J. Reine Angew. Math.*, 571 :73–106, 2004.

[HS10] Jürgen Hausen and Hendrik Süß. The Cox ring of an algebraic variety with torus action. *Adv. Math.*, 225(2) :977–1012, 2010.

[Kap00] Mikhail Kapranov. The elliptic curve in the S-duality theory, and Eisenstein series for Kac-Moody groups. Prépublication `math.AG/0001005`, 2000.

[KLO07] Bumsig Kim, Yongnam Lee, and Kyungho Oh. Rational curves on blowing-ups of projective spaces. *Michigan Math. J.*, 55(2) :335–345, 2007.

[KP01] Bumsig Kim and Rahul Pandharipande. The connectedness of the moduli space of maps to homogeneous spaces. In *Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000)*, pages 187–201. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.

[LB12] Pierre Le Boudec. Manin's conjecture for two quartic del Pezzo surfaces with $3A_1$ and $A_1 + A_2$ singularity types. *Acta Arith.*, 151(2) :109–163, 2012.

[LCL13] François Loeser and Antoine Chambert-Loir. Motivic height zeta functions. `arXiv:1302.2077`, 2013.

[LY02] King Fai Lai and Kit Ming Yeung. Rational points in flag varieties over function fields. *J. Number Theory*, 95(2) :142–149, 2002.

[Mur90] J. P. Murre. On the motive of an algebraic surface. *J. Reine Angew. Math.*, 409 :190–204, 1990.

[Per02] Nicolas Perrin. Courbes rationnelles sur les variétés homogènes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 52(1) :105–132, 2002.

[Pey95] Emmanuel Peyre. Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. J.*, 79(1) :101–218, 1995.

[Pey03] Emmanuel Peyre. Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesures de Tamagawa. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 15(1) :319–349, 2003. Les XXIIèmes Journées Arithmetiques (Lille, 2001).

[Pey04] Emmanuel Peyre. Rational points and curves on flag varieties (joint work with A. Chambert-Loir). In *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report*, volume 12, pages 650–654, 2004. `www.mfo.de/programme/schedule/2004/10/OWR_2004_12.ps`.

[Pey12] Emmanuel Peyre. Points de hauteur bornée sur les variétés de drapeaux en caractéristique finie. *Acta Arith.*, 152(2) :185–216, 2012.

[Sal98] Per Salberger. Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties. *Astérisque*, (251) :91–258, 1998. Nombre et répartition de points de hauteur bornée (Paris, 1996).

[ST99] Matthias Strauch and Yuri Tschinkel. Height zeta functions of toric bundles over flag varieties. *Selecta Math. (N.S.)*, 5(3) :325–396, 1999.

[STBT07] Joseph Shalika, Ramin Takloo-Bighash, and Yuri Tschinkel. Rational points on compactifications of semi-simple groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 20(4) :1135–1186 (electronic), 2007.

[Tho98] Jesper Funch Thomsen. Irreducibility of $\overline{M}_{0,n}(G/P,\beta)$. *Internat. J. Math.*, 9(3) :367–376, 1998.

[Thu08] Jeffrey Lin Thunder. Counting subspaces of given height defined over a function field. *J. Number Theory*, 128(12) :2973–3004, 2008.

[Thu09] Jeffrey Lin Thunder. More on heights defined over a function field. *Rocky Mountain J. Math.*, 39(4) :1303–1322, 2009.

[TT12] Sho Tanimoto and Yuri Tschinkel. Height zeta functions of equivariant compactifications of semi-direct products of algebraic groups. In *Zeta functions in algebra and geometry*, volume 566 of *Contemp. Math.*, pages 119–157. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[TVAV09] Damiano Testa, Anthony Várilly-Alvarado, and Mauricio Velasco. Cox rings of degree one del Pezzo surfaces. *Algebra Number Theory*, 3(7) :729–761, 2009.

David Bourqui