Université de Rennes 2022–2023
L1- AG2 CC2 (**1 heure**)

Les documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés. Les réponses et calculs devront être correctement justifiés.

NOM : ______ **Prénom :** ______ **Groupe :** ______

Exercice 1. Soit $m \in \mathbf{R}$ un paramètre réel. Nous considérons le système d'équations (d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$)

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & m+1 \\ -2x+3y+3z & = & 2 \\ y+z & = & 2m \end{array}\right. .$$

Résoudre ce système en fonction des valeurs du paramètre m.

Exercice 2. Nous considérons la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

(2) Nous considérons le système d'équations $\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+3z & = & 1 \\ y+z & = & -5 \\ 2y+3z & = & 6 \end{array}\right.$ (d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$). Par un argument purement qualitatif (c'est-à-dire sans aucun calcul), déduire de la question précédente la nature géométrique de l'ensemble des solutions de ce système.

Exercice 3. Nous considérons la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et l'expression de A^{-1}.

(2) Soit p un entier naturel. Déduire de la question précédente l'expression de A^{2p}, puis celle de A^{2p+1}.

(3) Calculer l'expression numérique de $(A + I_4)^7$. (Nous rappelons que I_4 est la matrice identité de taille 4×4, c'est-à-dire diagonale et n'ayant que des 1 sur la diagonale.) La réponse finale sera donnée sous forme d'une matrice 4×4 explicite.