Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques déployées dans le cas fonctionnel
Height zêta function of split toric varieties in the functional case

David Bourqui

Abstract : We compute the anticanonical height zêta function of a split toric variety defined over a global field of nonzero characteristic, and show that its analytical behaviour agrees with the predictions of Manin and Peyre.

Key words : height zêta function, Manin's conjectures, split toric varieties.
AMS classification : primary : 11G50, 11M41, 14M25.

1 Introduction

Ce travail se situe dans le cadre général de l'étude de l'évolution asymptotique des points de hauteur bornée sur une variété projective définie sur un corps global qui n'est pas de type général. L'intérêt pour ce sujet trouve son origine dans deux articles ([9] et [1]) écrits par Manin et ses collaborateurs, où sont formulées un certain nombre de conjectures reliant ce comportement asymptotique à des invariants arithmétiques et géométriques de la variété, en particulier dans le cas où la variété est de Fano et la hauteur est issue du fibré anticanonique. Même si par la suite un contre-exemple exhibé par Batyrev et Tschinkel dans [4] a montré que les hypothèses de ces conjectures étaient insuffisantes, de nombreux travaux ont confirmé les prédictions de Manin pour des classes importantes de variétés : citons entre autres [9], [14], [2], [3]. Pour plus de références et un survol général de ces questions, on pourra se reporter à [17].

La très grande majorité de ces travaux se placent dans le cadre où le corps de base est un corps de nombres. Le cas d'un corps global de caractéristique non nulle reste très peu étudié. Dans ce cadre, le cas des espaces projectifs est traité par Wan dans [23], celui des variétés de drapeaux, qui englobe le précédent, par Peyre dans [15]. Dans [5] nous traitons le cas des surfaces de Hirzebruch. Nous étendons ici le résultat aux variétés toriques déployées définies sur un corps global quelconque de caractéristique non nulle, obtenant ainsi (dans le cas déployé) une version fonctionnelle du résultat de Batyrev et Tschinkel, qui, à l'aide d'outils d'analyse harmonique, ont démontré dans [2] et [3] la validité de la conjecture de Manin pour les variétés toriques lisses définies sur un corps de nombres. Notre méthode est différente (et plus élémentaire), elle s'inspire fortement de celle que Salberger a utilisée dans [19] (voir aussi [16] et [6]) pour redémontrer le résultat de Batyrev et Tschinkel dans le cas où la variété torique est déployée et le corps de base est le corps des rationnels.

Dans ce contexte, il est naturellement tentant d'essayer également d'adapter la méthode de Batyrev et Tschinkel au cas fonctionnel. C'est l'objet d'un travail en cours de l'auteur de ce texte. Un des avantages de cette dernière approche est qu'elle permettra sans doute de traiter le cas général d'une variété torique non déployée, situation qui nous semble difficilement accessible par la technique employée ici.

2 Notations, définitions

Les deux sous-sections suivantes sont consacrées à de brefs rappels. La première contient des résultats extrêmement classiques sur les corps globaux de caractéristique non nulle, la seconde concerne les variétés toriques. Nous y introduisons des notations qui seront utilisées par la suite.

2.1 Corps globaux de caractéristique non nulle

Dans la suite on travaille sur le corps de fonctions d'une courbe $\mathcal{C}$ définie sur un corps fini k de cardinal q, projective, lisse, et géométriquement intègre. Autrement dit ce corps, noté K, est une extension finie du corps des fractions rationnelles $k(T)$, avec k algébriquement clos dans K.

Soit $\mathcal{V}_K$ l'ensemble des valuations normalisées de K, de sorte que $\mathcal{V}_K$ s'identifie à l'ensemble des points fermés de la courbe $\mathcal{C}$. Pour $v \in \mathcal{V}_K$, on note $\mathcal{O}_v = \{x \in K,\, v(x) \geq 0\}$ l'anneau de valuation de v, $\mathcal{M}_v = \{x \in K,\, v(x) > 0\}$ l'idéal maximal de v, $k_v = \mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v$ le corps résiduel de v et K_v le complété de K en v. On notera aussi $f_v = [k_v : k]$ le degré résiduel (de sorte que $\# k_v = q^{f_v}$), et, pour $x \in K$, $|x|_v = q^{-f_v\, v(x)}$. Alors pour tout $x \in K^*$ on a $|x|_v = 1$ pour tout $v \in \mathcal{V}_K$ sauf un nombre fini et la formule du produit

$$\prod_{v \in \mathcal{V}_K} |x|_v \;=\; 1.$$

Soit $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$ le groupe des diviseurs de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire le groupe abélien libre de base $\mathcal{V}_K$.

Si $D = \sum_{v \in \mathcal{V}_K} n_v\, v$ est un élément de $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$, on définit, pour $v \in \mathcal{V}_K$, $v(D) = n_v$. Le support de D est

$$\mathrm{Supp}(D) = \{v \in \mathcal{V}_K,\, v(D) \neq 0\}.$$

On note

$$\mathrm{Div}^+(\mathcal{C}) = \{\, D \in \mathrm{Div}(\mathcal{C}),\, \forall\, v \in \mathcal{V}_K,\;\; v(D) \geq 0\}$$

l'ensemble des diviseurs effectifs. On écrira aussi $D \geq 0$ pour $D \in \mathrm{Div}^+(\mathcal{C})$. En fait, on a une relation d'ordre partiel sur $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$ définie par $D \leq D'$ si et seulement si on a $v(D) \leq v(D')$

pour tout v de $\mathcal{V}_K$, et cet ordre partiel s'étend de manière naturelle à $\mathrm{Div}(\mathcal{C})^I$ pour tout ensemble I.

Si $x \in K^*$, le diviseur associé à x est $(x) = (x)_0 - (x)_\infty$ où

$$(x)_0 = \sum_{v \in \mathcal{V}_K,\, v(x)>0} v(x)\, v$$
$$(x)_\infty = -\sum_{v \in \mathcal{V}_K,\, v(x)<0} v(x)\, v$$

autrement dit $(x)_0$ est le diviseur des zéros de x (avec multiplicité) et $(x)_\infty$ celui des pôles (avec multiplicité).

Deux diviseurs D et D' sont dits linéairement équivalents s'il existe $x \in K^*$ vérifiant

$$D - D' = (x).$$

On notera $D \sim D'$ pour D et D' linéairement équivalents. Le groupe des classes de diviseurs est le quotient de $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$ par le sous-groupe des diviseurs de la forme (x), ou ce qui revient au même est le groupe $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$ modulo l'équivalence linéaire. On pose, pour $D \in \mathrm{Div}(\mathcal{C})$,

$$\deg(D) = \sum_{v \in \mathcal{V}_K} f_v\, v(D)$$

ce qui définit un homomorphisme $\mathrm{Div}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Z}$ appelé degré. On a, pour tout $x \in K^*$, $\deg((x)) = 0$, de sorte que le morphisme ci-dessus se factorise à travers le groupe des classes de diviseurs. On note h le nombre de classes de diviseurs de degré zéro. Ce nombre est fini par [24, IV§ 4,Thm 7]. Nous fixons une fois pour toutes h représentants des classes de diviseur de degré 0, notés $\mathfrak{d}_1^0, \ldots, \mathfrak{d}_h^0$. Nous fixons également un diviseur de degré 1, noté $\mathfrak{d}^1$ (il en existe par [24, VII§ 5,Cor 6]).

Pour tout $D \in \mathrm{Div}(\mathcal{C})$ on note $l(D)$ la dimension (finie) du k-espace vectoriel

$$H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D)) \;=\; \{x \in K^*,\, (x) + D \geq 0\} \,\cup\, \{0\}.$$

En particulier si $\deg(D) < 0$ on a $l(D) = 0$. On dispose alors du théorème de Riemann-Roch ([24, VI, Thm 2]) : si on note g le genre de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$ un diviseur canonique (de sorte que le degré de $\mathcal{K}$ est $2g - 2$), alors pour tout diviseur D on a

$$l(D) - l(\mathcal{K} - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

On a donc $l(D) = \deg(D) + 1 - g$ si $\deg(D) > 2g - 2$.

Pour tout diviseur D nous notons $|D|$ le système linéaire complet associé, soit

$$|D| = \{E \geq 0,\, E \sim D\}$$

de sorte qu'on a

$$\#|D| = \frac{q^{l(D)} - 1}{q - 1}.$$

Le problème auquel nous serons confronté par la suite est que, pour $g \geq 1$, $l(D)$ n'est pas une fonction de $\deg(D)$ si $\deg(D)$ est petit. Cependant définissons des fonctions

$$f_i \,:\, \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

pour $i = 1, \ldots, h$ en posant pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_i(n) \;=\; l\,(\,\mathfrak{d}_i^0 + n\,\mathfrak{d}^1).$$

On a donc $f_i(n) = n+1-g$ dès que $n > 2\,g-2$. Maintenant si on ne considère que les diviseurs D astreints à la condition

$$D - \deg(D)\,\mathfrak{d}^1 \,\sim\, \mathfrak{d}_i^0$$

pour i fixé nous avons $l(D) = f_i(\deg(D))$. Nous ne pouvons expliciter $f_i(n)$ pour $0 \leq n \leq 2\,g-2$ mais nous allons montrer pour tout n la majoration

$$f_i(n) \;\leq\; 1 + n$$

qui nous suffira pour le résultat que nous avons en vue. Nous étendrons f_i à $\mathbf{Z}$ en posant $f_i(n) = 1+n$ pour $n < 0$. Il pourrait sembler logique de poser plutôt $f_i(n) = l\,(\,\mathfrak{d}_i^0 + n\,\mathfrak{d}^1) = 0$. La définition adoptée ici est juste un artifice de calcul, elle permettra par la suite d'écrire des majorations plus "propres".

Pour démontrer la majoration ci-dessus, on remarque qu'étant donné D un diviseur effectif l'application

$$E \mapsto E + D$$

définit une injection de $|\mathcal{K} - D|$ dans $|\mathcal{K}|$ d'où

$$l(\mathcal{K} - D) \leq l(\mathcal{K})$$

et comme $l(\mathcal{K}) = g$ le théorème de Riemann-Roch entraîne la majoration

$$l(D) \leq 1 + \deg(D)$$

valable pour tout diviseur D.

La fonction zêta de Dedekind de $\mathcal{C}$, notée $\zeta_{\mathcal{C}}$, est définie de la manière suivante. On pose

$$Z_{\mathcal{C}}(T) = \sum_{D \geq 0} T^{\,\deg(D)} = \prod_{v \in \mathcal{V}_K} (1 - T^{f_v})^{-1} \;\;\in \mathbf{Z}\,[[T]]$$

et $\zeta_{\mathcal{C}}(s) = Z_{\mathcal{C}}(q^{-s})$. Du théorème de Riemann-Roch on déduit que la série définissant $\zeta_{\mathcal{C}}(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier, avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu $\frac{h\,q^{1-g}}{(q-1)\,\ln(q)}$ (cf [24, VII§ 6,Thm 4] pour un résultat plus précis).

2.2 Géométrie des variétés toriques

Nous nous contentons de rappeler les résultats qui nous seront utiles, et renvoyons aux références classiques sur les variétés toriques (par exemple [13], [10], [8]) pour plus de détails.

Soit N un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini dont on notera r le rang, $M = N^\vee$ son dual, l'accouplement naturel entre N et M étant noté $< . , . >$ (par la suite nous désignerons toujours ainsi l'accouplement naturel entre un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini et son dual, mais aucune confusion ne devrait en résulter). Soit Σ un éventail de N supposé projectif et régulier. A un tel éventail est associé pour tout corps L une variété torique déployée $X_{\Sigma,L}$ définie sur L, projective, lisse et de dimension r. Désormais par X_Σ nous entendrons la variété $X_{\Sigma,K}$. Nous noterons T son orbite ouverte (qui est donc isomorphe à $(\mathbf{G}_{m,K})^r$), M s'identifie alors au groupe des caractères de T et N à celui de ses cocaractères. Pour toute extension L de K, $T(L)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(M, L^*)$.

Nous notons $\Sigma(1)$ l'ensemble des rayons de Σ. Pour $\alpha \in \Sigma(1)$ nous notons ρ_α le générateur de α, $\mathfrak{D}_\alpha$ le diviseur de Weil T-invariant associé et $\mathcal{D}_\alpha$ sa classe dans le groupe de Picard de X_Σ. Un diviseur anticanonique est alors donné par $\sum_{\alpha\in\Sigma(1)} \mathfrak{D}_\alpha$. Nous désignons par $\mathrm{PL}(\Sigma)$ le groupe des applications entières linéaires par morceaux sur Σ, qui est isomorphe au groupe des faisceaux inversibles T-linéarisés de X_Σ modulo isomorphisme, ainsi qu'au groupe abélien libre de base $(\mathfrak{D}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}$ par l'application

$$\phi \longmapsto (\phi(\rho_\alpha))_{\alpha\in\Sigma(1)}.$$

Le groupe de Picard de X_Σ est le quotient du groupe abélien libre de base $(\mathfrak{D}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}$ par les relations

$$\sum_{\alpha\in\Sigma(1)} < m, \rho_\alpha > \mathfrak{D}_\alpha$$

où m parcourt M. Nous fixons pour toute la suite de ce texte une base de N dont les éléments sont les générateurs des rayons d'un cône donné σ_0 de dimension r (ce qui est toujours possible car l'éventail est régulier). Notons $(\rho^*_\beta)_{\beta\in\sigma_0}$ la base duale, et posons pour $\beta \in \sigma_0$ et $\alpha \notin \sigma_0$

$$n_{\beta,\alpha} = - < \rho^*_\beta, \rho_\alpha > .$$

Alors $\mathrm{Pic}(X_\Sigma)$ est libre de base $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$. On désigne par t son rang. On a pour $\beta \in \sigma_0$

$$\mathcal{D}_\beta = \sum_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}\, \mathcal{D}_\alpha.$$

Les coordonnées de la classe du faisceau anticanonique (notée $-\omega$) sont donc dans cette base

$$(1 + \sum_{\beta\in\sigma_0} n_{\beta,\alpha})_{\alpha\notin\sigma_0},$$

elles seront aussi notées $(-\omega_\alpha)$.

3 Fonction zêta des hauteurs

Nous renvoyons aux références [12], [22], [16] et [21] pour une présentation détaillée de la notion de hauteur. Dans cette section nous définissons notre principal objet d'étude : la fonction zêta associée à une certaine hauteur anticanonique sur X_Σ, et nous énonçons notre résultat, qui sera démontré dans la dernière section.

3.1 Construction de la hauteur

Nous utilisons la hauteur construite par Batyrev et Tschinkel dans [2, 2.2] (à ceci près que les auteurs de [2] travaillent sur un corps de nombres). Nous rappelons comment elle est définie. Pour tout $v \in \mathcal{V}_K$ le morphisme valuation

$$\begin{aligned} v \;:\; K_v^* &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ x &\longmapsto v(x) \end{aligned}$$

permet, en identifiant $T(K_v)$ à $\mathrm{Hom}(M, K_v^*)$, de définir par composition un morphisme

$$j_v \;:\; T(K_v) \;\longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z}) \;=\; N$$

puis pour tout $\phi \in \mathrm{PL}(\Sigma) \otimes \mathbf{C}$

$$\begin{aligned} H_{\Sigma,v}(\phi) \;:\; T(K_v) \;&\longrightarrow \mathbf{C} \\ x \;&\longmapsto \exp\left[\, f_v \,\ln(q)\, \phi(j_v(x)) \,\right] \end{aligned}$$

et enfin un accouplement noté H_Σ

$$\begin{array}{ccc} T(K) \times (\mathrm{PL}(\Sigma) \otimes \mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x, \phi) & \longmapsto & \displaystyle\prod_{v \in \mathcal{V}_K} H_{\Sigma,v}(\phi)(x) \end{array}$$

qui vérifie entre autres propriétés

Lemme 1 *[2, Thm. 2.1.6 + Rk. 2.1.8] La restriction de H_Σ à $T(K) \times \mathrm{PL}(\Sigma)$ est un système de hauteurs, i.e. pour tout $\phi \in \mathrm{PL}(\Sigma)$, la restriction de H_Σ à $T(K) \times \{\phi\}$ est la restriction à $T(K)$ d'une hauteur de Weil associée au fibré correspondant à ϕ (notée $H_{\Sigma,\phi}$ par la suite).*

Ce lemme est d'abord montré dans le cas où ϕ correspond à un fibré très ample, auquel cas il résulte des propriétés de convexité de ϕ, puis dans le cas général en écrivant tout diviseur comme différence de deux diviseurs très amples.

Remarques
(i) La formule du produit montre que H_Σ se factorise à travers $T(K) \times (\mathrm{Pic}(X_\Sigma) \otimes \mathbf{C})$.
(ii) Les hauteurs ainsi construites sont à valeurs dans $q^{\mathbf{Z}}$.
(iii) Si V est une variété définie sur K, vérifiant de bonnes hypothèses, une hauteur associée à un faisceau inversible $\mathcal{L}$ peut se définir à l'aide d'un modèle $\mathfrak{V}$ de V sur un ouvert de $\mathcal{C}$, muni

d'un modèle $\mathfrak{L}$ de $\mathcal{L}$ (voir [19] et [15]). Ici comme X_Σ est une variété torique déployée nous disposons d'un modèle canonique $\mathfrak{X}_\Sigma$ de X_Σ défini sur $\mathcal{C}$ toute entière, et pour tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ d'un modèle canonique de $\mathcal{L}$ sur $\mathfrak{X}_\Sigma$. La hauteur définie ci-dessus correspond au choix de ces modèles.

3.2 Analogue de la conjecture de Manin et énoncé du résultat

Nous posons alors

$$\zeta_\Sigma(\phi) = \sum_{x \in T(K)} H_\Sigma(x, -\phi)$$

pour tout $\phi = (s_\alpha) \in \mathrm{PL}(\Sigma) \otimes \mathbf{C}$ tel que la série converge. Dans la suite nous étudierons en fait la restriction de ζ_Σ à la droite complexe $\mathbf{C}\,\phi_0$, où $\phi_0 = (1, \ldots, 1)$ et correspond donc au faisceau anticanonique. Nous noterons, pour $s \in \mathbf{C}$,

$$\zeta_{\Sigma,-\omega}(s) = \zeta_\Sigma(s\,\phi_0).$$

Nous rappelons à présent le comportement analytique présumé d'une telle fonction zêta. Ce comportement est étroitement lié à l'évolution asymptotique du nombre de points de hauteur bornée. Soit plus généralement V une variété définie sur K, lisse, projective et géométriquement intègre. Nous supposons que V vérifie en outre certaines hypothèses géomé- triques et arithmétiques telles que celles énoncées dans [15, 2.1] par exemple (et qui sont satisfaites par la variété X_Σ). En particulier le faisceau anticanonique de V est à l'intérieur du cône effectif. Soit $H_{\omega_V^{-1}}$ une hauteur issue du faisceau anticanonique. Si U est un ouvert de V, on peut définir

$$\zeta_{H_{\omega_V^{-1}},U}(s) = \sum_{x \in U(K)} H_{\omega_V^{-1}}(x)^{-s}$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que cette série converge. Par analogie avec les conjectures de Manin, il est naturel de se demander si pour un ouvert U assez petit (cette restriction étant certainement nécessaire pour éviter les fermés accumulateurs), $\zeta_{H_{\omega_V^{-1}},U}(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et se prolonge sur un domaine du type $\Re(s) > 1 - \varepsilon$ en une fonction méromorphe qui a un pôle d'ordre le rang de $\mathrm{Pic}(V)$ en $s = 1$. Si V vérifie les hypothèses de [15, 2.1] par exemple, on peut définir (voir [15]) les constantes $\alpha^*(V)$, $\beta(V)$ et $\tau_{H_{\omega_V^{-1}}}(V)$. Par analogie avec le raffinement de la conjecture de Manin proposé par Peyre dans [14], la partie principale de ce pôle en $s = 1$ devrait être donnée par l'expression $\alpha^*(V)\,\beta(V)\,\tau_{H_{\omega_V^{-1}}}(V)$.

L'invariant $\alpha^*(V)$ est défini comme $\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(\omega_V^{-1})$ où $C_{\mathrm{eff}}(V)$ est le cône effectif de V et $\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}$ est défini pour tout élément s de l'intérieur du cône effectif par

$$\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s) = \int_{C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} e^{-<s,y>} dy$$

avec

$$C_{\text{eff}}(V)^{\vee} = \{\, y \in (\operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{R})^{\vee},\, \forall\, x \in C_{\text{eff}}(V),\, < y\,,\, x >\geq 0\,\},$$

la mesure de Lebesgue sur $(\operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{R})^{\vee}$ étant normalisée par le réseau $\operatorname{Pic}(V)^{\vee}$. Dans le cas que nous traitons ici nous verrons que la constante $\alpha^*(X_\Sigma)$ apparaît naturellement dans le calcul de la fonction zêta des hauteurs.

Par ailleurs $\beta(V) = \# H^1(K, \operatorname{Pic}(V^s))$ où $V^s = V \times_{\operatorname{Spec}(K)} \operatorname{Spec}(K^s)$. Comme X_Σ est déployée on a $\beta(X_\Sigma) = 1$. Notons que les constantes $\alpha^*(V)$ et $\beta(V)$ sont rationnelles et indépendantes du choix de la hauteur anticanonique.

Il n'en est pas de même pour $\tau_{H_{\omega_V^{-1}}}(V)$. Dans le cas qui nous occupe (la construction générale étant expliquée dans [15]) on a

$$\tau_{H_{\Sigma,\phi_0}}(X_\Sigma) = \left(\lim_{s\to 1}(s-1)\,\zeta_{\mathcal{C}}(s)\right)^t\; q^{(1-g)\,\dim(X_\Sigma)} \prod_{v\in\mathcal{V}_K} \lambda_v^{-1}\,\omega_v(X_\Sigma(K_v))$$

où les λ_v sont des facteurs de convergences donnés par $\lambda_v = (1-q^{-f_v})^t$ et $\omega_v(X_\Sigma(K_v))$ désigne le volume de l'espace v-adique $X_\Sigma(K_v)$ pour une certaine mesure ω_v. Cette mesure est construite à partir de la métrisation du faisceau anticanonique (voir la section 1 de [19]) dont est issue la hauteur. Comme remarqué précédemment, le choix de la métrique effectué ici correspond au choix du modèle naturel $\mathcal{X}_\Sigma$ de X_Σ sur $\mathcal{C}$, et dans ces conditions pour tout v on a d'après [19, Cor 2.15]

$$\omega_v(X_\Sigma(K_v)) = \frac{\#\,\mathcal{X}_\Sigma(k_v)}{q^{\,f_v\,\dim(X_\Sigma)}},$$

$\mathcal{X}_\Sigma(k_v)$ désignant l'ensemble des points k_v-rationnels de la k_v-variété obtenue par réduction modulo v de $\mathcal{X}_\Sigma$ (qui n'est autre que X_{Σ,k_v}).

Dans [15], Peyre montre que ce qui précède est vérifié pour les variétés de drapeaux généralisées. Ici nous montrons

Théorème 1 *Soit Σ un éventail projectif et régulier et X_Σ la variété projective et lisse définie sur K qui lui est associée. La série $\zeta_{\Sigma,-\omega}(s)$ définie ci-dessus converge absolument dans le domaine $\Re(s) > 1$ et pour un certain $\varepsilon > 0$ se prolonge en une fonction méromorphe dans le domaine $\Re(s) > 1-\varepsilon$ qui a un pôle d'ordre t, le rang du groupe de Picard de X_Σ, en $s = 1$, de partie principale (avec les notations ci-dessus) $\alpha^*(X_\Sigma)\,\beta(X_\Sigma)\,\tau_{H_{\Sigma,\phi_0}}(X_\Sigma)$.*

Notons que contrairement aux hypothèses de [19, Thm 11.49], nous n'avons pas besoin de supposer le faisceau anticanonique engendré par ses sections globales.

4 Démonstration du résultat

4.1 Réécriture de la fonction zêta des hauteurs

Nous noterons $\mathcal{A}_\Sigma$ le sous-ensemble de $\operatorname{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}$ composé des éléments $(D_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}$ vérifiant les deux conditions

$$\forall\, m \in M,\ \sum_{\alpha\in\Sigma(1)} < m, \rho_\alpha > \ D_\alpha \ \sim\ 0 \qquad (*)$$

et

$$\bigcap_{\sigma\in\Sigma} \operatorname{Supp}\left(\sum_{\alpha\notin\sigma} D_\sigma\right) = \emptyset \qquad (**)$$

la dernière condition étant équivalente à

$$\forall\, v \in \mathcal{V}_K,\ \operatorname{Inf}_{\sigma\in\Sigma}\left(\sum_{\alpha\notin\sigma} v(D_\alpha)\right) = 0$$

ou encore à

$$\forall\, v \in \mathcal{V}_K,\ \exists\, \sigma \in \Sigma,\ \forall \alpha \notin \sigma,\ v(D_\alpha) = 0.$$

Nous noterons aussi $\mathcal{A}_\Sigma^{(*)}$ (respectivement $\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}$) l'ensemble des éléments de $\operatorname{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}$ vérifiant la condition $(*)$ (respectivement $(**)$).

Dans [19, ch. 11], Salberger démontre la conjecture de Manin pour les variétés toriques déployées définies sur $\mathbf{Q}$ en ramenant, par le biais des torseurs universels, le comptage des points rationnels d'une telle variété torique au comptage des points entiers d'un espace affine, vérifiant certaines conditions de coprimalité. Ces conditions sont le strict analogue de la condition $(**)$. Ici nous montrons que l'on peut paramétrer les points de $T(K)$ par les éléments de $\mathcal{A}_\Sigma$.

Lemme 2 *Il existe une bijection*

$$h_\Sigma : T(K)/T(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_\Sigma$$

de sorte que pour $x \in T(K)$ et $\phi \in \mathrm{PL}(\Sigma)$, si on note $(D_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)} = h_\Sigma(x)$, on a

$$H_{\Sigma,\phi}(x) = q^{\sum_{\alpha\in\Sigma(1)} \phi(\rho_\alpha)\deg(D_\alpha)}.$$

Démonstration La démonstration donnée ici est combinatoire et ne fait (en apparence du moins) aucun usage des torseurs universels.

On a un morphisme de groupes

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{div}\ :\ K^* & \longrightarrow & \operatorname{Div}(\mathcal{C}) \\ x & \longmapsto & (x) \end{array}$$

de noyau k^* qui induit par composition un morphisme

$$\psi\ :\ T(K) \ \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Div}(\mathcal{C}))$$

de noyau $T(k) = \operatorname{Hom}(M, k^*)$. On a donc une suite exacte

$$0 \to T(K)/T(k) \to \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Div}(\mathcal{C})) \to \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Pic}(\mathcal{C})) \to 0$$

Maintenant soit (D_α) un élément de $\mathcal{A}_\Sigma$. L'élément de $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Div}(\mathcal{C}))$

$$m \mapsto \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} < m, \rho_\alpha > \; D_\alpha$$

a par la condition $(*)$ une image triviale dans $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Pic}(\mathcal{C}))$ et il lui correspond donc un élément de $T(K)/T(k)$.

Réciproquement, soit $x \in T(K)/T(k)$, induisant un élément de $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Div}(\mathcal{C}))$ et par composition avec $v : \mathrm{Div}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Z}$ un élément $n_{x,v}$ de N pour tout v, nul pour presque tout v. Si $n_{x,v} = 0$ on pose $k_{\alpha,v}$=0 pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$. Sinon $n_{x,v}$ est dans l'intérieur relatif d'un unique cône σ de $\Sigma \setminus \{0\}$, et donc

$$n_{x,v} = \sum_{\alpha \in \sigma} k_{\alpha,v} \, \rho_\alpha$$

avec $k_{\alpha,v} > 0$. On pose $k_{\alpha,v} = 0$ pour $\alpha \notin \sigma$. Finalement on pose pour $\alpha \in \Sigma(1)$

$$D_\alpha = \sum_v k_{\alpha,v} \, v.$$

Par construction (D_α) vérifie la condition $(**)$, et l'élément de $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Div}(\mathcal{C}))$

$$m \mapsto \sum_\alpha < m, \rho_\alpha > \; D_\alpha.$$

n'est autre que $\psi(x)$. Ainsi (D_α) vérifie la condition $(*)$ et les deux applications définies ci-dessus sont inverses l'une de l'autre. La formule pour la hauteur découle de la définition même, ce qui montre le lemme.

Géométriquement ceci peut se voir de la façon suivante. Tout $x \in T(K)$ définit de manière naturelle un k-morphisme

$$\tilde{x} : \mathcal{C} \to X_{\Sigma,k}$$

dont l'image n'est pas incluse dans le complémentaire de l'orbite ouverte. On pose alors, pour $\alpha \in \Sigma(1)$, $D_\alpha = \tilde{x}^*(\mathfrak{D}_\alpha)$. Autrement dit D_α est le diviseur d'intersection de l'image de $\mathcal{C}$ par $\tilde{x}$ avec le diviseur $\mathfrak{D}_\alpha$, et les entiers $k_{\alpha,v}$ définit ci-dessus sont des multiplicités d'intersections. La famille (D_α) ainsi définie n'est autre que $h_\Sigma(x)$. La formule de la page 12 de [21] permet d'ailleurs de retrouver l'expression donnée pour $H_{\Sigma,\phi}(x)$.

Corollaire 1 *Posons*

$$Z\left((T_\alpha)_{\alpha \in \Sigma(1)}\right) = (q-1)^r \sum_{(D_\alpha) \in \mathcal{A}_\Sigma} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)} T_\alpha^{\deg(D_\alpha)} \in \mathbf{Z}[[T_\alpha, \; \alpha \in \Sigma(1)]].$$

Alors pour tout $\phi = (s_\alpha) \in \mathrm{PL}(\Sigma) \otimes \mathbf{C}$ tel que $Z((q^{-s_\alpha}))$ converge on a $Z((q^{-s_\alpha})) = \zeta_\Sigma(\phi)$.

Dans la suite, comme déjà indiqué, nous nous intéressons au cas où $\phi = s\,\phi_0$ avec $s \in \mathbf{C}$ et ϕ_0 est l'élément de $\mathrm{PL}(\Sigma)$ correspondant à $\sum_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$. Nous étudions donc

$$Z(T) = (q-1)^r \sum_{(D_\alpha) \in \mathcal{A}_\Sigma} T^{\,\sum_\alpha \deg(D_\alpha)} \in \mathbf{Z}\,[[T]].$$

4.2 La formule d'inversion de Möbius

Pour nous affranchir de la condition $(**)$, nous allons introduire une formule d'inversion totalement analogue à celle utilisée par Salberger dans [19] pour traiter les conditions de coprimalité évoquées ci-dessus (et qui apparaît déjà dans des cas particulier dans [20] et [14]).

Proposition 1 *Il existe une unique fonction* $\mu_\Sigma : \mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)} \to \boldsymbol{C}$ *vérifiant*

$$\forall\,(D_\alpha) \in \mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)},\ \mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((D_\alpha)) = \sum_{\substack{(E_\alpha)\in \mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)} \\ (E_\alpha)\leq (D_\alpha)}} \mu_\Sigma((E_\alpha)).$$

Cette fonction vérifie en outre les propriétés suivantes.

1) Elle est multiplicative, c'est-à-dire que si (E_α) *et* (D_α) *vérifient*

$$\mathrm{Supp}(D_\alpha) \cap \mathrm{Supp}(E_\alpha) = \emptyset$$

pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$ *alors*

$$\mu_\Sigma((D_\alpha) + (E_\alpha)) = \mu_\Sigma((D_\alpha))\,\mu_\Sigma((E_\alpha)).$$

2) Pour tout $v \in \mathcal{V}_K$ *et tout* $n = (n_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$, $\mu_\Sigma(\,(n_\alpha v)\,)$ *ne dépend que de* n *(et pas de* v*), on note* $\mu_\Sigma^0(n)$ *cette valeur. On a* $\mu_\Sigma^0(n) = 0$ *si* $\sum n_\alpha = 1$ *ou s'il existe* α *tel que* $n_\alpha \geq 2$.

3) Considérons

$$Z_{\mu_\Sigma}\left((T_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}\right) = \sum_{(D_\alpha)\in \mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma((D_\alpha)) \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} T_\alpha^{\deg(D_\alpha)} \in \boldsymbol{Z}[[(T_\alpha)]]$$

Alors pour tout $(s_\alpha) \in \boldsymbol{C}^{\Sigma(1)}$ *du domaine* $\Re(s_\alpha) > \frac{1}{2}$ *la série* $\zeta_{\mu_\Sigma}((s_\alpha)) = Z_{\mu_\Sigma}(\,(q^{-s_\alpha})\,)$ *est absolument convergente et définit donc une fonction holomorphe dans ce domaine. On note pour tout* $n \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$, $|n| = \sum_\alpha n_\alpha$. *Alors* $\zeta_{\mu_\Sigma}(1,\ldots,1)$ *vaut*

$$\prod_{v\in\mathcal{V}_K} \sum_{n\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \frac{\mu_\Sigma^0(n)}{q^{-f_v\,|n|}}$$

et on a pour tout $v \in \mathcal{V}_K$ *la relation*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \frac{\mu_\Sigma^0(n)}{q^{-f_v\,|n|}} = \left(1 - \#\,k_v^{-1}\right)^t \frac{\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v)}{(\# k_v)^r}$$

en particulier $\zeta_{\mu_\Sigma}(1,\ldots,1)$ *est non nul.*

Démonstration La démonstration dans le cas des corps de nombres, que l'on trouve dans [19] ou [16], se transpose quasiment mot à mot, en remplaçant le monoïde des idéaux entiers du corps de nombres considéré par le monoïde des diviseurs effectifs. Nous rappelons les arguments.

Une telle fonction μ_Σ doit vérifier pour tout $(D_\alpha) \in \mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}$

$$\mu_\Sigma((D_\alpha)) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((D_\alpha)) - \sum_{\substack{(E_\alpha)\leq(D_\alpha)\\(E_\alpha)\neq(D_\alpha)}} \mu_\Sigma((E_\alpha))$$

ce qui par récurrence sur $\sum_\alpha \deg(D_\alpha)$ montre l'existence et l'unicité de cette fonction.

Soient (E_α) et (D_α) vérifiant

$$\mathrm{Supp}(D_\alpha) \cap \mathrm{Supp}(E_\alpha) = \emptyset$$

pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$. Il est immédiat que $\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}$ est multiplicative et on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((D_\alpha)+(E_\alpha)) &= \mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((D_\alpha))\,\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((E_\alpha))\\
&= \left(\sum_{(D'_\alpha)\leq(D_\alpha)} \mu_\Sigma((D'_\alpha))\right)\left(\sum_{(E'_\alpha)\leq(E_\alpha)} \mu_\Sigma((E'_\alpha))\right).
\end{aligned}$$

Maintenant l'hypothèse sur (E_α) et (D_α) entraîne que l'application

$$((D'_\alpha),(E'_\alpha)) \to (D'_\alpha + E'_\alpha)$$

établit une bijection entre

$$\{(D'_\alpha),\, D'_\alpha \leq D_\alpha\} \times \{(E'_\alpha),\, E'_\alpha \leq E_\alpha\}$$

et

$$\{(F'_\alpha),\, (F'_\alpha) \leq (D_\alpha + E_\alpha)\}$$

et en raisonnant par récurrence sur $\sum_\alpha \deg(D_\alpha) + \deg(E_\alpha)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((D_\alpha)+(E_\alpha)) &= \mu_\Sigma((D_\alpha))\,\mu_\Sigma((E_\alpha))\\
&\quad + \sum_{\substack{(F'_\alpha)\leq(D_\alpha+E_\alpha)\\(F'_\alpha)\neq(D_\alpha+E_\alpha)}} \mu_\Sigma((F'_\alpha))
\end{aligned}$$

soit par définition de μ_Σ

$$\mu_\Sigma((D_\alpha))\,\mu_\Sigma((E_\alpha)) = \mu_\Sigma((D_\alpha)+(E_\alpha)).$$

ce qui démontre 1).

La première assertion de 2) est immédiate. Soient $v \in \mathcal{V}_K$ et $n = (n_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$. Si il existe α_0 tel que $n_{\alpha_0} \geq 2$, définissons $n' \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$ en posant $n'_{\alpha_0} = n_{\alpha_0} - 1$ et $n'_\alpha = n_\alpha$ si $\alpha \neq \alpha_0$. Il est alors immédiat que $\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((n_\alpha v)) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((n'_\alpha v))$ et donc par définition de μ_Σ que

$\mu_\Sigma((n_\alpha\, v)) = 0$. Si maintenant (n_α) vérifie $n_{\alpha_0} = 1$ pour un certain α_0 et $n_\alpha = 0$ si $\alpha \neq \alpha_0$ alors

$$\mathbf{1}_{\mathcal{A}_\Sigma^{(**)}}((n_\alpha\, v)) = 1 = \mu_\Sigma((n_\alpha\, v)) + \mu_\Sigma((0)_\alpha) = \mu_\Sigma((n_\alpha\, v)) + 1$$

et 2) est démontré.

Par la propriété 1), Z_{μ_Σ} s'écrit comme un produit eulérien

$$Z_{\mu_\Sigma}((T_\alpha)) = \prod_{v \in \mathcal{V}_K} \sum_{n \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^0(n) \prod_\alpha T_\alpha^{-f_v\, n_\alpha}.$$

Par la propriété 2), pour tout $v \in \mathcal{V}_K$ et tout $(s_\alpha) \in \mathbf{C}^{\,\Sigma(1)}$ du domaine $\Re(s_\alpha) > \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{n \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^0(n) \prod_\alpha q^{\,-f_v\, n_\alpha\, s_\alpha} = 1 + \mathcal{O}_{f_v \to \infty}\left(q^{\,-\eta\, f_v}\right)$$

avec $\eta > 1$ ce qui au vu du domaine de convergence de $\zeta_{\mathcal{C}}$ montre 3), exception faite de la dernière assertion.

Celle-ci se voit simplement à l'aide des torseurs universels (nous renvoyons à [19] pour plus de détails sur cette notion, ainsi que pour la détermination des torseurs universels au-dessus d'une variété torique déployée). Munissons l'espace affine $\mathbf{A}_{k_v}^{\Sigma(1)}$ de coordonnées $(X_\alpha)_{\alpha \in \Sigma(1)}$. Soit $\mathcal{T}_{\Sigma,k_v}$ l'ouvert de $\mathbf{A}_{k_v}^{\Sigma(1)}$ complémentaire de l'intersection des fermés d'équations

$$\prod_{\alpha \notin \sigma} X_\alpha = 0$$

pour σ décrivant Σ. Il existe alors un morphisme naturel

$$\pi\ :\ \mathcal{T}_{\Sigma,k_v} \to X_{\Sigma,k_v}$$

ainsi qu'une action naturelle de $\mathbf{G}_{m,k_v}^t$ sur $\mathcal{T}_{\Sigma,k_v}$ qui fait de $\mathcal{T}_{\Sigma,k_v}$ un torseur universel au-dessus de X_{Σ,k_v}. On en déduit

$$\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v) = \#\,X_{\Sigma,k_v}(k_v) = \frac{\#\{\,(x_\alpha) \in k_v^{\Sigma(1)},\ \exists\sigma \in \Sigma,\ \prod_{\alpha\notin\sigma} x_\alpha \neq 0\}}{(\#k_v - 1)^t}.$$

Notons

$$A(\Sigma) = \{\,n \in \{0,1\}^{\,\Sigma(1)},\ \exists\,\sigma \in \Sigma,\ \forall\alpha \notin \sigma,\ n_\alpha = 0\}.$$

Par définition de μ_Σ^0 on a alors

$$\forall\, n \in \{0,1\}^{\,\Sigma(1)},\ \mathbf{1}_{A(\Sigma)}(n) = \sum_{n' \leq n} \mu_\Sigma^0(n').$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & \#\left\{\,(x_\alpha) \in k_v^{\Sigma(1)},\ \exists\sigma \in \Sigma,\ \textstyle\prod_{\alpha\notin\sigma} x_\alpha \neq 0\right\} \\ = \ & \textstyle\sum_{n \in \{0,1\}^{\,\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^0(n)\,\#\,\{\,(x_\alpha) \in k_v^{\Sigma(1)},\ x_\alpha = 0 \text{ si } n_\alpha = 1\,\} \\ = \ & \textstyle\sum_{n \in \{0,1\}^{\,\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^0(n)\,(\#k_v)^{\,\#\Sigma(1) - |n|} \end{aligned}$$

ce qui montre la formule annoncée. □

Dans la suite, pour alléger les notations, nous noterons μ la fonction μ_Σ (étant entendu que l'éventail Σ est fixé une fois pour toutes).

On peut se demander si de telles fonctions ζ_μ se prolongent méromorphiquement à $\mathbf{C}^{\Sigma(1)}$, voire s'expriment comme une fraction rationnelle en les q^{-s_α}. Ceci est vrai si X_Σ est un espace projectif ou une surface de Hirzebruch. Cependant un cas particulier d'un théorème de Kurokawa ([11]) montre que déjà pour le plan projectif éclaté en deux points il n'existe même pas de prolongement méromorphe. En effet dans ce cas la restriction de ζ_μ à la droite $(s,\ldots,s)$ s'exprime dans le domaine de convergence absolue comme le produit eulérien

$$\prod_{v\in\mathcal{V}_K}\left(1-q^{-f_v\,s}\right)^3\left(1+3\,q^{-f_v\,s}+q^{-2\,f_v\,s}\right).$$

Comme le polynôme $(1-T)^3\,(1+3\,T+T^2)$ n'a pas toutes ses racines de module 1, un tel produit eulérien n'admet pas de prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$.

4.3 Le calcul de la fonction zêta

4.3.1 Encore une réécriture

Nous avons par la proposition 1

$$\begin{aligned}
\frac{Z(T)}{(q-1)^r} &= \sum_{(D_\alpha)\,\in\,\mathcal{A}_\Sigma} T^{\,\sum_\alpha \deg(D_\alpha)}\\
&= \sum_{(D_\alpha)\,\in\,\mathcal{A}_\Sigma^{(*)}}\ \sum_{\substack{(E_\alpha)\,\in\,\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}\\ (E_\alpha)\,\leq\,(D_\alpha)}} \mu((E_\alpha)))\quad T^{\,\sum_\alpha \deg(D_\alpha)}\\
&= \sum_{\substack{(D_\alpha)\,\in\,\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}\\ (E_\alpha)\,\in\,\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}\\ (D_\alpha+E_\alpha)\,\in\,\mathcal{A}_\Sigma^{(*)}}} \mu((E_\alpha))\ \ T^{\,\sum_\alpha \deg(D_\alpha+E_\alpha)}.
\end{aligned}$$

Maintenant la condition $(D_\alpha+E_\alpha)\,\in\,\mathcal{A}_\Sigma^{(*)}$, s'écrit , en utilisant les notations introduites à la section 2.2,

$$\forall\,\beta\in\sigma_0,\ \ D_\beta+E_\beta\,\sim\,\sum_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}\,(D_\alpha+E_\alpha).$$

et pour un $(D_\alpha+E_\alpha)$ vérifiant cette condition, on a (d'après la fin de la section 2.2)

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(D_\alpha+E_\alpha) &= \sum_{\alpha\notin\sigma_0}\deg(D_\alpha+E_\alpha)+\sum_{\beta\in\sigma_0}\sum_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}\,\deg(D_\alpha+E_\alpha)\\
&= \sum_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha\deg(D_\alpha+E_\alpha).
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\frac{Z(T)}{(q-1)^r} = \sum_{\substack{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}\\ (D_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}}} \mu((E_\alpha)) \prod_{\beta\in\sigma_0} \#\left|\sum_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}(D_\alpha+E_\alpha)-E_\beta\right| \times T^{\sum_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha \deg(D_\alpha+E_\alpha)}.$$

Nous considérons d'abord le cas où $\mathcal{C}=\mathbf{P}^1$. Ceci n'est pas essentiel pour le calcul mais permet de mieux comprendre son déroulement dans le cas général.

On a alors

$$\#|D| = \#\{E\geq 0,\, \deg(E)=\deg(D)\} = \frac{q^{1+\deg(D)}-1}{q-1}$$

si $\deg(D)\geq 0$ (et bien sûr $\#|D|=0$ si $\deg(D)<0$).

Considérons le terme de la fonction zêta dépendant d'un (E_α) fixé. Il vaut

$$\begin{aligned}
&\sum_{(D_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}} \prod_{\beta\in\sigma_0} \#\left|\sum_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}(D_\alpha+E_\alpha)-E_\beta\right| T^{\sum_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha \deg(D_\alpha+E_\alpha)}\\
&= \sum_{\substack{d_\alpha\geq 0\\ \sum n_{\beta,\alpha}(d_\alpha+\deg(E_\alpha))\geq \deg(E_\beta)}} \prod_{\alpha\notin\sigma_0} \#\{D\geq 0, \deg(D)=d_\alpha\}\\
&\qquad \times \prod_{\beta\in\sigma_0} \frac{q^{1+\sum n_{\beta,\alpha}(d_\alpha+\deg(E_\alpha))-\deg(E_\beta)}-1}{q-1}\\
&\qquad \times T^{\sum_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha (d_\alpha+\deg(E_\alpha))}\\
&= \frac{1}{(q-1)^{r+t}} \sum_{\substack{d_\alpha\geq \deg(E_\alpha)\\ \sum n_{\beta,\alpha} d_\alpha\geq \deg(E_\beta)}} q^{-\sum_{\alpha\in\Sigma(1)} \deg(E_\alpha)} \prod_{\alpha\notin\sigma_0} \left(q^{1+d_\alpha}-q^{\deg(E_\alpha)}\right)\\
&\qquad \times \prod_{\beta\in\sigma_0} \left(q^{1+\sum n_{\beta,\alpha} d_\alpha}-q^{\deg(E_\beta)}\right)\\
&\qquad \times T^{\sum_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha d_\alpha}.
\end{aligned}$$

Remarquons que les inéquations $d_\alpha\geq 0$ et $\sum n_{\beta,\alpha} d_\alpha\geq 0$ sont celles définissant, dans la base duale de la base $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0}$, le dual du cône effectif de X_Σ.

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est de genre $g \geq 1$, nous nous ramenons à une expression sensiblement de la même forme que ci-dessus en écrivant

$$Z(T) = \sum_{\substack{(i_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0} \\ 1\leq i_\alpha\leq h}} Z_{(i_\alpha)}(T)$$

où $Z_{(i_\alpha)}(T)$ se définit comme $Z(T)$ mais en restreignant la sommation aux (D_α) vérifiant

$$D_\alpha - \deg(D_\alpha)\,\mathfrak{d}^1 \sim \mathfrak{d}^0_{i_\alpha}.$$

pour tout α. Il se trouve que chacun des h^t termes $Z_{(i_\alpha)}(T)$ apporte une contribution identique à la partie principale du pôle de la fonction zêta des hauteurs. On peut rapprocher ceci du résultat obtenu par Schanuel dans [20]. Schanuel étudie le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur $\mathbf{P}^n(L)$, où L est un corps de nombres. A chaque élément de $\mathbf{P}^n(L)$ est associée un élément de $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_L)$, d'où une partition de $\mathbf{P}^n(L)$ en classes, et le comportement asymptotique s'obtient en sommant les contributions (identiques) de chacune de ces classes. Une telle paramétrisation des points rationnels a été généralisée par Robbiani et Salberger au cas d'une variété torique déployée sur L, en utilisant la notion de torseur universel (cf. [18, § 2.1]). Ici de manière similaire nous pourrions obtenir une interprétation de la paramétrisation des points rationnels par des éléments de $\mathrm{Pic}(\mathcal{C})^t$ en terme de ces torseurs universels.

Désormais et jusqu'à la section 4.3.4 nous supposons fixé un (i_α) et nous écrivons f_α pour la fonction f_{i_α}. Par abus de notation, nous désignerons par $Z(T)$ la fonction $Z_{(i_\alpha)}$.

Là encore nous fixons (E_α) et regardons le terme correspondant de $Z(T)$. Il vaut

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{(D_\alpha)_{\alpha\notin\sigma_0} \\ D_\alpha - \deg(D_\alpha)\,\mathfrak{d}^1 \sim \mathfrak{d}^0_{i_\alpha}}} \prod_{\beta\in\sigma_0} \# \left| \sum_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}(D_\alpha + E_\alpha) - E_\beta \right| T^{\sum_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha \deg(D_\alpha+E_\alpha)} \\
= &\sum_{\substack{d_\alpha\geq 0 \\ \sum n_{\beta,\alpha}(d_\alpha+\deg(E_\alpha))\geq\deg(E_\beta)}} \prod_{\alpha\notin\sigma_0} \#\{\, D\geq 0,\ D - d_\alpha\,\mathfrak{d}^1 \sim \mathfrak{d}^0_{i_\alpha}\} \\
&\qquad\times \prod_{\beta\in\sigma_0} \# \left| \sum_{\alpha\notin\sigma_0} n_{\beta,\alpha}(\mathfrak{d}^0_{i_\alpha} + d_\alpha\,\mathfrak{d}^1 + E_\alpha) - E_\beta \right| \\
&\qquad\times T^{\sum_{\alpha\notin\sigma_0} -\omega_\alpha(d_\alpha+\deg(E_\alpha))}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(q-1)^{(r+t)}} \sum_{\substack{d_\alpha \geq 0 \\ \sum n_{\beta,\alpha}(d_\alpha + \deg(E_\alpha)) \geq \deg(E_\beta)}} \prod_{\alpha \notin \sigma_0} \left(q^{f_\alpha(d_\alpha)} - 1\right)$$

$$\times \prod_{\beta \in \sigma_0} \left(q^{f_\beta(\sum n_{\beta,\alpha}(d_\alpha + \deg(E_\alpha)) - \deg(E_\beta))} - 1\right)$$

$$\times \; T^{\sum_{\alpha \notin \sigma_0} - \omega_\alpha (d_\alpha + \deg(E_\alpha))}$$

$$= \frac{1}{(q-1)^{(r+t)}} \sum_{\substack{y \in \mathrm{Pic}(X_\Sigma)^\vee \\ \forall \alpha \in \Sigma(1),\, <y,\mathcal{D}_\alpha> \geq \deg(E_\alpha)}} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \left(q^{f_\alpha(<y,\mathcal{D}_\alpha> - \deg(E_\alpha))} - 1\right) \quad T^{<y,-\omega>}$$

où, pour $\beta \in \sigma_0$, f_β désigne l'application définie pour $n \geq 0$ par

$$f_\beta(n) \;=\; l\left(n\,\mathfrak{d}^1 + \sum_{\alpha \notin \sigma_0} n_{\beta,\alpha}(\mathfrak{d}^0_{i_\alpha} + \mathfrak{d}^0_{j_\alpha}) - \mathfrak{d}^0_{j_\beta}\right),$$

j_α désignant, pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$, l'unique élément de $\{1, \ldots, h\}$ vérifiant

$$E_\alpha \sim \mathfrak{d}^0_{j_\alpha} + \deg(E_\alpha)\,\mathfrak{d}^1.$$

Nous poserons aussi $f_\beta(n) = 1 + n$ pour $n < 0$. Naturellement f_β dépend de (E_α) mais nous n'indiquons pas cette dépendance qui ne ferait qu'alourdir la notation, et qu'il n'est pas essentiel de retenir puisque pour mener à bien notre calcul nous nous servirons ensuite simplement du fait que $f_\beta(n) = 1 - g + n$ pour tout $n > 2\,g - 2$ et

$$f_\beta(n) \leq 1 + n$$

pour $n \leq 2\,g - 2$ (cf l'énoncé des lemmes 3 et 4).

Dans le cas $g = 0$ nous poserons $f_\alpha(n) = 1 + n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout $\alpha \in \Sigma(1)$ ce qui permet d'effectuer le calcul simultanément pour les cas $g = 0$ et $g \geq 1$ (il ne nuirait sans doute pas à la compréhension du calcul de traiter d'abord le cas $g = 0$ séparément, mais ceci allongerait un peu trop le présent texte).

4.3.2 Méthode utilisée

Nous aurons ainsi à estimer des séries du type suivant. Soit C un cône polyédral rationnel de $\mathcal{N} \otimes \mathbf{R}$ où $\mathcal{N}$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini. Soit n_0 un élément de l'intérieur de C. Nous posons

$$Z_{C,n_0}(T) = \sum_{y \in C^\vee \cap \mathcal{N}^\vee} T^{<y,n_0>} \;\in\; \mathbf{Z}[[T]].$$

Dans [15], Peyre utilise cette série pour une définition alternative de la constante α^* et remarque qu'elle apparaît comme facteur local des fonctions L définies par Draxl dans [7]. Ayant normalisé la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{N}^\vee \otimes \mathbf{R}$ par le réseau $\mathcal{N}^\vee$, nous notons χ_C la fonction caractéristique de C, c'est à dire

$$\chi_C(s) = \int_{C^\vee} e^{-<s,y>} dy,$$

cette expression ayant un sens pour tout élément $s \in \mathcal{N} \otimes \mathbf{C}$ qui est dans l'intérieur de $C + i\mathcal{N} \otimes \mathbf{R}$. Nous avons alors ([15, 3.1])

Proposition 2 *La série $Z_{C,n_0}(q^{-s})$ converge absolument pour tout $s \in \boldsymbol{C}$ du domaine $\Re(s) > 0$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\boldsymbol{C}$ avec un pôle d'ordre $rg(\mathcal{N})$ en $s = 0$. La partie principale de ce pôle est*

$$\ln(q)^{-\mathrm{rg}(\mathcal{N})}\, \chi_C(n_0).$$

L'idée est d'écrire $C^\vee$ comme le support d'un éventail régulier Δ, ce qui est toujours possible et correspond au problème de la résolution équivariante des singularités pour les variétés toriques. Alors $C^\vee \cap \mathcal{N}^\vee$ est la réunion disjointe des $\mathrm{intrel}(\delta) \cap \mathcal{N}^\vee$ pour $\delta \in \Delta$ ($\mathrm{intrel}(\delta)$ désignant l'intérieur relatif de δ). Si δ est un cône de Δ, de générateurs $m_1, \ldots, m_k$, on a

$$\sum_{y \in \sum_{i=1,\ldots,k} \mathbf{N}_{>0}\, m_i} T^{<y,n_0>} = \prod_{i=1,\ldots,k} \left((1 - T^{<m_i,n_0>})^{-1} - 1\right).$$

La contribution au pôle d'ordre $\mathrm{rg}(\mathcal{N})$ provient donc des cônes maximaux de Δ. Si on note $\delta_1, \ldots, \delta_l$ ces cônes maximaux et, pour $j = 1, \ldots, l$, $m_{j,1}, \ldots, m_{j,k_j}$ ses générateurs, la partie principale du pôle est

$$\ln(q)^{-\mathrm{rg}(\mathcal{N})} \sum_{j=1,\ldots,l} \prod_{i=1,\ldots,k_j} < m_{j,i}\,,\, n_0 >^{-1}$$

et en découpant l'intégrale sur $C^\vee$ en intégrales sur les δ_i, on obtient que

$$\chi_C(n_0) = \sum_{j=1}^{l} \prod_{i=1}^{k_j} < m_{j,i}\,,\, n_0 >^{-1}$$

d'où le résultat.

Nous terminons cette sous-section par quelques remarques heuristiques qui permettent de bien appréhender la calcul de la fonction zêta qui va suivre. Ce qu'on peut retenir de la démonstration précédente est : "lorsqu'on somme une expression du type $q^{-s<y,n_0>}$ sur des points y contenus dans un espace de dimension donnée, on obtient une fraction rationnelle en q^{-s} avec un pôle d'ordre au plus cette dimension en $s = 0$". Ainsi les séries du type

$$Z_{C,n_0,(d_j),(k_j)}(q^{-s}) = \sum_{\substack{y \in C^\vee \cap \mathcal{N}^\vee \\ \forall j \in J, <y,d_j> \geq k_j}} q^{-s<y,n_0>}$$

où $(d_j)_{j\in J}$ est une famille finie d'éléments de C et $(k_j)_{j\in J}$ une famille d'entiers positifs, ont le même terme dominant que celui de $Z_{C,n_0}(q^{-s})$ en $s=0$, car une telle série est obtenue à partir de Z_{C,n_0} en retirant les termes correspondants aux y situés sur un nombre fini d'hyperplans, et ces termes ne fournissent donc en $s=0$ que des pôles d'ordre strictement inférieur à celui de Z_{C,n_0}. Notre fonction zêta des hauteurs s'obtient alors (du moins dans le cas $g=0$) en sommant de telles séries, et nous aurons besoin de quelques renseignements sur le terme d'erreur pour assurer la convergence de cette sommation.

Dans le cas $g\geq 1$ nous n'obtenons pas exactement des séries de ce type puisque nous n'avons pas d'expression explicite des $f_\alpha(n)$ pour n petit. Cependant "remplacer" $f_\alpha(n)$ par $1-g+n$ pour n petit ne modifie là encore la série que sur un nombre fini d'hyperplans et le terme dominant reste inchangé. Là encore il nous faudra un contrôle du terme d'erreur, rendu notamment possible par le fait que nous disposons d'une majoration explicite pour $f_\alpha(n)$.

4.3.3 Le calcul

Nous décomposons $Z(T)$ en une somme de plusieurs termes et nous estimons le comportement de chaque terme séparément. Nous écrivons d'abord

$$Z(T)=(q-1)^{-t}\sum_{A\subset\Sigma(1)}(-1)^{\#A}\,Z_A(T)$$

avec, pour $A\subset\Sigma(1)$,

$$Z_A(T)=\sum_{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}}\mu((E_\alpha))\,Z_{A,(E_\alpha)}(T),$$

$Z_{A,(E_\alpha)}(T)$ désignant

$$\sum_{\substack{y\in\operatorname{Pic}(X_\Sigma)^\vee\\ <y,\mathcal{D}_\alpha>\,\geq\,\deg(E_\alpha)}} q^{\sum_{\alpha\notin A}f_\alpha(<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))}\,T^{<y,-\omega>}$$

(c'est-à-dire que nous développons le produit $\prod_{\alpha\in\Sigma(1)}(q^{\cdots}-1)$).

Nous écrivons alors $C_{\text{eff}}(X_\Sigma)^\vee$ comme le support d'un éventail régulier Δ, dont l'ensemble des rayons est noté $\Delta(1)$. Pour $i\in\Delta(1)$ nous notons m_i le générateur du rayon i. Pour tout cône δ de Δ nous notons également

$$I_\delta=\{i\in\Delta(1),\,i\in\delta\}$$

l'ensemble de ses rayons (ainsi $I_{\{0\}}=\emptyset$). Pour toute partie I de $\Delta(1)$ nous noterons

$$C(I)=\sum_{i\in I}\mathbf{N}_{>0}\,m_i$$

(avec la convention $C(\emptyset)=\{0\}$) de sorte que $C(I_\delta)$ est l'ensemble des points du réseau $\operatorname{Pic}(X_\Sigma)^\vee$ contenu dans l'intérieur relatif du cône δ. Par la suite, nous ne considérerons que des $C(I)$ avec I défini comme un sous-ensemble d'un I_δ, et donc un tel $C(I)$ est encore un $C(I_{\delta'})$ pour un certain cône δ'.

Nous allons traiter séparément la contribution de chacun des intérieurs relatifs des cônes de Δ, nous écrivons

$$Z_A(T) = \sum_{\delta\in\Delta} Z_{A,\delta}(T)$$

avec

$$Z_{A,\delta}(T) = \sum_{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}} \mu((E_\alpha))\, Z_{A,\delta,(E_\alpha)}(T),$$

$Z_{A,\delta,(E_\alpha)}(T)$ désignant

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\alpha\in\Sigma(1),\ <y,\mathcal{D}_\alpha>\geq \deg(E_\alpha)}} q^{\sum_{\alpha\notin A} f_\alpha(<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))}\, T^{<y,-\omega>}.$$

Le cas $A=\emptyset$ Ce cas correspond au terme principal de notre fonction zêta (c'est-à-dire que les $Z_A(T)$ avec $A\neq\emptyset$ ne fourniront que des pôles d'ordre $< t$). En fait seules les $Z_{\emptyset,\delta}$ où δ est de dimension maximale donneront des pôles d'ordre t, ce qui correspond à la remarque heuristique formulée plus haut.

Soit $\delta\in\Delta$. Nous décomposons encore

$$Z_{\emptyset,\delta}(T) = \sum_{J\subset\Sigma(1)} (-1)^{\# J}\, Z_{\emptyset,\delta,J}(T)$$

avec

$$Z_{\emptyset,\delta,J}(T) = \sum_{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}} \mu((E_\alpha))\, Z_{\emptyset,\delta,J,(E_\alpha)}(T),$$

$Z_{\emptyset,\delta,J,(E_\alpha)}(T)$ désignant

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\alpha\in J,<y,\mathcal{D}_\alpha> < \deg(E_\alpha)}} q^{\sum_{\alpha\in\Sigma(1)} f_\alpha(<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))}\, T^{<y,-\omega>}.$$

Les termes $Z_{\emptyset,\sigma,J}(T)$ avec $J\neq\emptyset$ sont les “termes d'erreur” qui apparaissent quand on approxime la sommation

$$\sum_{\substack{y\in C(I_\delta)\\ \forall\alpha\in\Sigma(1),<y,\mathcal{D}_\alpha>\geq\deg(E_\alpha)}}$$

par la sommation

$$\sum_{y\in C(I_\delta)}$$

qui correspond au cas $J=\emptyset$. Le terme dominant de $Z_{\emptyset,\delta}(q^{-s})$ en $s=1$ sera le même que celui de $Z_{\emptyset,\delta,\emptyset}(q^{-s})$, cette dernière série admettant une expression explicite à l'approximation $f_\alpha(n)=1-g+n$ près.

Plus précisément nous avons

Proposition 3 *La série $Z_{\emptyset,\delta,J}(q^{-s})$ converge absolument pour $\Re(s)>1$ et se prolonge en une fonction méromorphe à $\Re(s)>1-\varepsilon$ qui a en $s=1$ un pôle d'ordre* $\dim(\delta)$ *si $J=\emptyset$, et d'ordre inférieur à* $\dim(\delta)$ *si $J\neq\emptyset$. Cet ordre est de plus strictement inférieur si $J\neq\emptyset$ et* $\dim(\delta)=t$. *La fonction méromorphe définie sur $\Re(s)>1$ par*

$$f(s)=\sum_{\substack{\delta\in\Delta\\ \dim(\delta)=t}} Z_{\emptyset,\delta,\emptyset}(q^{-s})$$

a un pôle d'ordre t en $s=1$ de partie principale

$$\alpha^*(X_\Sigma)\,q^{\#\Sigma(1)\,(1-g)}\,\ln(q)^{-t}\prod_{v\in\mathcal{V}_K}\left(1-(\#\,k_v)^{-1}\right)^t\frac{\#\,X_\Sigma(k_v)}{(\#k_v)^r}.$$

Nous déduisons cette proposition du lemme suivant, qui montre en particulier comment contrôler le terme d'erreur apparaissant quand on approxime $f_\alpha(n)$ par $1-g+n$ pour n petit.

Lemme 3 *Soit (E_α) un élément de $Div^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}$. Soient δ un cône de Δ, J une partie (éventuellement vide) de $\Sigma(1)$. Nous supposons données pour tout $\alpha\in\Sigma(1)$ des fonctions*

$$\phi_\alpha\,:\,\boldsymbol{Z}\,\rightarrow\,\boldsymbol{Z}$$

vérifiant $\phi_\alpha(n)=1-g+n$ si $n>2\,g$ et $\phi_\alpha(n)\leq 1+n$ si $n\leq 2\,g$.

Nous supposons également donnés pour $\alpha\in J$ des entiers k_α vérifiant

$$0\leq k_\alpha\leq 2\,g+\deg(E_\alpha).$$

Alors la série

$$\sum_{\substack{y\,\in\,C(I_\delta)\\ \forall\alpha\in J,\,<y,\mathcal{D}_\alpha>\,\leq\,k_\alpha}} q^{\,\sum_{\alpha\in\Sigma(1)}\,\phi_\alpha\,(\,<y,\mathcal{D}_\alpha>-\,\deg(E_\alpha)\,)}\;T^{<y,-\omega>}$$

se décompose en une somme

$$\sum_{I'\subset I_\delta}\left(\prod_{i\,\in\,I'}\left[\left(1-(q\,T)^{\,-<m_i,\omega>}\right)^{-1}-1\right]\right)\,\times\,P_{I'}(T)$$

où $P_{I'}$ est un polynôme à coefficients positifs. Il existe en outre un $\varepsilon>0$ et un $\eta>\frac{1}{2}$, ne dépendant que de Σ et de Δ, tels que pour tout réel $\theta>1-\varepsilon$ on a la majoration

$$P_{I'}\left(q^{-\theta}\right)\;\leq\;C\,\mathrm{Sup}_{\alpha\in\Sigma(1)}\,\left[2\,g+\deg(E_\alpha)\right]^{\#\Sigma(1)}\;q^{\,-\eta\sum_{\alpha\in\Sigma(1)}\,\deg(E_\alpha)}$$

où C est une constante ne dépendant que de $\#\Sigma(1)$ et de g et qu'on pourrait rendre explicite. Par ailleurs si δ est de dimension maximale, alors si J est non vide on a $P_{I_\delta}=0$ et si J est vide, P_{I_δ} est constant, égal à

$$q^{\#\Sigma(1)\,(1-g)-\sum_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)}.$$

Démonstration Afin d'alléger un peu l'écriture, nous adoptons les notations suivantes. Pour δ cône de Δ, $J\subset\Sigma(1)$ et $(k_\alpha)\in\mathbf{N}^J$, nous désignerons l'ensemble

$$\{y\,\in\,C(I_\delta),\;\forall\alpha\,\in\,J,<y,\mathcal{D}_\alpha>\leq k_\alpha\}$$

par $C(I_\delta)_{J,(k_\alpha)}$ et, pour $K\subset\Sigma(1)\setminus J$, l'ensemble

$$\left\{y\,\in\,C(I_\delta)_{J,(k_\alpha)},\;\forall\alpha\,\in\,K,<y,\mathcal{D}_\alpha>\leq 2\,g+\deg(E_\alpha)\right\}$$

par $C(I_\delta)_{J,(k_\alpha),K}$.

La série à évaluer est alors égale à

$$Z_1+\sum_{\substack{K\subset\Sigma(1)\setminus J\\ K\neq\emptyset}}(-1)^{\#K}\,Z_{2,K}-\sum_{\substack{K\subset\Sigma(1)\setminus J\\ K\neq\emptyset}}(-1)^{\#K}\,Z_{3,K}$$

avec

$$Z_1=\sum_{y\,\in\,C(I_\delta)_{J,\,(k_\alpha)}}q^{\,\sum_{\alpha\notin J}(1-g+<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))+\sum_{\alpha\,\in\,J}\phi_\alpha\,(<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))}\;T^{<y,-\omega>},$$

$$Z_{2,K}=\sum_{y\,\in\,C(I_\delta)_{J,\,(k_\alpha),\,K}}q^{\,\sum_{\alpha\notin J}(1-g+<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))+\sum_{\alpha\,\in\,J}\phi_\alpha\,(<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))}\;T^{<y,-\omega>}$$

et

$$Z_{3,K}=\sum_{y\,\in\,C(I_\delta)_{J,\,(k_\alpha),\,K}}q^{\,\sum_{\alpha\in\Sigma(1)}\phi_\alpha\,(<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))}\;T^{<y,-\omega>}.$$

Les termes $Z_{2,K}$ et $Z_{3,K}$ sont les termes d'erreur qu'on obtient en faisant l'approximation $\phi_\alpha(n)=1-g+n$ pour $\alpha\notin J$. Dans l'application que nous faisons du lemme, si $g=0$ on a en fait $\phi_\alpha(n)=1+n$ et ces termes d'erreurs n'apparaissent pas. En effectuant une récurrence descendante sur $\#\,J$, on se ramène à traiter uniquement le terme Z_1.

Si $J=\emptyset$, ce terme s'évalue immédiatement, il vaut

$$q^{\#\Sigma(1)\,(1-g)-\sum_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)}\left(\prod_{i\,\in\,I_\delta}\left[\left(1-(q\,T)^{-<m_i,\omega>}\right)^{-1}-1\right]\right).$$

Si $J\neq\emptyset$, nous posons

$$I_{J,1}=\{\,i\,\in\,I_\delta,\,\forall\,\alpha\,\in\,J,<m_i,\mathcal{D}_\alpha>=0\}$$

et $I_{J,2} = I_\delta \setminus I_{J,1}$. En particulier on a $C(I_{J,1})_{J,(k_\alpha)} = C(I_{J,1})$.

L'expression pour Z_1 se décompose alors en un produit

$$P(T) \times \sum_{y_1 \in C(I_{J,1})} q^{<y_1, \sum_{\alpha \notin J} \mathcal{D}_\alpha>} T^{<y_1,-\omega>}$$

où on désigne par $P(T)$ l'expression

$$\sum_{y_2 \in C(I_{J,2})_{J,(k_\alpha)}} q^{\sum_{\alpha \notin J}(1-g+<y_2,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))+\sum_{\alpha \in J} \phi_\alpha(<y_2,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))} T^{<y_2,-\omega>}.$$

Si $y_1 \in C(I_{J,1})$, on a

$$< y_1, \sum_{\alpha \notin J} \mathcal{D}_\alpha > = < y_1, -\omega >$$

et le deuxième facteur est égal à

$$\prod_{i \in I_{J,1}} \left[\left(1 - (q\,T)^{-<m_i,\omega>}\right)^{-1} - 1 \right].$$

Passons au facteur $P(T)$. Soit y_2 un élément de $C(I_{J,2})_{J,(k_\alpha)}$, que l'on écrit

$$y_2 = \sum_{i \in I_{J,2}} k_i\, m_i$$

avec les k_i dans $\mathbf{N}_{>0}$.

Par définition de $I_{J,2}$, pour tout i de $I_{J,2}$, il existe α dans J vérifiant $< mi, \mathcal{D}_\alpha > \geq 1$. Comme y_2 vérifie

$$\forall \alpha \in J, < y_2, \mathcal{D}_\alpha > \leq k_\alpha$$

on a

$$k_i \leq \operatorname{Sup}_{\alpha \in J}(k_\alpha).$$

Ainsi $C(I_{J,2})_{J,(k_\alpha)}$ est fini (et $P(T)$ est un polynôme en T), en fait son cardinal est majoré par

$$\operatorname{Sup}_{\alpha \in J}(k_\alpha)^{\# I_{J,2}}$$

ce nombre étant lui-même majoré par

$$\operatorname{Sup}_{\alpha \in \Sigma(1)} [2\,g + \deg(E_\alpha)]^{\#\Sigma(1)}.$$

Par ailleurs un y_2 de $C(I_{J,2})_{J,(k_\alpha)}$ vérifie

$$0 \leq < y_2, -\omega > \leq m \operatorname{Sup}_{\alpha \in \Sigma(1)}(2\,g + \deg(E_\alpha))$$

où

$$m = \#\,\Sigma(1) \sup_{i \in \Delta(1)} (< m_i, -\omega >).$$

On a donc pour tout réel θ

$$
\begin{aligned}
& P\left(q^{-\theta}\right) \\
\leq \quad & \sum_{y_2 \in C(I_{J,2})_{J,\,(k_\alpha)}} q^{\,\sum_{\alpha \notin J} (1-g+<y_2,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha)) + \sum_{\alpha \in J} \phi_\alpha\,(<y_2,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))} \quad q^{-\theta\,<y_2,-\omega>} \\
\leq \quad & \sum_{y_2 \in C(I_{J,2})_{J,\,(k_\alpha)}} q^{\,\sum_{\alpha \notin J} (1-g+<y_2,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha)) + \sum_{\alpha \in J} 1+<y_2,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha)} \quad q^{-\theta\,<y_2,-\omega>} \\
\leq \quad & \sum_{y_2 \in C(I_{J,2})_{J,\,(k_\alpha)}} q^{\#\,\Sigma(1)}\, q^{-\sum_{\alpha\in\Sigma(1)} \deg(E_\alpha)}\, q^{(1-\theta)\,<y_2,-\omega>}
\end{aligned}
$$

soit

$$
\begin{aligned}
P(q^{-\theta}) \quad \leq \quad & \mathrm{Sup}_{\alpha\,\in\,\Sigma(1)}\,[2\,g + \deg(E_\alpha)]^{\#\Sigma(1)}\, q^{\#\,\Sigma(1)}\, q^{-\sum_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)} \\
& \times \mathrm{Sup}\left(1, q^{\,m\,(1-\theta)\,(2\,g + \sum_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha))}\right).
\end{aligned}
$$

Il suffit donc de choisir $\varepsilon < \frac{1}{2\,m}$ pour avoir la majoration annoncée.

Notons enfin que si δ est un cône de dimension maximale, les $(m_i)_{i\,\in\,I_\delta}$ forment une $\mathbf{Z}$-base de $\mathrm{Pic}(X_\Sigma)^\vee$, et si $J \neq \emptyset$ on ne peut avoir $I_{J,2} = \emptyset$. Ceci joint au calcul pour $J = \emptyset$ montre les deux dernières assertions du lemme. $\Box$

Comme il résulte immédiatement de la proposition 1 que la série

$$
\sum_{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}} |\mu((E_\alpha))|\,(2\,g + \sup(\deg(E_\alpha)))^{\#\,\Sigma(1)}\, q^{-\eta\,\sum_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)}
$$

est convergente si $\eta > \frac{1}{2}$, le lemme 3 entraîne la proposition 3. La partie principale du pôle d'ordre t en $s = 1$ vaut d'après la démonstration de la dernière assertion du lemme 3 et la proposition 2

$$
\begin{aligned}
& q^{\#\,\Sigma(1)\,(1-g)} \left(\sum_{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}} \mu((E_\alpha))\, q^{-\sum_{\alpha\in\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)} \right) \quad \ln(q)^{-t}\ \chi_{(C_{\mathrm{eff}})^\vee}(-\omega) \\
= \quad & q^{\#\,\Sigma(1)\,(1-g)}\, Z_{\mu_\Sigma}(q^{-1},\ldots,q^{-1})\ \ln(q)^{-t}\,\chi_{(C_{\mathrm{eff}})^\vee}(-\omega) \\
= \quad & q^{\#\,\Sigma(1)\,(1-g)}\, \alpha^*(X_\Sigma)\ \ln(q)^{-t} \prod_{v\in\mathcal{V}_K} \left(1-(\#\,k_v)^{-1}\right)^t\, \frac{\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v)}{(\#k_v)^r}.
\end{aligned}
$$

La proposition 3 est démontrée. $\Box$

Le cas $A \neq \emptyset$ Comme il a déjà été dit, dans ce cas $Z_A(T)$ ne fournit que des pôles d'ordre $< t$ et ne contribue pas au terme principal de la fonction zêta des hauteurs. Pour comprendre pourquoi, et se faire une idée des calculs qui vont suivre, considérons la série

$$
\sum_{y\,\in\,C(I_\delta)} q^{<y,\mathcal{L}_2>}\, q^{-s\,<y,\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2>}
$$

où $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont deux éléments du cône effectif, tels que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ est dans l'intérieur du cône effectif, et $\mathcal{L}_1$ est non nul. Soit

$$I_1 = \{i \in I_\delta, < m_i, \mathcal{L}_1 >= 0\}$$

et

$$I_2 = I_\delta \setminus I_1.$$

Si δ est de dimension maximale, I_2 n'est pas vide. La série se réécrit comme un produit

$$\sum_{y \in C(I_1)} q^{(1-s) <y,\mathcal{L}>} \times \sum_{y \in C(I_2)} q^{(1-s) <y,\mathcal{L}_2> - s <y,\mathcal{L}_1>}.$$

La deuxième série converge absolument pour $\Re(s) \geq 1$ et la première fournit un pôle d'ordre $\# I_1$ en $s = 1$ (en particulier si δ est de dimension maximale (donc égale à t), le pôle obtenu est d'ordre au plus $t - 1$). De plus nous retenons que "les m_i qui donnent des pôles en $s = 1$ sont les m_i tels que $< m_i, \mathcal{L}_1 >= 0$", dans le cas qui nous intéresse ce sont les m_i tels que

$$< m_i, \sum_{\alpha \in A} \mathcal{D}_\alpha >= 0$$

soit

$$\forall \alpha \in A, < m_i, \mathcal{D}_\alpha >= 0.$$

Ceci explique en particulier la définition des ensembles $I_{A,J,1}$ et $I_{A,J,2}$ introduits plus loin.

Nous utilisons une décomposition analogue à celle du cas $A = \emptyset$, mais légèrement différente.

$$Z_{A,\delta}(T) = \sum_{J \subset \Sigma(1) \setminus A} (-1)^{\# J} Z_{A,\delta,J}(T)$$

avec

$$Z_{A,\delta,J}(T) = \sum_{(E_\alpha)_{\alpha \in \Sigma(1)}} \mu((E_\alpha)) Z_{A,\delta,J,(E_\alpha)}(T)$$

où on désigne par $Z_{A,\delta,J,(E_\alpha)}(T)$ l'expression

$$\sum_{\substack{y \in C(I_\delta) \\ \forall \alpha \in A, <y,\mathcal{D}_\alpha> \geq \deg(E_\alpha) \\ \forall \alpha \in J, <y,\mathcal{D}_\alpha> < \deg(E_\alpha)}} q^{\sum_{\alpha \notin A} f_\alpha(<y,\mathcal{D}_\alpha> - \deg(E_\alpha))} T^{<y,-\omega>}.$$

Notons que les m_i vérifiant $\forall \alpha \in A, < m_i, \mathcal{D}_\alpha >= 0$ ne contribuent pas à la première condition sur y, cette condition peut donc être "oubliée" pour trouver l'ordre du pôle, cependant nous verrons ensuite que cette condition assure la convergence de la sommation sur les (E_α).

Nous montrons

Proposition 4 *Pour $J \subset \Sigma(1) \setminus A$, la série $Z_{A,\delta,J}(q^{-s})$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\Re(s) > 1 - \varepsilon$ qui a un pôle en $s = 1$ d'ordre inférieur à $\dim(\delta)$. Cet ordre est de plus strictement inférieur si $\dim(\delta) = t$.*

Nous déduisons cette proposition du lemme suivant, d'énoncé et de démonstration très similaires à ceux du lemme 3.

Lemme 4 *Soit* (E_α) *un élément de* $\mathrm{Div}^+(\mathcal{C})^{\Sigma(1)}$. *Soient* δ *un cône de* Δ, J *une partie (éventuellement vide) de* $\Sigma(1) \setminus A$. *Nous supposons données pour tout* $\alpha \in \Sigma(1)$ *des fonctions*

$$\phi_\alpha \,:\, \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$$

vérifiant $\phi_\alpha(n) = 1 - g + n$ *si* $n > 2\,g$ *et* $\phi_\alpha(n) \leq 1 + n$ *si* $n \leq 2\,g$.

Nous supposons également donnés pour $\alpha \in J$ *des entiers* k_α *vérifiant*

$$0 \leq k_\alpha \leq 2\,g + \deg(E_\alpha).$$

Alors la série

$$\sum_{\substack{y \in C(I_\delta) \\ \forall\, \alpha \in A,\, <y, \mathcal{D}_\alpha> \geq \deg(E_\alpha) \\ \forall \alpha \in J,\, <y,\mathcal{D}_\alpha> \leq k_\alpha}} q^{\sum_{\alpha \notin A} \phi_\alpha\,(<y,\mathcal{D}_\alpha> - \deg(E_\alpha))}\; T^{<y,-\omega>}$$

se décompose en une somme

$$\sum_{I' \subset I_\delta} \left(\prod_{i \in I'} \left[\left(1 - (q\,T)^{-<m_i,\omega>} \right)^{-1} - 1 \right] \right) \times R_{I'}(T)$$

où $R_{I'}$ *est une série entière en* T *à coefficients positifs. Il existe en outre un* $\varepsilon > 0$ *et un* $\eta > \frac{1}{2}$ *ne dépendant que de* Σ *et de* Δ *tels que pour tout réel* $\theta > 1 - \varepsilon$ *on a la majoration*

$$R_{I'}\left(q^{-\theta}\right) \;\leq\; C\, \left(1 + \mathrm{Sup}_{\alpha \in \Sigma(1)}(\deg(E_\alpha))\right)^{\#\Sigma(1)}\; q^{-\eta \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} \deg(E_\alpha)}$$

où C *est une constante ne dépendant que de* g *et de* $\#\Sigma(1)$ *et que l'on pourrait rendre explicite. Par ailleurs si* δ *est un cône de dimension maximale, on a* $R_{I_\delta} = 0$.

Démonstration Pour δ cône de Δ, $J \subset \Sigma(1) \setminus A$ et $(k_\alpha) \in \mathbf{N}^J$, nous reprenons la notation $C(I_\delta)_{J,(k_\alpha)}$ introduite au début de la preuve du lemme 3. Par ailleurs nous désignerons l'ensemble

$$\left\{ y \,\in\, C(I_\delta)_{J,(k_\alpha)},\, \forall \alpha \,\in\, A,\, <y, \mathcal{D}_\alpha> \geq \deg(E_\alpha) \right\}$$

par $C(I_\delta)^A_{J,(k_\alpha)}$ et, pour $K \subset \Sigma(1) \setminus (J \cup A)$, l'ensemble

$$\left\{ y \,\in\, C(I_\delta)^A_{J,(k_\alpha)},\; \forall \alpha \,\in\, K,\, <y, \mathcal{D}_\alpha> \leq 2\,g + \deg(E_\alpha) \right\}$$

par $C(I_\delta)^A_{J,(k_\alpha),K}$.

La série à évaluer est alors égale à

$$Z_1 + \sum_{\substack{K \subset \Sigma(1) \setminus (J \cup A) \\ K \neq \emptyset}} (-1)^{\#K}\, Z_{2,K} - \sum_{\substack{K \subset \Sigma(1) \setminus (J \cup A) \\ K \neq \emptyset}} (-1)^{\#K}\, Z_{3,K}$$

avec

$$Z_1 = \sum_{y \in C(I_\delta)^A_{J,\,(k_\alpha)}} q^{\,\sum_{\alpha\notin J\cup A}(1-g+<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))+\sum_{\alpha\,\in\,J}\,\phi_\alpha\,(<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))}\ T^{<y,-\omega>},$$

$$Z_{2,K} = \sum_{y \in C(I_\delta)^A_{J,\,(k_\alpha),\,K}} q^{\,\sum_{\alpha\notin J\cup A}(1-g+<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))+\sum_{\alpha\,\in\,J}\,\phi_\alpha\,(<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))}\ T^{<y,-\omega>}$$

et

$$Z_{3,K} = \sum_{y \in C(I_\delta)^A_{J,\,(k_\alpha),\,K}} q^{\,\sum_{\alpha\notin A}\,\phi_\alpha\,(<y,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))}\ T^{<y,-\omega>}.$$

Si $g=0$ seul le terme Z_1 apparaît. Si $g\geq 1$ on raisonne par récurrence sur $\#J$. Il suffit donc de traiter le terme Z_1. Pour cela nous posons

$$I_{A,J,1} = \{\, i\,\in\, I_\delta,\, \forall\,\alpha\,\in\, A\cup J,\, <m_i,\mathcal{D}_\alpha>=0\}$$

et $I_{A,J,2} = I_\delta \setminus I_{A,J,1}$. Ainsi tout élément de $C(I_\delta)^A_{J,\,(k_\alpha)}$ s'écrit de manière unique y_1+y_2 avec

$$y_1\,\in\, C(I_{A,J,1})$$

et

$$y_2\,\in \coprod_{\substack{(h_\alpha)\,\in\,\mathbf{N}^A\\ h_\alpha\,\geq\,\deg(E_\alpha)}} \left\{ y\,\in\, C(I_{A,J,2})_{J,\,(k_\alpha)},\, <y,\mathcal{D}_\alpha\ >=\ h_\alpha\right\}.$$

L'expression considérée se décompose donc en un produit

$$R(T)\times \sum_{y_1\,\in\, C(I_{A,J,1})} q^{<y_1\,,\,\sum_{\alpha\notin A\cup J}\mathcal{D}_\alpha>}\ T^{<y_1,-\omega>}$$

avec

$$R(T) = \sum_{\substack{h_\alpha\,\in\,\mathbf{N}^A\\ h_\alpha\geq\deg(E_\alpha)}} T^{\,\sum h_\alpha}\, R_{(h_\alpha)}(T),$$

$R_{(h_\alpha)}(T)$ désignant l'expression

$$\sum_{\substack{y_2\,\in\, C(I_{A,J,2})_{J,\,(k_\alpha)}\\ \forall\,\alpha\,\in\, A,\, <y,\mathcal{D}_\alpha>=h_\alpha}} q^{\,\sum_{\alpha\notin A\cup J}(1-g+<y_2,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))+\sum_{\alpha\,\in\,J}\,\phi_\alpha\,(<y_2,\mathcal{D}_\alpha>-\deg(E_\alpha))}$$

$$\times\, T^{<y_2,-\omega>}.$$

Le deuxième facteur est égal à

$$\prod_{i\,\in\, I_{A,J,1}} \left[\left(1-(q\,T)^{-<m_i,\omega>}\right)^{-1}-1\right].$$

De la même façon que dans la preuve du lemme 3, on voit facilement il n'y a qu'un nombre fini d'éléments y_2 de $C(I_{A,J,2})_{J,(k_\alpha)}$ vérifiant $< y_2, \mathcal{D}_\alpha >= h_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$, et ce nombre est majoré par

$$\mathrm{Sup}\left(\mathrm{Sup}_{\alpha \in A}(h_\alpha),\, \mathrm{Sup}_{\alpha \notin A}(2\,g + \deg(E_\alpha))\right)^{\#\Sigma(1)},$$

ou encore par

$$\left(2\,g + \sum_{\alpha \in A} h_\alpha + \sum_{\alpha \notin A} \deg(E_\alpha)\right)^{\#\Sigma(1)}$$

et un tel y_2 vérifie

$$0 \;\leq < y_2, -\omega > \leq\; m \left(2\,g + \sum_{\alpha \in A} h_\alpha + \sum_{\alpha \notin A} \deg(E_\alpha)\right)$$

où l'on rappelle que

$$m = \#\,\Sigma(1) \sup_{i \in \Delta(1)} (< m_i, -\omega >).$$

Le deuxième facteur est donc une série entière à coefficients positifs en T notée $R(T)$. Pour tout réel θ, $R(q^{-\theta})$ peut être majoré par l'expression

$$q^{\#\,\Sigma(1) - \sum_{\alpha \notin A} \deg(E_\alpha)} \sum_{\substack{h_\alpha \in \mathbf{N}^A \\ h_\alpha \geq \deg(E_\alpha)}} q^{-\theta \sum h_\alpha} \left(2\,g + \sum_{\alpha \in A} h_\alpha + \sum_{\alpha \notin A} \deg(E_\alpha)\right)^{\#\,\Sigma(1)}$$
$$\times \mathrm{Sup}\left(1, q^{m\,(1-\theta)\left(2\,g + \sum_{\alpha \in A} h_\alpha + \sum_{\alpha \notin A} \deg(E_\alpha)\right)}\right).$$

Si on choisit $\varepsilon < \frac{1}{2\,(m+1)}$, pour tout $\theta > 1 - \varepsilon$ l'expression ci-dessus est majorée par

$$q^{\#\,\Sigma(1) - \sum_{\alpha \notin A} \deg(E_\alpha)} \sum_{(h_\alpha) \in \mathbf{N}^A} \left(2\,g + \sum_{\alpha \in A} h_\alpha + \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} \deg(E_\alpha)\right)^{\#\,\Sigma(1)}$$
$$\times q^{2\,g + (\,(m+1)\,\varepsilon - 1)\sum_{\alpha \in A}(h_\alpha + \deg(E_\alpha)) + m\,\varepsilon \sum_{\alpha \notin A} \deg(E_\alpha)}$$

$$\leq C\, \left(1 + \mathrm{Sup}_{\alpha \in \Sigma(1)}(\deg(E_\alpha))\right)^{\#\Sigma(1)}\; q^{(-1 + m\,\varepsilon)\,\sum_{\alpha \notin A} \deg(E_\alpha) + ((m+1)\varepsilon - 1)\sum_{\alpha \in A} \deg(E_\alpha)}$$

avec $(m+1)\,\varepsilon - 1 \;<\; -\frac{1}{2}$, $-1 + m\,\varepsilon \;<\; -\frac{1}{2}$ et C est une constante ne dépendant que de g, $\#\Sigma(1)$ et m.

Notons enfin que comme A est non vide, si $I = I_\delta$ pour un cône δ maximal $I_{A,J,2}$ ne peut être vide. Ceci montre la dernière assertion du lemme. $\square$

D'après la proposition 1, la série

$$\sum_{(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(1)}} |\mu((E_\alpha))| \ \left(1+\mathrm{Sup}_{\alpha\,\in\,\Sigma(1)}(\deg(E_\alpha))\right)^{\#\Sigma(1)} \ q^{-\eta\,\sum_{\alpha\,\in\,\Sigma(1)}\deg(E_\alpha)}$$

converge si $\eta>\frac{1}{2}$ et du lemme 4 on déduit la proposition 4. $\square$

4.3.4 Conclusion

Des propositions 3 et 4 on déduit le théorème annoncé. La partie principale du pôle vaut en effet (rappelons que $\dim(X_\Sigma)=r=\#\,\Sigma(1)-t$)

$$\begin{aligned}
& \alpha^*(X_\Sigma)\,h^t\,q^{\#\Sigma(1)\,(1-g)}\,\ln(q)^{-t}\,(q-1)^{-t}\prod_{v\in\mathcal{V}_K}\left(1-(\#\,k_v)^{-1}\right)^t\,\frac{\#\,\mathfrak{X}_\Sigma(k_v)}{(\#k_v)^r}\\
= \quad & \alpha^*(X_\Sigma)\left(\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_{\mathcal{C}}(s)\right)^t\,q^{(1-g)\,\dim(X_\Sigma)}\prod_{v\in\mathcal{V}_K}\left(1-(\#\,k_v)^{-1}\right)^p\,\frac{\#\,X_\Sigma(k_v)}{(\#k_v)^r}\\
= \quad & \alpha^*(X_\Sigma)\,\tau_{H_{\Sigma,\phi_0}}(X_\Sigma),
\end{aligned}$$

le facteur h^t provenant du fait que le terme principal obtenu dans la proposition 3 était celui d'une seule fonction $Z_{(i_\alpha)}(q^{-s})$. Ceci clôt la démonstration.

Remerciements

Les remarques et suggestions d'Emmanuel Peyre ont toujours constitué une aide précieuse pour la réalisation de ce travail. Je l'en remercie chaleureusement.

Références

[1] *V.V. Batyrev, Y. Manin,* Sur le nombre de points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques, Math. Ann. **286** (1990), 27-43.

[2] *V.V. Batyrev, Y. Tschinkel,* Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori, Int. Math. Res. Notices **12** (1995), 591-635.

[3] *V.V. Batyrev, Y. Tschinkel,* Manin's conjecture for toric varieties, J. of Alg. Geom. **7** (1998), 15-53.

[4] *V.V. Batyrev, Y. Tschinkel,* Rational points on some Fano cubic bundles, C.R. Acad. Sci. Paris **323** (1996), 41-46.

[5] *D. Bourqui,* Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel, J. Number Theory **94** (2002), 343-358.

[6] *R. De la Bretèche,* Compter des points d'une variété torique, J. Number Theory **87** (2001), 315-331.

[7] *P.K.J. Draxl,* L-Funktionen K-algebraischer Tori, J. Number Theory **3** (1971), 444-467.

[8] *G. Ewald,* Combinatorial convexity and algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics **168**, Springer (1996).

[9] *J. Franke, Y. Manin, Y. Tschinkel,* Rational points of bounded height on Fano varieties, Invent. Math. **95** (1989), 421-435.

[10] *W. Fulton,* Introduction to toric varieties, Annals of Mathematics Studies **31**, Princeton University Press (1993).

[11] *N. Kurokawa,* On the meromorphy of Euler products I, Proc. London Math. Soc. **53** (1986), 1-47.

[12] *S. Lang,* Fundamentals of diophantine geometry, Springer-Verlag (1983).

[13] *T. Oda,* Convex bodies and algebraic geometry, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **15**, Springer-Verlag (1988).

[14] *E. Peyre,* Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano, Duke Math. Journal **79** (1995), 101-218.

[15] *E. Peyre,* Points de hauteur bornée sur les variétés de drapeaux en caractéristique finie. Prépublication.

[16] *E. Peyre,* Etude asymptotique des points de hauteur bornée. Notes de l'école d'été sur les variétés toriques, Grenoble, juin 2000.

[17] *E. Peyre,* Points de hauteur bornée et géométrie des variétés, d'après Y. Manin et al., Séminaire Bourbaki **891**, juin 2001.

[18] *M. Robbiani,* On the arithmetic of isotropic Del Pezzo surfaces of degree six, J. reine angew. Math. **503** (1998), 1-45.

[19] *P. Salberger,* Tamagawa measure on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties, Astérisque **251** (1998), 91-258.

[20] *S.H. Schanuel,* Heights in number fields, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433-449.

[21] *J.P. Serre,* Lectures on the Mordell-Weil theorem, translated and edited by M. Brown, Aspect of Mathematics, Vieweg, (1989).

[22] *J.H. Silverman,* The theory of height functions *in* Arithmetic Geometry, G. Cornell & J.H. Silverman, ed., Springer-Verlag (1986), 151-166

[23] *D. Wan,* Heights and zeta functions in function fields *in* The arithmetic of function fields, D. Goss, D.R. Hayes & M.I. Rosen, ed., Mathematical Research Institute Publications, Ohio State University, de Gruyter (1992), 455-463.

[24] *A. Weil,* Basic number theory, Springer-Verlag (1967).

D. Bourqui
Institut Fourier
UMR 5582
BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex
France
Mail : bourqui@ujf-grenoble.fr