1. Droites du plan, droites et plans et de l'espace

Remarque. — Ces notes sont un support écrit pour le premier chapitre d'AG2. On y met l'accent sur les définitions et résultats théoriques, tandis que le cours en amphi s'attardera plus sur les aspects pratiques. En particulier, ces notes *ne sont pas* un recueil de notes de cours *complètes* du premier chapitre. Par ailleurs, il n'y aura pas de notes similaires pour les chapitres suivants du cours.

Remarque. — Un nombre conséquent de propositions sont admises dans ce chapitre. Aucune des démonstrations n'est fondamentalement hors de portée. Chacune est escamotée pour une (voire plusieurs) des raisons suivantes :
— la démonstration est intéressante à connaître mais le cours doit garder une longueur raisonnable ;
— il n'est pas fondamental de connaître la démonstration pour bien appréhender le suite ;
— la démonstration est un peu technique et pas très éclairante ;
— la démonstration a déjà été abordée en AG1.
Certaines démonstrations pourront être proposées en exercices de TD.

1.1. Droites du plan. —

Remarque. — L'intersection de ce qui suit avec le chapitre 4 d'AG1 d'une part, le programme de lycée d'autre part, n'est pas vide.

On travaille dans un plan affine $\mathcal{P}$ ainsi que dans son plan vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Ce plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Concrètement, cela permet de représenter les éléments de $\mathcal{P}$ (les "points du plan") et les éléments de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (les "vecteurs du plan") par des couples de nombres réels. Attention, même si on représente un point et un vecteur de la même façon (à savoir par un couple de réels) il ne faut pas oublier que les points et les vecteurs sont de nature différente. Par exemple, on peut ajouter des vecteurs mais ça n'a pas de sens d'ajouter des points.

On renvoie au chapitre 4 d'AG1 pour plus de détails sur le formalisme élémentaires des points et vecteurs du plan.

1.1.1. Définitions et premières propriétés des droites du plan. —

Définition 1.1. — (différente de celle donnée en AG1, mais équivalente) Une *droite* de $\mathcal{P}$ est une partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ tel qu'il existe $A \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *non nul* tel que

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P}, \text{ les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires}\}$$

Remarque. — Comme $\overrightarrow{u}$ est non nul, la dernière égalité se réécrit aussitôt

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P}, \exists t \in \mathbf{R}, \overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{u}\}$$

Remarque. — Le couple $(A, \overrightarrow{u})$ vérifiant la propriété de l'énoncé n'est pas unique, *cf.* le corollaire 1.4 ci-dessous.

Notation. — Soit $A \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *non nul*. On pose

$$D(A, \overrightarrow{u}) := \{M \in \mathcal{P}, \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires}\}.$$

On notera que $D(A, \overrightarrow{u})$ est une droite et que $A \in D(A, \overrightarrow{u})$. On appelle $D(A, \overrightarrow{u})$ *la droite passant par* A *et dirigée par le vecteur* $\overrightarrow{u}$.

Définition 1.2. — Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$. Un *vecteur directeur* de $\mathcal{D}$ est un vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ non nul tel qu'il existe $A \in \mathcal{P}$ vérifiant $\mathcal{D} = D(A, \overrightarrow{u})$.

Proposition 1.3. — *Soit* $A \in \mathcal{P}$ *et* $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ non nul.

1. *Soit* B *un point de* $\mathcal{P}$. *Alors* $D(A, \overrightarrow{u}) = D(B, \overrightarrow{u})$ *si et seulement si* $B \in D(A, \overrightarrow{u})$.
2. *Soit* $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ non nul. *Alors* $D(A, \overrightarrow{u}) = D(A, \overrightarrow{v})$ *si et seulement si* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires.*

Démonstration. — *Première assertion :* Supposons $B \in D(A, \overrightarrow{u})$ Comme $B \in D(A, \overrightarrow{u})$ et par définition, il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = t_0 \cdot \overrightarrow{u}$. Soit $M \in \mathcal{P}$. Alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = t_0 \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{BM}$. Ainsi on a

$$\overrightarrow{AM} = t_0 \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{BM}.$$

Supposons qu'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{u}$. Alors d'après l'égalité ci-dessus on a $\overrightarrow{BM} = (t - t_0) \cdot \overrightarrow{u}$.

Supposons qu'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{u}$. Alors d'après l'égalité ci-dessus on a $\overrightarrow{AM} = (t + t_0) \cdot \overrightarrow{u}$.

Ainsi $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. Par définition ceci montre que $D(A, \overrightarrow{u}) = D(B, \overrightarrow{u})$

Supposons $D(A, \overrightarrow{u}) = D(B, \overrightarrow{u})$. Comme $B \in D(B, \overrightarrow{u})$ on en déduit que $B \in D(A, \overrightarrow{u})$.

Seconde assertion : Supposons $D(A, \overrightarrow{u}) = D(A, \overrightarrow{v})$. Soit $B \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$. En particulier $B \in D(A, \overrightarrow{v})$. Or $D(A, \overrightarrow{u}) = D(A, \overrightarrow{v})$. Donc $B \in D(A, \overrightarrow{u})$. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$, on en déduit que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

Supposons $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires. Commme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont tous les deux non nuls, pour tout $M \in \mathcal{P}$, la condition "$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires" est équivalente à la condition "$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires". Par définition de $D(A, \overrightarrow{u})$ et $D(A, \overrightarrow{v})$, ceci montre que $D(A, \overrightarrow{u}) = D(A, \overrightarrow{v})$. □

Corollaire 1.4. — *Soit* $A, B \in \mathcal{P}$ *et* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *des vecteurs non nuls. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $D(A, \overrightarrow{u}) = D(B, \overrightarrow{v})$ *;*
2. *les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{u}$ *sont colinéaires et les vecteurs* $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{u}$ *sont colinéaires.*

Proposition 1.5. — *Soit* A *et* B *deux points* distincts *de* $\mathcal{P}$. *Alors il existe une unique droite de* $\mathcal{P}$ *contenant* A *et* B. *C'est la droite* $D(A, \overrightarrow{AB})$.

Démonstration. — Il découle de la définition de $D(A, \overrightarrow{AB})$ que A et B appartiennent à la droite $D(A, \overrightarrow{AB})$.

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$ telle que $A \in \mathcal{D}$ et $B \in \mathcal{D}$. Soit $C \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ non nuls tel que $\mathcal{D} = D(C, \overrightarrow{u})$. Comme $A \in D(C, \overrightarrow{u})$, d'après la proposition ci-dessus, on a $D(C, \overrightarrow{u}) = D(A, \overrightarrow{u})$. Ainsi $\mathcal{D} = D(A, \overrightarrow{u})$. Donc $B \in D(A, \overrightarrow{u})$, d'où on déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. Comme A et B sont distincts, $\overrightarrow{AB}$ est non nul. D'après la proposition 1.3, on en déduit que $D(A, \overrightarrow{u}) = D(A, \overrightarrow{AB})$. □

1.1.2. Représentation paramétrique d'une droite du plan. —

Proposition 1.6. — *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Soit $A = (a_1, a_2) \in \mathcal{P} = \mathbf{R}^2$ un point de $\mathcal{D}$, et $\overrightarrow{u} = (b_1, b_2) \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \setminus \overrightarrow{0} = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.*

Alors

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \exists t \in \mathbf{R}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a_1 + b_1 \cdot t \\ y & = & a_2 + b_2 \cdot t \end{array} \right. \right\}$$

On note alors souvent

$$\mathcal{D} \colon \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a_1 + b_1 \cdot t \\ y & = & a_2 + b_2 \cdot t \end{array} \right. , \quad t \in \mathbf{R}$$

et on appelle cette écriture une *représentation paramétrique* de $\mathcal{D}$.

Remarque. — L'égalité de la proposition peut se réécrire

$$\mathcal{D} = \{(a_1 + b_1 \cdot t, a_2 + b_2 \cdot t), \quad t \in \mathbf{R}\}$$

De ce point de vue, $\mathcal{D}$ peut s'interpréter comme l'ensemble des images des éléments de $\mathbf{R}$ par l'application

$$\varphi \colon \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 = \mathcal{P} \\ t & \longmapsto & (a_1 + b_1 \cdot t, a_2 + b_2 \cdot t) \end{array}$$

Il est à noter que cette application est injective : pour chaque point M de $\mathcal{P}$, il existe un unique $t \in \mathbf{R}$ tel que $M = \varphi(t)$. Toujours de ce point de vue, une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est une description "en extension" de $\mathcal{D}$ comme sous-ensemble de $\mathcal{P}$.

Démonstration. — Soit $M = (x, y) \in \mathcal{P} = \mathbf{R}^2$. Ainsi $\overrightarrow{AM} = (x - a_1, y - a_2)$. La condition

$$\exists t \in \mathbf{R}, \overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{u}$$

se réécrit donc

$$\exists t \in \mathbf{R}, (x - a_1, y - a_2) = (t \cdot b_1, t \cdot b_2)$$

ce qui donne le résultat par définition de $D(A, \overrightarrow{u})$. □

On a une réciproque à la proposition 1.6, qui est également une conséquence directe de la définition d'une droite.

Proposition 1.7. — *Soit a_1, a_2, b_1, b_2 des réels avec $(b_1, b_2) \neq (0,0)$. Alors*

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \exists t \in \mathbf{R}, \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & a_1 + b_1 \cdot t \\ y & = & a_2 + b_2 \cdot t \end{array} \right. \right\}$$

est une droite du plan ; plus précisément, c'est la droite passant par le point $A = (a_1, a_2)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (b_1, b_2)$.

Remarque. — On voit ainsi qu'une représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$ se déduit rapidement de la connaissance d'un point de $\mathcal{D}$ et d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, et vice-versa. On voit par ailleurs bien qu'une représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$ n'est pas unique : à chaque choix d'un couple $(A, \overrightarrow{u})$, où A est un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, correspond une représentation paramétrique différente.

1.1.3. Équation cartésienne (ou implicite) d'une droite du plan. —

Proposition 1.8. — *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Alors il existe des réels α, β, γ, avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tels que (identifiant $\mathcal{P}$ à $\mathbf{R}^2$)*

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$$

Remarque. — L'égalité de la proposition s'interprète comme une description "en compréhension" de la droite $\mathcal{D}$ vue comme sous-ensemble de $\mathcal{P}$.

On note alors souvent

$$\mathcal{D}\colon \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

et on appelle cette écriture une *équation cartésienne* (ou implicite) de $\mathcal{D}$.

On va donner deux démonstrations différentes de cette proposition. La première se base sur la caractérisation bien connu de la colinéarité de deux vecteurs du plan (identifié à $\mathbf{R}^2$) en termes de produit en croix. La seconde se base sur une discussion sur la résolution d'un système linéaire.

C'est la seconde démonstration qui est le plus dans la lignée de la suite du cours, où l'outil de base que l'on va utiliser pour traiter des problèmes d'algèbre linéaire est la résolution de systèmes linéaires (sous une forme très générale : nombre quelconque d'équations et d'inconnues).

La première démonstration, et plus précisément l'utilisation du produit en croix, trouve un prolongement naturel dans un autre outil extrêmement important en algèbre linéaire qui est la théorie des déterminants. Dans ce cours, faute de temps, nous n'évoquerons quasiment pas la théorie des déterminants, il faudra attendre l'an prochain pour en savoir un peu plus (ou solliciter l'équipe pédagogique, ou aller fouiner à la BU).

Démonstration. — (première version, avec des produits en croix)

Soit $A \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \setminus \overrightarrow{0}$ tels que $\mathcal{D} = D(A, \overrightarrow{u})$. Soit $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ tels que $A = (a_1, a_2)$ et $b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ avec $(b_1, b_2) \neq (0,0)$ tels que $\overrightarrow{u} = (b_1, b_2)$

Soit $M = (x,y) \in \mathcal{P} = \mathbf{R}^2$. On a alors $\overrightarrow{AM} = (x - a_1, y - a_2)$

On a par ailleurs les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM} = (x - a_1, y - a_2) \text{ et } \overrightarrow{u} = (b_1, b_2) \text{ sont colinéaires} \\ &\iff (x - a_1) \cdot b_2 - (y - a_2) b_1 = 0. \end{aligned}$$

On a utilisé la définition de $D(A, \overrightarrow{u})$ pour la première équivalence, et la caractéristion de la colinéarité via le produit en croix pour la dernière équivalence.

La dernière relation donne la forme annoncée par l'énoncé avec

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (b_2, -b_1, b_1 a_2 - a_1 b_2).$$

□

Démonstration. — (seconde version, avec la résolution d'un système linéaire)

On commence exactement de la même manière, jusqu'à l'équivalence

$$M \in \mathcal{D} \iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM} = (x - a_1, y - a_2) \text{ et } \overrightarrow{u} = (b_1, b_2) \text{ sont colinéaires.}$$

Cette dernière condition équivaut à (*cf.* ce qui précède sur la représentation paramétrique d'une droite)

$$\exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} b_1 \cdot t &= x - a_1 \\ b_2 \cdot t &= y - a_2 \end{cases}$$

En d'autres termes, $M = (x,y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si le système d'inconnue $t \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} b_1 \cdot t &= x - a_1 \\ b_2 \cdot t &= y - a_2 \end{cases} \qquad (S)$$

admet au moins une solution. Insistons sur le fait que dans ce système, la seule *inconnue* est t, tous les autres noms de variables représentant des paramètres et non des inconnues.

Rappelons que par hypothèse on a $(b_1, b_2) \neq 0$. Supposons pour fixer les idées qu'on a $b_1 \neq 0$. Le cas où $b_2 \neq 0$ se traite similairement en échangeant le rôle des variables.

Pour étudier le système (S), on va :

1. multiplier la deuxième équation par b_1 ;
2. remplacer la deuxième équation par elle-même moins la première équation multipliée par b_2 (notons que ceci "tue" l'inconnue t dans la deuxième équation).

Ceci sera notre premier exemple d'application de la méthode très générale du *pivot de Gauss*.

La clef est que ces opérations fournissent un système *équivalent* au système initial (S) (c'est-à-dire ayant exactement le même ensemble de solutions que (S)). Ceci sera justifié au chapitre suivant dans un cadre beaucoup plus général. Ainsi le système (S) équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_1 \cdot t & = & x - a_1 \\ 0 & = & b_1(y-a_2) - b_2(x-a_1) \end{array}\right. \qquad (S')$$

et donc $(x,y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si le système (S') a au moins une solution.

Or cette dernière condition est facile à étudier au vu de la forme de (S'). La deuxième relation $0 = b_1(y-a_2) - b_2(x-a_1)$ ne dépend pas de l'inconnue t, et donc si elle n'est pas vérifiée, c'est à dire si $0 \neq b_1(y-a_2) - b_2(x-a_1)$, le système (S') n'a pas de solution (on a une équation impossible du genre $0 = 1$). Si la relation $0 = b_1(y-a_2) - b_2(x-a_1)$ est vérifiée (c'est alors l'équation $0 = 0$), le système (S') se ramène à la première équation $b_1 \cdot t = x - a_1$ qui a toujours une (et au passage, une seule) solution puisque $b_1 \neq 0$.

Ainsi le système (S') a au moins une solution si et seulement si

$$0 = b_1(y-a_2) - b_2(x-a_1),$$

ce qui conclut. □

Exemple. — *On traitera un exemple explicite pendant la séance de cours.*

On a une réciproque à la proposition 1.8. D'un point de vue pratique, la démonstration consiste à passer d'une équation cartésienne d'une droite du plan à une représentation paramétrique de cette droite.

Proposition 1.9. — *Soit α, β, γ des réels avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Alors l'ensemble*

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$$

est une droite du plan.

Démonstration. — Supposons $\alpha \neq 0$ (le cas $\beta \neq 0$ se traite de manière similaire ; c'est la même chose, "quitte à permuter les coordonnées"). L'ensemble de l'énoncé se réécrit

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad x = -\frac{\beta}{\alpha} y - \frac{\gamma}{\alpha}\right\}.$$

Un peu d'attention montre que ce dernier ensemble coincide avec l'ensemble

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \exists t \in \mathbf{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{\beta}{\alpha} t - \frac{\gamma}{\alpha} t - \frac{\delta}{\alpha} \\ y & = & t \end{array}\right.\right\}.$$

Le vecteur $(-\frac{\beta}{\alpha}, 1)$ étant non nul, la proposition 1.7 permet de conclure. □

Exemple. — *On traitera un exemple explicite pendant la séance de cours.*

1.1.4. Diverses représentations d'une droite du plan. — On a donc vu qu'on avait (au moins) quatre façons de définir une droite du plan :

1. par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur ;
2. par la donnée de deux points distincts ;
3. par la donnée d'une représentation paramétrique ;
4. par la donnée d'une équation cartésienne.

Il faut savoir passer de chacune de ces représentation à une autre en utilisant les résultats précédents (et éventuellement leur démonstration). Surtout, *surtout*, il faut essayer de comprendre le sens de que l'on fait plutôt que d'appliquer des recettes calculatoires apprises par coeur.

Par exemple :
— naviguer entre (1) et (2) : proposition 1.5
— naviguer entre (1) et (3) : propositions 1.6 et 1.7
— aller de (1) vers (4) : proposition 1.8
— aller de (4) vers (3) : proposition 1.9

1.1.5. Intersection de deux droites du plan ; lien avec l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires. —

Proposition 1.10. — *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites du plan. Alors une et une seule des trois propriétés suivantes est vraie :*

1. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un unique point d'intersection ;

2. $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$;

3. $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.

En outre 2) ou 3) se produit si et seulement si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un vecteur directeur commun.

Dans le cas 1), on dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont *sécantes.* Dans les cas 2) et 3), on dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont *parallèles*

Examinons la proposition précédent du point de vue de la résolution de systèmes linéaires. Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ des droites de $\mathcal{P}$. Soit $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$ une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$ et $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$ une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$. La recherche de l'ensemble des points communs à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se traduit donc par la recherche de l'ensemble des solutions du système d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 & = & 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

D'après la proposition précédente, une et une seule des propriétés suivantes est vraie pour un tel système :

1. il a une unique solution ;
2. il n'a pas de solution ;
3. il a une infinité de solutions.

Dans le premier cas, résoudre le système revient à déterminer explicitement l'unique solution.

Dans le dernier cas, on sait en fait que l'ensemble des solutions est une droite. Résoudre le système revient alors à donner une représentation paramétrique de cette droite.

Remarque. — Dans le dernier cas, on pourrait imaginer aussi décrire l'ensemble des solutions par une équation cartésienne de la droite. Mais ce n'est pas à proprement parler ce qu'on attend de la résolution du système (plus de précisions là dessus au chapitre suivant)

Exemple. — *On traitera un exemple explicite pendant la séance de cours.*

Remarque. — Dans ce qui précède, on a examiné l'intersection de deux droites du plan en supposant qu'elles étaient chacune données par une équation cartésienne. Bien sûr, on peut imaginer des situations où au moins l'une des deux droites est décrite d'une autre façon, par exemple : l'une est donnée sous forme cartésienne, et l'autre sous forme paramétrique ; ou encore : les deux sont données sous forme paramétrique.

On peut alors, comme on l'a déjà vu, se ramener au cas où les deux droites sont définies par une équation cartésienne. Mais ce n'est pas nécessairement la méthode la plus efficace. On donnera un exemple à ce sujet lors de la séance de cours.

1.1.6. Pente d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. — Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées, c'est à dire non parallèle à la droite d'équation cartésienne $x = 0$. De façon équivalente, $(0, 1)$ n'est pas un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, ou, ce qui revient au même, aucun vecteur directeur de $\mathcal{D}$ n'a sa première coordonnée non nulle.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Écrivons $\overrightarrow{u} = (a, b)$ avec $a, b \in \mathbf{R}$. En particulier on a $a \neq 0$. En outre, comme tout autre vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, on vérifie que la quantité $\frac{b}{a}$ ne dépend pas du choix du vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Définition 1.11. — Avec les notations précédentes, la quantité $\frac{b}{a}$ est appelée la *pente* de la droite $\mathcal{D}$.

Remarque. — Une droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées a une pente nulle si et seulement si elle est parallèle à l'axe des abscisses, c'est à dire horizontale ou "plate". Plus la pente est élevée (en valeur absolue), plus la pente (au sens intuitif) décrite par la droite est forte.

1.2. Droites et plans et de l'espace. —

Remarque. — L'intersection de ce qui suit avec le programme de lycée n'est pas vide. *Attention*, il y a aussi des nouveautés.

On travaille dans un espace affine $\mathcal{E}$ (de dimension 3) ainsi que dans son espace vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Cet espace est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Concrètement, cela permet de représenter les éléments de $\mathcal{E}$ (les "points de l'espace") et les éléments de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (les "vecteurs de l'espace") par des *triplets* de nombres réels. Le formalisme du chapitre 4.1 d'AG1 (notamment 4.1.3 et 4.1.6) s'étend aussitôt à ce cadre.

1.2.1. Définitions et premières propriétés des droites de l'espace. — C'est formellement *exactement* la même chose (mêmes définitions, mêmes énoncés, mêmes démonstrations) que dans la partie "Définitions et premières propriétés des droites du plan". Il suffit de remplacer partout $\mathcal{P}$ par $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ par $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

1.2.2. Représentations paramétriques d'une droite de l'espace. — C'est essentiellement la même chose qu'une représentation paramétrique d'une droite du plan, en rajoutant une coordonnée.

Proposition 1.12. — *Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. Soit $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{E} = \mathbf{R}^3$ un point de $\mathcal{D}$, et $\overrightarrow{u} = (b_1, b_2, b_3) \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \setminus \overrightarrow{0} = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.*

Alors

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad \exists t \in \mathbf{R}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a_1 + b_1 \cdot t \\ y & = & a_2 + b_2 \cdot t \\ z & = & a_3 + b_3 \cdot t \end{array} \right. \}$$

On note alors souvent

$$\mathcal{D} \colon \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a_1 + b_1 \cdot t \\ y & = & a_2 + b_2 \cdot t \\ z & = & a_3 + b_3 \cdot t \end{array} \right. , \quad t \in \mathbf{R}$$

et on appelle cette écriture une *représentation paramétrique* de $\mathcal{D}$.

L'égalité de la proposition peut se réécrire

$$\mathcal{D} = \{(a_1 + b_1 \cdot t, a_2 + b_2 \cdot t, a_3 + b_3 t), \quad t \in \mathbf{R}\}$$

Comme dans le cas d'une droite du plan, on a la réciproque

Proposition 1.13. — *Soit $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ des réels avec $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$. Alors*

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \exists t \in \mathbf{R}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a_1 + b_1 \cdot t \\ y & = & a_2 + b_2 \cdot t \\ z & = & a_3 + b_3 \cdot t \end{array} \right. \}$$

est une droite de l'espace, passant par le point $A = (a_1, a_2, a_3)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (b_1, b_2, b_3)$

Même démonstration, même remarque que dans le cas des représentations paramétriques des droites du plan.

1.2.3. Plan vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires.— La définition suivante sera plus tard généralisée (et prendra tout son sens) dans le cadre de l'étude générale des espaces vectoriels.

Définition 1.14. — Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un couple de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. On pose

$$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{\overrightarrow{w} \in \mathcal{E},\ \exists (s,t) \in \mathbf{R}^2,\ \overrightarrow{w} = s \cdot \overrightarrow{u} + t \cdot \overrightarrow{v}\}$$

Remarque. — Pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, le vecteur nul, le vecteur $\overrightarrow{u}$ et le vecteur $\overrightarrow{v}$ appartiennent toujours à l'ensemble $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1.2.4. Définitions et premières propriétés des plans de l'espace. —

Définition 1.15. — Un *plan* de $\mathcal{E}$ est une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ tel qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ et un couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ *non colinéaires* tel que

$$\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\}.$$

Remarque. — Le triplet $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ vérifiant la propriété de l'énoncé n'est pas unique, *cf.* ci-dessous.

Notation 1. — Soit $A \in \mathcal{E}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un couple de vecteurs *non colinéaires* de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. On pose

$$P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{M \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\}$$

On notera que P est un plan et que $A \in P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$. On appelle $P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ le plan passant par A et dirigé par le couple de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Définition 1.16. — Soit $\mathcal{P}$ une plan de $\mathcal{E}$. Un *couple de vecteurs directeurs* de $\mathcal{P}$ est un couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ non colinéaires tel qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ vérifiant $\mathcal{P} = P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Proposition 1.17. — *Soit $A \in \mathcal{E}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un couple de vecteurs non colinéaires de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$*

1. *Soit B un point de $\mathcal{E}$. Alors $P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = P(B, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si et seulement si $B \in P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$*
2. *Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$* non nul. *Alors $P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = P(A, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}) \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{u'} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{v'} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$*

Corollaire 1.18. — *Soit $A, B \in \mathcal{E}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ deux couples de vecteurs non colinéaires de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = P(B, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$;*
2. *les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont des éléments de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*

Proposition 1.19. — *Soit A, B et C trois points* non alignés *$\mathcal{E}$ (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de droite de $\mathcal{E}$ les contenant tous les trois). Alors il existe un unique plan de $\mathcal{E}$ contenant A, B et C. C'est le plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.*

Démonstration. — Comme A, B et C sont non alignés, ils sont deux à deux distincts. En particulier $\overrightarrow{AB}$ est non nul. Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étaient colinéaires, le point C serait un élément de la droite $D(A, \overrightarrow{AB})$, contradiction. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, et le plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est bien défini. Il découle de la définition de $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))$ que A, B et C appartiennent au plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))$.

Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$ contenant A, B et C. Soit $E \in \mathcal{E}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un couples de vecteurs non colinéaires de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ tel que $\mathcal{P} = P(E, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Comme $A \in \mathcal{P}$, on a $\mathcal{P} = P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (proposition 1.17). Comme $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$, par définition de $P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a $\overrightarrow{AB} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{AC} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. D'après le corollaire 1.18, on a $P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ce qui conclut. $\square$

1.2.5. Représentations paramétriques d'un plan de l'espace. —

Proposition 1.20. — *Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace $\mathcal{E}$. Soit $A = (a_1, a_2, a_3)$ un point de $\mathcal{P}$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = ((b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3))$ un couple de vecteurs non colinéaires de $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \mathbf{R}^3$. Alors on a*

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad \exists (s, t) \in \mathbf{R}^2, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a_1 + b_1 \cdot s + c_1 \cdot t \\ y & = & a_2 + b_2 \cdot s + c_2 \cdot t \\ z & = & a_3 + b_3 \cdot s + c_3 \cdot t \end{array} \right. \}.$$

On note alors souvent

$$\mathcal{P} \colon \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a_1 + b_1 \cdot s + c_1 \cdot t \\ y & = & a_2 + b_2 \cdot s + c_2 \cdot t \\ z & = & a_3 + b_3 \cdot s + c_3 \cdot t \end{array} \right. , \quad (s, t) \in \mathbf{R}^2$$

et on appelle cette écriture une *représentation paramétrique* de $\mathcal{P}$.

On a des remarques strictement similaires à celles faites pour les représentations paramétriques de droites, et comme dans ce dernier cas, on a une réciproque.

Proposition 1.21. — *Soit (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) et (c_1, c_2, c_3) trois triplets de réels tels que les vecteurs (b_1, b_2, b_3) et (c_1, c_2, c_3) ne sont pas colinéaires. Alors l'ensemble*

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad \exists (s, t) \in \mathbf{R}^2, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a_1 + b_1 \cdot s + c_1 \cdot t \\ y & = & a_2 + b_2 \cdot s + c_2 \cdot t \\ z & = & a_3 + b_3 \cdot s + c_3 \cdot t \end{array} \right. \}$$

est un plan de l'espace, passant par le point (a_1, a_2, a_3) et dirigée par les vecteurs (b_1, b_2, b_3) et (c_1, c_2, c_3).

Exercice Que peut on conclure si on ne suppose plus les vecteurs (b_1, b_2, b_3) et (c_1, c_2, c_3) non colinéaires ?

1.2.6. Équation cartésienne (ou implicite) d'un plan de l'espace. —

Proposition 1.22. — *Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Alors il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ et on a*

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\}.$$

L'égalité de la proposition s'interprète comme une description "en compréhension" du plan $\mathcal{P}$ vu comme sous-ensemble de $\mathcal{E}$.

On note alors souvent
$$\mathcal{P}\colon \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$
et on appelle cette écriture une *équation cartésienne (ou implicite)* de $\mathcal{P}$.

Comme pour la proposition 1.8, on va proposer deux démonstrations, l'une basée sur la résolution de systèmes linéaires, l'autre sur la théorie des déterminants. Cette dernière version attendra la fin du chapitre afin de disposer de l'outil adéquat dans ce cadre, à savoir le produit vectoriel.

Démonstration. — (de la proposition 1.22 basée sur la résolution d'un système linéaire)

Soit $A=(a_1,a_2,a_3)\in\mathcal{E}=\mathbf{R}^3$, $\overrightarrow{u}=(b_1,b_2,b_3)\in\overrightarrow{\mathcal{E}}=\mathbf{R}^3$ et $\overrightarrow{v}=(c_1,c_2,c_3)\in\overrightarrow{\mathcal{E}}=\mathbf{R}^3$ tels que $\mathcal{P}=P(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

Soit $M=(x,y,z)\in\mathcal{E}=\mathbf{R}^3$. On a donc $\overrightarrow{AM}=(x-a_1,y-a_2,z-a_3)$. Et (se rappeler les descriptions paramétriques d'un plan) on a $M\in\mathcal{P}$ si et seulement si le système d'inconnue $(s,t)\in\mathbf{R}^2$
$$\left\{\begin{array}{rcl} b_1\cdot s+c_1\cdot t & = & x-a_1\\ b_2\cdot s+c_2\cdot t & = & y-a_2\\ b_3\cdot s+c_3\cdot t & = & z-a_3\end{array}\right.\qquad (S)$$
possède au moins une solution. Comme dans le cas de la démonstration de la proposition 1.8, insistons sur le fait que dans ce système, les seules inconnues sont s et t, tous les autres noms de variables représentant des paramètres et non des inconnues.

Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{u}$ n'est pas nul. "Quitte à permuter les coordonnées", on peut supposer qu'on a $b_1\neq 0$.

Par ailleurs, on ne peut avoir simultanément les relations
$$c_2b_1-b_2c_1=0\quad \text{et} c_3b_1-b_3c_1=0,$$
car on aurait alors
$$c_1=\frac{c_1}{b_1}\cdot b_1,\quad c_2=\frac{c_1}{b_1}\quad b_2,\quad c_3=\frac{c_1}{b_1}\quad b_3$$
soit $\overrightarrow{v}=\frac{c_1}{b_1}\cdot\overrightarrow{u}$ ce qui contredirait le fait que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

"Quitte à permuter les coordonnées", on peut supposer qu'on a $c_2b_1-b_2c_1=0$.

On effectue alors sur le système (S) la suite d'opérations suivantes :

1. $L_2\to b_1\cdot L_2$, $L_3\to b_1\cdot L_3$,
2. $L_2\to L_2-b_2\cdot L_1$, $L_3\to b_2\cdot L_1$,
3. $L_3\to(c_2b_1-b_2c_1)\cdot L_3$
4. $L_3\to L_2-(c_3b_1-b_3c_1)\cdot L_2$

Ces opérations fournissent un système équivalent au système initial (S) (c'est-à-dire ayant exactement le même ensemble de solutions que (S)). Ceci sera justifié au chapitre suivant dans un cadre beaucoup plus général. Ainsi le système (S) équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} b_1\cdot s & + & c_1\cdot t & = & x-a_1 \\ & & (c_2b_1-b_2c_1)\cdot t & = & b_1(y-a_2)-b_2(x-a_1) \\ & & 0 & = & L(x,y,z) \end{array}\right. \qquad (S')$$

en ayant posé

$$L(x,y,z)=(c_2b_1-b_2c_1)\cdot(b_1(z-a_3)-b_3(x-a_1))-(c_3b_1-b_3c_1)\cdot(b_1(y-a_2)-b_2(x-a_1)).$$

De manière similaire au cas de la démonstration de la proposition 1.8, on voit que $(x,y,z)\in\mathcal{P}$ si et seulement si $L(x,y,z)=0$. Noter que si $L(x,y,z)=0$, la deuxième équation du système fournit la valeur de t (car $(c_2b_1-b_2c_1)\neq 0$) et par suite la première équation fournit la valeur de s car $b_1\neq 0$. Ainsi dans ce cas on peut préciser que le système possède une unique solution.

Un calcul ennuyeux au possible mais élémentaire montre alors que $L(x,y,z)$ est de la forme $\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot z+\delta$ avec

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(b_1(b_2c_3-b_3c_2),b_1(b_3c_1-c_3b_1),b_1(c_2b_1-b_2c_1)).$$

En particulier, d'après les remarques déjà faites, on a $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$ ce qui conclut. □

Remarque. — Euh… attendez… Tout ça c'est très très lourd, non ?
En effet, cependant :

1. dans la pratique, quand il s'agit d'utiliser ce raisonnement pour déterminer une équation implicite d'un plan, les a_i, b_i et c_i sont explicites, et l'étude du système en est grandement simplifiée ; *un exemple explicite sera traité lors de la séance de cours* ;
2. la théorie développée dans les chapitres suivants permettra d'expliquer simplement pourquoi ce qui précède fonctionne, sans calculs laborieux :
3. au besoin, voir aussi la démonstration avec le produit vectoriel.

On la réciproque de la proposition 1.22 , dont la démonstration consiste dans la pratique à passer d'une équation cartésienne d'un plan à une représentation paramétrique

Proposition 1.23. — *Soit $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ des réels avec $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$. Alors*

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0\}$$

est un plan de l'espace.

Démonstration. — Supposons $\alpha\neq 0$ (les autres cas se traitent de manière similaire ou par symétrie). L'ensemble de l'énoncé se réécrit

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\quad x=-\frac{\beta}{\alpha}y-\frac{\gamma}{\alpha}z-\frac{\delta}{\alpha}\}$$

Un peu d'attention montre que ce dernier ensemble coincide avec l'ensemble

$$\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3, \quad \exists (s,t)\in \mathbf{R}^2, \quad \left\{\begin{array}{lll} x & = & -\frac{\beta}{\alpha}s-\frac{\gamma}{\alpha}t-\frac{\delta}{\alpha} \\ y & = & s \\ z & = & t \end{array}\right. \}$$

Les vecteurs $(-\frac{\beta}{\alpha},1,0)$ et $(-\frac{\gamma}{\alpha},0,1)$ étant non colinéaires (vérification facile, système "échelonné") la proposition 1.21 donne le résultat. □

Remarque. — La démonstration montre qu'à partir d'une équation cartésienne d'un plan on peut facilement retrouver un point du plan et un couple de vecteur directeurs de ce plan.

Exemple. — *On traitera un exemple explicite pendant la séance de cours.*

1.2.7. Système d'équations cartésiennes (ou implicites) d'une droite de l'espace. —

Proposition 1.24. — *Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. Alors il existe des réels $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1$ et $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\delta_2$ tels que les vecteurs $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ et $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ sont non colinéaires et tels que*

$$\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3, \quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\delta_1 & = & 0 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\delta_2 & = & 0 \end{array}\right. \}.$$

Comme dans les cas précédents, l'égalité de la proposition s'interprète comme une description "en compréhension" de la droite $\mathcal{D}$ vu comme sous-ensemble de $\mathcal{E}$.

On note alors souvent

$$\mathcal{D}\colon \left\{\begin{array}{lll} \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\delta_1 & = & 0 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\delta_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

et on appelle cette écriture un *système d'équations cartésiennes (ou implicites)* de $\mathcal{D}$.

Comme pour les plans, on va donner deux versions de la démonstration, une version "systèmes linéaires" et une version "déterminant", cette dernière étant reportée à la fin de la section.

Démonstration. — (de la proposition 1.24, basée sur la résolution d'un système linéaire)

Soit $A=(a_1,a_2,a_3)\in\mathcal{E}=\mathbf{R}^3$ un point de $\mathcal{D}$, et $\overrightarrow{u}=(b_1,b_2,b_3)\in\overrightarrow{\mathcal{E}}=\mathbf{R}^3$ avec $(b_1,b_2,b_3)\neq(0,0,0)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Soit $M=(x,y,z)\in\mathcal{E}=\mathbf{R}^3$ On a donc $\overrightarrow{AM}=(x-a_1,y-a_2,z-a_3)$ La condition $M\in\mathcal{D}$ équivaut donc à

$$\exists t\in\mathbf{R}, \quad \left\{\begin{array}{lll} b_1\cdot t & = & x-a_1 \\ b_2\cdot t & = & x-a_2 \\ b_3\cdot t & = & z-a_3 \end{array}\right.$$

En d'autres termes, $M = (x, y, z) \in \mathcal{D}$ si et seulement si le système d'inconnue $t \in \mathbf{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_1 \cdot t & = & x - a_1 \\ b_2 \cdot t & = & y - a_2 \\ b_3 \cdot t & = & z - a_3 \end{array}\right. \qquad (S)$$

admet au moins une solution. Insistons sur le fait que dans ce système, la seule inconnue est t, tous les autres noms de variables représentant des paramètres et non des inconnues.

Rappelons que par hypothèse on a $(b_1, b_2, b_3) \neq 0$. Supposons pour fixer les idées qu'on a $b_1 \neq 0$. Les autres cas se traite similairement en échangeant le rôle des variables.

Pour étudier ce système, on va :

1. multiplier la deuxième équation par b_1
2. remplacer la deuxième équation par elle-même moins la première équation multipliée par b_2
3. remplacer la troisième équation par elle-même moins la première équation multipliée par b_3.

Comme précédemement, on verra plus loin que ces opérations fournissent un système équivalent au système initial (S). Ainsi le système (S) équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_1 \cdot t & = & x - a_1 \\ 0 & = & b_1(y - a_2) - b_2(x - a_1) \\ 0 & = & b_1(z - a_3) - b_3(x - a_1) \end{array}\right. \qquad (S')$$

et a donc que $(x, y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si le système (S') a au moins une solution.

De façon similaire au cas de l'étude de l'équation cartésienne d'une droite dans le plan, on voit donc que la condition $(x, y) \in \mathcal{D}$ équivaut à la condition

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_1(y - a_2) - b_2(x - a_1) & = & 0 \\ b_1(z - a_3) - b_3(x - a_1) & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui se réécrit

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} -b_2 x & +b_1 y & & -a_2 b_1 + b_2 a_1 & = 0 \\ -b_3 x & & +b_1 z & -a_3 b_1 + b_3 a_1 & = 0 \end{array}\right.$$

On a donc bien le résultat annoncé, avec

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (-b_2, b_1, 0) \quad \text{et} \quad (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (-b_3, 0, b_1),$$

sachant que ces deux vecteurs sont bien non colinéaires (cela découle du fait que $b_1 \neq 0$, faites la vérification). $\square$

Exemple. — *On traitera un exemple explicite pendant la séance de cours.*

Il est à noter que chacune des deux équations intervenant dans un système d'équations cartésiennes d'une droite est l'équation cartésienne d'un plan. Ainsi, un système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace peut s'interpréter comme la représentation d'une droite comme l'intersection de deux plans de l'espace.

La réciproque de la proposition précédente consiste dans la pratique, comme dans les cas précédents, à passer d'un système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace à une représentation paramétrique, mais cette fois des manipulations non triviales sont en jeu.

Proposition 1.25. — *Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ des réels tels que les vecteurs $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont non colinéaires. Alors*

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 & = & 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 & = & 0 \end{cases} \}$$

est une droite de $\mathcal{E}$.

Démonstration. — Comme $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont non colinéaires, ils sont non nuls tous les deux. En particulier, quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. On considère alors le vecteur

$$\alpha_2 \cdot (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) - \alpha_1 \cdot (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

dont la première coordonnée est nulle, et qui n'est pas nul puisque $\alpha_1 \neq 0$ et par hypothèse de non colinéarité. Quitte à permuter les deux dernières coordonnées, on peut supposer que la deuxième coordonnée de ce vecteur, soit $\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2$, est non nulle. On résout alors le système d'inconnues $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 & = & 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 & = & 0 \end{cases} \qquad (S)$$

en effectuant les manipulations suivantes, qui produisent un système équivalent :

1. multiplier la deuxième équation par α_1 ;
2. remplacer la deuxième équation par elle-même moins la première équation multipliée par α_2.

Ainsi (S) équivaut au système :

$$\begin{cases} \alpha_1 x & +\beta_1 y & +\gamma_1 z & +\delta_1 & = & 0 \\ & +(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)y & +(\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2)z & +(\alpha_2\delta_1 - \alpha_1\delta_2) & = & 0 \end{cases}$$

On "tue" alors ainsi le terme en y de la première équation : on multiplie la première équation par $(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)$ (qui est non nul pour mémoire) et on remplace la première équation par elle-même moins la deuxième équation multipliée par β_1.

En posant, pour alléger les notations (rappel : dans la pratique, on manipulera en général des valeurs explicites, ce qui allègera considérablement les calculs de toute façon)

$$A_{1,1} = (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\alpha_1, \quad A_{1,3} = (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\gamma_1 - (\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2)\beta_1, \quad A_{1,4} = (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\delta_1 - (\alpha_2\delta_1 - \alpha_1\delta_2)\beta_1$$

$$A_{2,2} = (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2), \quad A_{2,3} = (\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2), \quad A_{2,4} = (\alpha_2\delta_1 - \alpha_1\delta_2)$$

le système précédent équivaut alors au système

$$\begin{cases} A_{1,1}\cdot x & & +A_{1,3}\cdot z & +A_{1,4} & = & 0 \\ & +A_{2,2}\cdot y & +A_{2,3}\cdot z & +A_{2,4} & = & 0 \end{cases}$$

soit encore au système (pour mémoire, $A_{1,1}\neq 0$ et $A_{2,2}\neq 0$)

$$\begin{cases} x & & = & -\frac{A_{1,3}}{A_{1,1}}\cdot z-\frac{A_{1,4}}{A_{1,1}} \\ & y & = & -\frac{A_{2,3}}{A_{2,2}}\cdot z-\frac{A_{2,4}}{A_{2,1}} \end{cases}$$

Un peu d'attention montre alors qu'on a $(x,y,z)\in\mathcal{D}$ si et seulement si

$$\exists t\in\mathbf{R},\quad \begin{cases} x & = & -\frac{A_{1,3}}{A_{1,1}}\cdot t-\frac{A_{1,4}}{A_{1,1}} \\ y & = & -\frac{A_{2,3}}{A_{2,2}}\cdot t-\frac{A_{2,4}}{A_{2,1}} \\ z & = & t \end{cases}$$

d'où le résultat d'après la proposition 1.13 puisqu'évidemment

$$\left(-\frac{A_{1,3}}{A_{1,1}},-\frac{A_{2,3}}{A_{2,2}},1\right)\neq(0,0,0).$$

□

Exemple. — *On traitera un exemple explicite pendant la séance de cours.*

1.2.8. Diverses représentations d'une droite de l'espace. — On a vu au moins quatre représentations possibles :

— donnée d'un point et d'un vecteur directeur
— donnée de deux points distincts
— donnée d'un système de deux équations cartésiennes
— donnée d'une représentation paramétrique

Il faut savoir passer de l'une de ces représentations à l'autre, en s'aidant si besoin des résultats précédents (et le cas échéant de leurs démonstrations)

1.2.9. Diverses représentations d'un plan de l'espace. — On a vu au moins quatre représentations possibles :

— donnée d'un point et d'un couple de vecteurs directeurs
— donnée de trois points non alignés
— donnée d'une équation cartésienne
— donnée d'une représentation paramétrique

Il faut savoir passer de l'une de ces représentations à l'autre en s'aidant si besoin des résultats précédents (et le cas échéant de leurs démonstrations)

Il y a d'autres représentations possibles d'un plan de l'espace :

— donnée d'un point du plan et d'un vecteur normal (vu au lycée, voir à la fin du chapitre pour mémoire)
— donnée d'une droite contenue dans le plan et d'un point du plan non contenu dans cette droite
— donnée de deux droites sécantes contenues dans le plan
— donnée de deux droites parallèles contenues dans le plan

Les trois dernières sont justifiées théoriquement par les propositions suivantes.

Proposition 1.26. — *Soit A un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$ ne contenant pas A. Alors il existe un unique plan $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ contenant A et $\mathcal{D}$. Si B est un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, ce plan est le plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u})$.*

Proposition 1.27. — *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de $\mathcal{E}$ ayant un unique point d'intersection A. Alors il existe un unique plan $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u'}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$, ce plan est le plan $P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$.*

Proposition 1.28. — *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites disjointes de $\mathcal{E}$ ayant un vecteur directeur commun. Alors il existe un unique plan $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si A est un point de $\mathcal{D}$, B un point de $\mathcal{D}'$ et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur commun à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, ce plan est le plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u})$.*

1.2.10. Intersection de deux plans de l'espace. —

Proposition 1.29. — *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace. Alors une et une seule des trois propriétés suivantes est vraie :*

1. *$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite ;*
2. *$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \varnothing$;*
3. *$\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.*

Dans le cas 1), on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont *sécants*. Dans les cas 2) et 3), on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont *parallèles*.

Dans la pratique, *si* $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont représentés chacun par une équations cartésienne, déterminer le cas dans lequel on se trouve peut se faire en résolvant le système formé par les deux équations. Si les plans sont sécants, la résolution aboutira à une représentation paramétrique de la droite commune. Si les plans sont confondus, la résolution aboutira à une représentation paramétrique du plan.

Exemple. — *On traitera un exemple explicite pendant la séance de cours.*

Bien sûr, on peut aussi avoir des situations au moins l'un des plans n'est pas donné par une équation cartésienne. On en parlera en cours.

1.2.11. Intersection de deux droites de l'espace. —

Proposition 1.30. — *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux plans de l'espace. Alors une et une seule des quatre propriétés suivantes est vraie :*

1. *$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est un point ;*
2. *$\mathcal{D} = \mathcal{D}'$;*
3. *$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un vecteur directeur commun ;*
4. *$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'ont pas de vecteur directeur commun.*

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaire (c'est à dire : il existe un plan qui les contient toutes les deux) si et seulement si on est dans un des cas 1), 2) ou 3).

Dans les cas 2) et 3), on dit alors que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles

Dans le cas 1), on dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.

Dans le cas 4), c'est à dire, quand $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires, on dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont… non coplanaires.

Dans la pratique, *si* $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont représentés chacun par un système d'équations cartésiennes, déterminer le cas dans lequel on se trouve peut se fait en résolvant le système formé par la concaténation des deux systèmes (système de 4 équations à 3 inconnues) .

Remarque. — La résolution d'un tel système ne permet pas distinguer entre les cas 3) et 4) ; pour distinguer entre 3) et 4) il est nécessaire de déterminer un vecteur directeur de chacune des droites.

Exemple. — *On traitera un exemple explicite pendant la séance de cours.*

Bien sûr, on peut aussi avoir des situations au moins l'une des droites n'est pas donnée par un système d'équations cartésiennes. On en parlera en cours.

1.2.12. Intersection d'une droite et d'un plan de l'espace. —

Proposition 1.31. — *Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Alors une et une seule des quatre propriétés suivantes est vraie :*

1. *$\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ est un point ;*
2. *$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D}$, en d'autres termes $\mathcal{D}$ est contenue dans $\mathcal{P}$;*
3. *$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \varnothing$.*

Dans le cas 1), on dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont *sécants*. Dans les cas 2) et 3), on dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont *parallèles*.

Dans la pratique, *si* $\mathcal{D}$ est représentée par un système de deux équations cartésiennes et $\mathcal{P}$ est représenté par une équation cartésienne, déterminer le cas dans lequel on se trouve (et déterminer une représentation paramétrique de l'intersection si elle est non vide) peut se faire en résolvant le système formé par la concaténation des trois équations (système de 3 équations à 3 inconnues)

Exemple. — *On traitera un exemple explicite pendant la séance de cours.*

Comme précédemment, on peut aussi rencontrer des situations où $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{P}$ ne sont pas représentés par des équations cartésiennes.

1.2.13. Intersection de trois plans. — L'intersection de deux plans est soit vide, soit une droite, soit un plan. L'intersection de trois plans se ramène donc à l'étude de l'intersection de deux plans ou d'un plan et d'une droite. Dans la pratique, *si* les trois plans sont donnés par chacun par une équation cartésienne, on résout un système de 3 équations à 3 inconnues.

1.2.14. Produit vectoriel. —

1. **Définitions et propriétés du produit vectoriel**

   On définit ici le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace, qui peut être vu comme une émanation de la théorie générale des déterminants. On s'en sert ensuite pour donner des démonstrations alternatives de certains des résultats précédents. Notamment, on retrouve le point de vue adopté au lycée pour les équations cartésiennes de plans en termes de vecteur normal.

   Définition 1.32. — Soit $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \mathbf{R}^3$. Le *produit vectoriel* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, est l'élément de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ donné par
   $$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

   Exercice Montrer que
   $$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = 0.$$

   Proposition 1.33. — *(a) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est le vecteur nul.*

   Par ailleurs, supposons que la 3ème composante de $\overrightarrow{u}$ est non nulle. Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si les composantes d'indices 1 et 2 de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ sont nulles. Énoncé similaire si la 1ère ou le 2ème composante de $\overrightarrow{u}$ est non nulle.

   (b) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires *de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Soit $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$. Alors $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si et seulement si $\overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = 0$*

2. **Produit vectoriel, équations cartésiennes de plans et vecteurs normaux**

   On démontre à présent la proposition 1.22 à l'aide du produit vectoriel.

Démonstration. — (de la proposition 1.22 avec le produit vectoriel)

Soit $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{E} = \mathbf{R}^3$, $\overrightarrow{u} = (b_1, b_2, b_3) \in \overrightarrow{\mathcal{E}} = \mathbf{R}^3$ et $\overrightarrow{v} = (c_1, c_2, c_3) \in \overrightarrow{\mathcal{E}} = \mathbf{R}^3$ tel que $\mathcal{P} = P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Soit $M = (x, y, z) \in \mathcal{E} = \mathbf{R}^3$. On a donc $\overrightarrow{AM} = (x - a_1, y - a_2, z - a_3)$

Posons $(\alpha, \beta, \gamma) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. D'après la proposition 1.33, on a $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ Par ailleurs d'après cette même proposition, on a
$$\overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = 0$$

Ainsi on a
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x - a_1, y - a_2, z - a_3) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha(x - a_1) + \beta(y - a_2) + \gamma(z - a_3) = 0 \end{aligned}$$