Les documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés. Les réponses et calculs devront être correctement justifiés.

MERCI DE RÉPONDRE DIRECTEMENT SUR LE SUJET ET DE N'UTILISER D'AUTRES FEUILLES DE COPIES QU'EN CAS DE MANQUE DE PLACE.

Nom : | **Prénom :** | **Groupe :**

Exercice 1.

(a) Soit $n \geq 1$ un entier. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(b) Les sous-ensembles E_1, E_2 de $\mathbb{R}^3$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$$E_1 = \{(\lambda, 2\lambda, \lambda - 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad E_2 = \{(\lambda - \mu, \lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Réponse exercice 1 : (a) Voir le cours (définition 4.3).

(b) Le sous-ensemble E_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ puisqu'il ne contient pas le vecteur $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ (*cf.* définition 4.3). En effet si $0_{\mathbb{R}^3}$ appartient à E_1, alors il doit exister $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(\lambda, 2\lambda, \lambda - 1) = (0,0,0)$. On aurait donc simultanément $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ ce qui est absurde.
Le sous-ensemble E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: il s'agit du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1,1,2)$ et $(-1,2,1)$. (*cf.* théorème 4.7)

Exercice 2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On considère les vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1,1,0,-1), \quad v_2 = (2,3,-1,\lambda), \quad v_3 = (-1,\lambda,\mu,3)$$

et le sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ qu'ils engendrent.

(a) Déterminer le rang de (v_1, v_2, v_3) en fonction de λ et μ.

(b) Déterminer les valeurs de λ et μ pour lesquelles la famille (v_1, v_2, v_3) est liée. On s'assurera en particulier au final qu'il existe exactement deux valeurs du couple (λ, μ) pour lesquelles cette famille est liée.

(c) Déterminer la dimension de E en fonction de λ et μ.

Réponse exercice 2 : Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & \lambda \\ -1 & \lambda & \mu & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

obtenue en disposant les vecteurs v_1, v_2, v_3 par lignes. *Remarque :* on pouvait aussi raisonner sur la matrice obtenue en disposant les vecteurs v_1, v_2, v_3 par colonnes.

(a) Calculons le rang de la famille (v_1, v_2, v_3) ce qui revient à calculer le rang de la matrice M. En utilisant l'algorithme de Gauß, on obtient que les matrices suivantes sont ligne-équivalentes à la matrice M (les opérations élémentaires effectuées à chaque étape étant indiquées à gauche) :

$$\begin{array}{c} \mathsf{L}_2 := \mathsf{L}_2 - 2\mathsf{L}_1 \\ \mathsf{L}_3 := \mathsf{L}_3 + \mathsf{L}_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda+1 & \mu & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}_3 := \mathsf{L}_3 - (\lambda+1)\mathsf{L}_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \mu+\lambda+1 & -\lambda(\lambda+3) \end{pmatrix}.$$

Le rang étant conservé par opérations élémentaires sur les lignes, on obtient que la matrice M, et donc la famille (v_1, v_2, v_3), est de rang 2 lorsque les réels λ, μ vérifient les relations

$$\begin{cases} \mu + \lambda + 1 &= 0 \\ -\lambda(\lambda + 3) &= 0. \end{cases}$$

Ainsi la la famille (v_1, v_2, v_3) est de rang 2 lorsque $(\lambda, \mu) = (0, -1)$ ou $(\lambda, \mu) = (-3, 2)$. Dans tous les autres cas la matrice M, et donc la famille (v_1, v_2, v_3), est de rang 3.

(b) D'après le théorème 4.11, les vecteurs v_1, v_2, v_3 forment une famille liée si et seulement si la famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas de rang 3. Le résultat de la question précédente montre donc que la famille (v_1, v_2, v_3) est liée si et seulement si $(\lambda, \mu) = (0, -1)$ ou $(\lambda, \mu) = (-3, 2)$.

(c) La dimension de E étant égale au rang de la famille (v_1, v_2, v_3) (*cf.* la proposition 4.24 et la remarque qui la suit), on obtient en utilisant les calculs précédents

$$\dim(E) = \begin{cases} 2 & \text{si } (\lambda, \mu) = (0, -1) \text{ ou } (\lambda, \mu) = (-3, 2)\,; \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ y + t &= 0. \end{cases}$$

On considère d'autre part les vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, 0, 1, 0), \quad v_2 = (1, 1, 2, -1), \quad v_3 = (1, -1, 0, 1), \quad v_4 = (1, -4, -3, 4)$$

et le sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ qu'ils engendrent.

(a) Déterminer une base de F et la dimension de F.

(b) Montrer que $G \subseteq F$. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?

(c) Montrer que $F = G$.

Réponse exercice 3 : (a) Considérons les vecteurs v_1 et v_3. Ces vecteurs vérifient les équations cartésiennes définissant F et appartiennent donc à F. Par ailleurs, ils sont linéairement indépendants et forment donc une famille libre de F. Pour vérifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_3)$ est une base de F, il suffit donc de montrer que v_1, v_3 engendrent F (*cf.* définition 4.17). Considérons donc un vecteur $v = (x, y, z, t)$ de F (on a donc les relations $y + t = 0$ et $x + y - z = 0$). En remarquant que

$$z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + t \\ -t \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},$$

on obtient que $v = zv_1 + tv_3$. Ceci montre que la famille $\mathcal{B}$ engendre F et donc qu'elle en forme une base. La dimension étant égale au cardinal d'une base (définition 4.22), on obtient $\dim(F) = 2$.

Réponse alternative : Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on voit en effectuant l'opération élémentaire $\mathsf{L}_1 := \mathsf{L}_1 - \mathsf{L}_2$ qu'on a

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ y + t &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z - t &= 0 \\ y + t &= 0. \end{cases}$$

Ce dernier système est sous forme échelonnée réduite et permet aussitôt d'écrire

$$F = \{(z + t, -t, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 1)) = \mathrm{Vect}(v_1, v_3)$$

Ainsi $\mathcal{B} = (v_1, v_3)$ est une famille génératrice de F. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre. Cette dernière propriété découle du fait que les deux vecteurs v_1 et v_3 ne sont pas colinéaires. On conclut comme précédemment pour la dimension.

(b) On peut remarquer que les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 satisfont les équations cartésiennes définissant F. Les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 appartiennent donc à F ce qui implique (théorème 4.7) que le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent G est contenu dans F (puisque F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$). On a donc bien $G \subseteq F$. Comme $\dim(F) = 2$, la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) ne peut pas être libre. (*cf.* la proposition 4.24 et la remarque qui la suit ainsi que le théorème 4.11)

(c) On a vu que $G \subseteq F$. Par ailleurs $\mathcal{B} = (v_1, v_3)$ étant une base de F on a

$$F = Vect(v_1, v_3) \subseteq \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = G.$$

On a donc simultanément $F \subseteq G$ et $G \subseteq F$ ce qui montre que $F = G$.