Université de Rennes | 2022–2023
L1- AG2 | CC5 (**1 heure**)

Les documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés. Les réponses et calculs devront être correctement justifiés.

MERCI DE RÉPONDRE DIRECTEMENT SUR LE SUJET ET DE N'UTILISER D'AUTRES FEUILLES DE COPIES QU'EN CAS DE MANQUE DE PLACE.

Nom : ____ **Prénom :** ____ **Groupe :** ____

Exercice 1.

(a) Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ x - y - 2z \\ 2z \end{pmatrix}$$

Montrer que f est linéaire.

(b) Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer $f(e_1)$ et $f(f(e_1))$.

(c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$, ainsi que la dimension de chacun de ces espaces.

(d) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$? (on pourra utiliser la question b)

(e) Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère désormais la matrice

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ t & -t & -2 \\ 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

et l'application linéaire associée $f_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto M_t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f_t))$ et $\dim(\mathrm{Im}(f_t))$ (on discutera en fonction des valeurs de t les valeurs de ces deux entiers).

(f) (plus difficile) Pour quelles valeurs de t a-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_t) \oplus \mathrm{Im}(f_t)$?

Réponse exercice 1 :

(a) Posant $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ on voit qu'on a pour tout $X \in \mathbb{R}^3$ la relation $f(X) = A{\cdot}X$. D'après la proposition 4.29, f est donc bien une application linéaire. Remarquons que la matrice de f est A.

(b) Par définition de f, on a

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1\times 1 - 1\times 0 + 2\times 0 \\ 1\times 1 - 1\times 0 - 2\times 0 \\ 0\times 1 + 0\times 0 + 2\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$f(f(e_1)) = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\times 1 - 1\times 1 + 2\times 0\\ 1\times 1 - 1\times 1 - 2\times 0\\ 0\times 1 + 0\times 0 + 2\times 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

(c) En utilisant la proposition 5.16 et la remarque faite dans la réponse à la question (**a**), on voit que $\mathrm{Im}(f)$ est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes (notés dans l'ordre C_1, C_2, C_3) de la matrice A introduite à la question (**a**). On constate que $C_2 = -C_1$, ce qui entraîne qu'on a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{C_1, C_3\}$. En particulier $\{C_1, C_3\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Or C_1 et C_3 ne sont pas colinéaires (par exemple parce que C_1 n'est pas nul et a sa troisième composante nulle, alors que la troisième composante de C_3 ne l'est pas), donc la famille de 2 vecteurs $\{C_1, C_3\}$ est une famille libre. Comme $\{C_1, C_3\}$ est une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et on en déduit aussitôt que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{card}(\{C_1, C_3\}) = 2$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Comme $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on a donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. Pour exhiber une base de $\mathrm{Ker}(f)$, il suffit de trouver un vecteur *non nul* de $\mathrm{Ker}(f)$. Or d'après la question (**b**), le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ (qui n'est autre que C_1) est un tel vecteur. Ainsi $\{C_1\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(d) D'après la question (**b**), on a $C_1 = f(e_1)$ et $C_1 \in \mathrm{Ker}(f))$. Comme $C_1 = f(e_1)$, on a $C_1 \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi $C_1 \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ et comme C_1 est non nul, on a $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Par définition (définition 5.9), $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ne sont donc pas des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

(e) Soit $t \in \mathbb{R}$. Notant dans l'ordre $C_{1,t}, C_{2,t}, C_{3,t}$ les vecteurs colonnes de la matrice M_t, on voit en raisonnant comme dans la question (**c**) qu'on a $\mathrm{Im}(f_t) = \mathrm{Vect}\{C_{1,t}, C_{2,t}, C_{3,t}\}$, d'où, comme $C_{2,t} = -C_{1,t}$, $\mathrm{Im}(f_t) = \mathrm{Vect}\{C_{1,t}, C_{3,t}\}$.

Si $t \neq -1$, les vecteurs $C_{1,t}$ et $C_{3,t}$ sont visiblement non colinéaires (par exemple parce que $C_{1,t}$ n'est pas nul et a sa troisième composante nulle, alors que la troisième composante de $C_{3,t}$ ne l'est pas). En raisonnant comme à la question (**c**), on voit donc que $\{C_{1,t}, C_{3,t}\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f_t)$ et que $\dim(\mathrm{Im}(f_t)) = 2$.

Si $t = -1$, on voit que $C_{3,-1} = 2 \cdot C_{1,-1}$, donc $\mathrm{Im}(f_{-1}) = \mathrm{Vect}\{C_{1,-1}\}$. Comme $C_{1,-1}$ est non nul, on en déduit que $\{C_{1,-1}\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f_{-1})$ et que $\dim(\mathrm{Im}(f_{-1})) = 1$.

En utilisant ce qui précède et (de façon similaire à la question (**c**)) le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f_t)) = 3 - 1 = 2$ si $t = -1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f_t)) = 3 - 2 = 1$ sinon.

(f) Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Im}(f_t)) + \dim(\mathrm{Ker}(f_t)).$$

D'après le théorème 6.12, on a donc l'équivalence

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f_t) \oplus \mathrm{Ker}(f_t) \iff \mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f_t) + \mathrm{Ker}(f_t).$$

On a déterminé lors de la résolution de la question précédente une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f_t)$ (en fait une base, mais génératrice suffira pour le raisonnement qui suit), notée $\mathcal{G}_t$. On va maintenant déterminer une famille génératrice $\mathcal{G}'_t$ (en fait une base, mais encore une fois génératrice suffira pour le raisonnement qui suit) de $\mathrm{Ker}(f_t)$. Cela permettra de conclure en utilisant la propriété

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f_t) + \mathrm{Ker}(f_t) \iff \mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\, \mathcal{G}_t \cup \mathcal{G}'_t \iff \mathrm{rg}(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{G}'_t) = 3.$$

Supposons d'abord $t = -1$. Pour tout $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a

$$X \in \operatorname{Ker}(f_{-1}) \iff M_{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & +2z & = & 0 \\ -x & +y & -2z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

On a alors

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & +2z & = & 0 \\ -x & +y & -2z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & +2z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \iff x = y - 2z.$$

On en déduit

$$\operatorname{Ker}(f_{-1}) = \left\{ \begin{pmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi $\mathcal{G}'_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(f_{-1})$. À la question précédente, on avait déterminé que $\mathcal{G}_{-1} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ était une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f_{-1})$. Pour calculer le rang de $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}'_{-1}$, on peut donc échelonner la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ on voit que cette matrice est ligne-équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est échelonnée (non réduite) avec 3 pivots. Ainsi $\operatorname{rg}(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}'_{-1}) = 3$ et $\operatorname{Ker}(f_{-1})$ et $\operatorname{Im}(f_{-1})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Supposons à présent $t \neq -1$. On a vu à la question précédente que $\dim(\operatorname{Ker}(f_t)) = 1$. Comme on vérifie facilement que le vecteur non nul $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un élément de $\operatorname{Ker}(f_t)$, on en déduit, en raisonnant comme à la question (**c**), que $\mathcal{G}'_t := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice (en fait une base) de $\operatorname{Ker}(f_t)$. À la question précédente, on avait déterminé que

$$\mathcal{G}_t := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ t+1 \end{pmatrix} \right\}$$

était une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f_t)$. Pour calculer le rang de $\mathcal{G}_t \cup \mathcal{G}'_t$ on peut donc échelonner la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ t & -2 & 1 \\ 0 & t+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effectuant successivement les opération $L_2 \leftarrow L_2 - tL_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2$ et $L_3 \to 2L_3$, on voit que cette matrice est ligne-équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2-2t & 1-t \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}.$$

Comme $t \neq -1$, on a $-2-2t \neq 0$, et donc cette dernière matrice est échelonnée et a 2 pivots si $t = 1$ et 3 pivots sinon. Ainsi (en se rappelant qu'on a supposé $t \neq -1$), on a $\mathrm{rg}(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{G}'_t) = 3$ si et seulement si $t \neq 1$.

Au final, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ker}(f_t)$ et $\mathrm{Im}(f_t)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $t \neq 1$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $f\colon E \to E$ une application linéaire et $\{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs de E (où n est un entier strictement positif).

(**a**) Rappeler la définition de $\mathrm{Im}(f)$.

(**b**) Rappeler la définition de $\mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_n\}$.

(**c**) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels ; donner une autre expression de

$$f(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n)$$

(aucune justification n'est demandée)

(**d**) On suppose qu'on a $E = \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_n\}$. Montrer l'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$.

Réponse exercice 2 : voir le cours (NB : la démonstration de la propriété de la question (**d**) a été donnée en cours)