Université de Rennes 2022–2023
L1- AG2 CC4 (**1 heure**)

Les documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés. Les réponses et calculs devront être correctement justifiés.

MERCI DE RÉPONDRE DIRECTEMENT SUR LE SUJET ET DE N'UTILISER D'AUTRES FEUILLES DE COPIES QU'EN CAS DE MANQUE DE PLACE.

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Exercice 1. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les trois vecteurs

$$\overrightarrow{v_1} = (1,1,1,1), \quad \overrightarrow{v_2} = (1,-1,2,2), \quad \overrightarrow{v_3} = (3,1,4,5)$$

En d'autres termes, on a : $F = \text{Vect}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$.

(a) Déterminer une équation du sous-espace vectoriel F.

(b) La famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est-elle libre ? Si oui, la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Réponse exercice 1 :

(a) Soit $\overrightarrow{v} = (x,y,z,t)$ dans $\mathbb{R}^4$. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans F si et seulement s'il est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ c'est à dire si et seulement si : $\exists(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \alpha_3\overrightarrow{v_3}$. Autrement dit, $\overrightarrow{v}$ est dans F si et seulement si le système d'inconnue $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ et de matrice augmentée $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & x \\ 1 & -1 & 1 & | & y \\ 1 & 2 & 4 & | & z \\ 1 & 2 & 5 & | & t \end{pmatrix}$ est compatible.

On applique alors l'algorithme de Gauß. Les matrices suivantes sont ligne-équivalentes à la matrice A (les opérations élémentaires effectuées à chaque étape étant indiquées à gauche) :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & x \\ 0 & -2 & -2 & | & y-x \\ 0 & 1 & 1 & | & z-x \\ 0 & 1 & 2 & | & t-x \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & x \\ 0 & 1 & 1 & | & z-x \\ 0 & 0 & 0 & | & y+2z-3x \\ 0 & 0 & 1 & | & t-z \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & x \\ 0 & 1 & 1 & | & z-x \\ 0 & 0 & 1 & | & t-z \\ 0 & 0 & 0 & | & y+2z-3x \end{pmatrix}$$

Le système asocié à cette forme échelonnée n'est compatible que si et seulement si $y + 2z - 3x = 0$ (la dernière ligne est sinon une ligne de contradiction). $3x = y + 2z$ est finalement une équation de F. Autrement dit, on a $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 3x = y + 2z\}$.

(b) Les calculs de la question précédente montrent que la matrice dont les colonnes sont $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ est ligne-équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette dernière matrice comportant trois pivots, la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est de rang 3 et est donc libre (car son rang est égal à son cardinal).

Cette famille peut donc se compléter en une base. Dans la pratique, en notant $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0,0)$, on a, d'après la réponse à la question **1)(a)**, $\overrightarrow{e_1} \notin F = \text{Vect}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ (car $3 \neq 0 + 2 \times 0$) donc $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{e_1}$ forment une famille libre. Cette famille comportant en outre quatre vecteurs en dimension 4, c'est finalement une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. Soit E l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit E de l'addition et de la multiplication externe habituelles des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. E est ainsi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Les ensembles F et G suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ? Justifier les réponses.

$$F = \{f \in E,\ f(1) = f'(1)\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E,\ f(1)f'(1) = 0\}$$

Réponse exercice 2 :
F est clairement une partie non vide de l'espace vectoriel E (la fonction nulle, dont la dérivée est elle même, est dans F).
Soit $(f, g) \in F^2$.

$$\begin{aligned} (f+g)(1) &= f(1) + g(1) && \text{par définition de la somme dans } E \\ &= f'(1) + g'(1) && \text{car } f \text{ et } g \text{ sont dans } F \\ &= (f' + g')(1) && \text{par définition de la somme dans } E \\ &= (f+g)'(1) && \text{par propriété de dérivation d'une somme} \end{aligned}$$

donc $f + g \in F$.
Soit $(f, \lambda) \in F \times \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (\lambda.f)(1) &= \lambda f(1) && \text{par définition du produit par un scalaire dans } E \\ &= \lambda f'(1) && \text{car } f \text{ est dans } F \\ &= (\lambda.f')(1) && \text{par définition du produit par un scalaire dans } E \\ &= (\lambda.f)'(1) && \text{par propriété de la dérivation} \end{aligned}$$

donc $\lambda.f \in F$.
F est donc non vide, stable par addition et stable par multiplication par un scalaire. C'est finalement un sous-espace vectoriel de E.

Les fonctions $f : x \mapsto x - 1$ et $g : x \mapsto 1$ sont des éléments de G (car $f(1) = 0$ et $g'(1) = 0$). La fonction $f + g : x \mapsto x$ n'est par contre pas dans G (car $(f+g)(1).(f+g)'(1) = 1.1 \neq 0$). G n'est donc pas stable par addition : ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 3.

1) Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Quand dit-on qu'une application φ de E dans F est linéaire ? (Donner la définition.)

2) E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de la variable réelle. On note φ l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à toute fonction f de E associe le réel $f(1)$.
On note également $\ker(\varphi) = \{f \in E, \varphi(f) = 0\}$ et on admet que $\ker(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E.
(**a**) Montrer que φ est linéaire.
(**b**) Donner deux exemples de fonctions qui sont dans $\ker(\varphi)$.
(**c**) On note H l'ensemble des fonctions constantes. On admet que H est un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que $\ker(\varphi)$ et H sont supplémentaires dans E.
On pourra, pour une fonction f de E donnée, considérer la fonction $g = f - f(1)$.

Réponse exercice 3 :
1) Voir le cours.
2) (a) Soit $(f, g, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(f + \lambda.g) &= (f + \lambda.g)(1) && \text{par définition de } \varphi \\
&= f(1) + \lambda g(1) && \text{par définition des opérations dans } E \\
&= \varphi(f) + \lambda\varphi(g) && \text{par définition de } \varphi
\end{aligned}$$

φ est donc bien linéaire.
2) (b) Outre la fonction nulle, la fonction $f : x \mapsto x - 1$ est aussi dans $\ker(\varphi)$ (elle vérifie $f(1) = 0$). Bien d'autres exemples sont possibles.
2) (c) • Comme le vecteur nul est dans tous les sous-espaces vectoriels, on a $\{0_E\} \subset \ker(\varphi) \cap H$. Réciproquement, toute fonction de $\ker(\varphi) \cap H$ est constante et s'annule en 1 et est donc la fonction nulle. On a montré : $\ker(\varphi) \cap H = \{0_E\}$.
• Comme la somme de deux sous-espaces de E est un sous-espace de E, on a $\ker(\varphi) + H \subset E$. Soit réciproquement $f \in E$. Posons $g = f - f(1)$ (où $f(1)$ désigne ici la fonction constante égale au réel $f(1)$). g est alors dans E et vérifie $g(1) = f(1) - f(1) = 0$ donc $g \in \ker(\varphi)$. De plus, $f(1) \in H$ et $f = g + f(1)$ donc $f \in \ker(\varphi) + H$. On a montré $\ker(\varphi) + H = E$.
• On peut alors conclure que $\ker(\varphi)$ et H sont supplémentaires dans E : $\ker(\varphi) \oplus H = E$.