Exercices de TD du module AG2[1]

Feuille d'exercices n°1

Droites du plan, droites et plans de l'espace

1. Droites du plan

Dans toute cette partie, on se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Les points sont exprimés par leurs coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ et les vecteurs par leurs coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1. (1) Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur directeur, la pente, une représentation paramétrique et une équation cartésienne de la droite (AB) :

(a) $A(2,3)$ et $B(-1,4)$, (b) $A(-7,-2)$ et $B(-2,-5)$ (c) $A(3,3)$ et $B(3,6)$

(2) Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne de la droite passant par A et dirigées par $\vec{v}$:

(a) $A(2,1)$ et $\vec{v}(-3,-1)$, (b) $A(0,1)$ et $\vec{v}(1,2)$ (c) $A(-1,1)$ et $\vec{v}(1,0)$

(3) Déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne des droites définies comme suit :
  (a) la droite passant par le point $(0,4)$ et de pente 3,
  (b) la droite passant par le point $(2,-3)$ et parallèle à l'axe (Ox),
  (c) la droite passant par le point $(-2,5)$ et parallèle à la droite $\mathcal{D}\ :\ 8x+4y=3$.

Exercice 2. On considère le triangle ABC dont les côtés sont supportés par les droites d'équation $(AB)\ : x+2y=3, (AC)\ : x+y=2, (BC)\ : 2x+3y=4$.

(1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C.
(2) Déterminer les coordonnées des milieux A', B', C' des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
(3) Déterminer une équation cartésienne de chacune des médianes du triangle. Vérifier que les médianes sont concourantes.

2. Droites et plans de l'espace

Dans toute cette partie, on se place dans un espace affine E de dimension 3 muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points sont exprimés par leurs coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ et les vecteurs par leurs coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 3. (1) Dans chacuns des cas suivants, déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par les éléments indiqués.
  (a) A, B et C sont des points de $\mathcal{P}$
    (i) $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$ et $C(0,1,0)$.
    (ii) $A(1,1,1)$, $B(2,0,1)$ et $C(-1,2,4)$.
  (b) A est un point de $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$

[1]À certaines modifications de forme près, ces feuilles d'exercices sont celles du module AG2 de 2020-2021 dont je remercie le responsable de m'avoir transmis les sources latex ; je remercie aussi les responsables et contributeurs du site Exo7 dont de nombreux exercices sont issus.

(i) $A(1,2,1)$, $\vec{u}(4,0,3)$ et $\vec{v}(1,3,-1)$.
(ii) $A(1,0,2)$, $\vec{u}(2,-1,3)$ et $\vec{v}(-1,4,5)$.

(c) A est un point de $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$ est une droite contenue dans $\mathcal{P}$

(i) $A(0,0,0)$ et $\mathcal{D}\ :\left\{\begin{array}{l} x+y-z+3=0 \\ 4x-y+2z=0 \end{array}\right.$

(ii) $A(1,1,0)$ et $\mathcal{D}\ :\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=-1+2t \\ z=1-3t \end{array}\right.,\quad t\in\mathbb{R}$

(d) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont des droites contenues dans $\mathcal{P}$

(i) $\mathcal{D}\ :\left\{\begin{array}{l} x+y-z+3=0 \\ x-y-2=0 \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}'\ :\left\{\begin{array}{l} 3x-y-z+5=0 \\ x+y-z+1=0 \end{array}\right.$

(ii) $\mathcal{D}\ :\left\{\begin{array}{l} x+2y-z+1=0 \\ x+3y+z-4=0 \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}'\ :\left\{\begin{array}{l} 2x+y-3z+7=0 \\ 3x+2y+z-1=0 \end{array}\right.$

(2) Montrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :

$$\left\{\begin{array}{l} x=2+s+2t \\ y=2+2s+t \\ z=1-s-t \end{array}\right.,\quad (s,t)\in\mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} x=1+3s'-t' \\ y=3+3s'+t' \\ z=1-2s' \end{array}\right.,\quad (s',t')\in\mathbb{R}^2$$

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont-ils parallèles ou sécants ? Dans ce dernier cas, déterminer alors un point et un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}=\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$.

(1) $\mathcal{P}: 5x-y-1=0$ et $\mathcal{P}': z=3$.
(2) $\mathcal{P}: x+y+z+1=0$ et $\mathcal{P}': 2x-y+3z+2=0$.
(3) $\mathcal{P}: 2x-z+1=0$ et $\mathcal{P}': 4x-3y+2z+5=0$.
(4) $\mathcal{P}: 4x-6y+8z-1=0$ et $\mathcal{P}': -6x+12y-9z+11=0$.
(5) $\mathcal{P}: x+y+z+1=0$ et $\mathcal{P}': 2x+2y+2z+3=0$.

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, quelle est la nature de l'intersection des trois plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$? Si c'est un point en déterminer les coordonnées, si c'est une droite en déterminer un point et un vecteur directeur.

(1) $\mathcal{P}: z=1$, $\mathcal{P}': x-y-2=0$ et $\mathcal{P}": 4x-2y+z+2=0$.
(2) $\mathcal{P}: 4x-2y+3z+5=0$, $\mathcal{P}': 3x+y-z+2=0$ et $\mathcal{P}": x-y+z+1=0$.
(3) $\mathcal{P}: 4x-2y+10z-4=0$, $\mathcal{P}': -10x+5y-25z+13=0$ et $\mathcal{P}": x+y-z+1=0$.
(4) $\mathcal{P}: 3x-y+2z-5=0$, $\mathcal{P}': x-y+3z-7=0$ et $\mathcal{P}": 4x+2y-z+1=0$.
(5) $\mathcal{P}: x-y+2z-1=0$, $\mathcal{P}': 2x+y+z+3=0$ et $\mathcal{P}": x-4y+5z-6=0$.
(6) $\mathcal{P}: x-y+2z-1=0$, $\mathcal{P}': 2x+y-z+1=0$ et $\mathcal{P}": x+5y-8z+2=0$.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ? Si elles sont sécantes déterminer leur point d'intersection et si elles sont parallèles déterminer un vecteur directeur commun.

(1) $\mathcal{D}\ :\left\{\begin{array}{l} x+y-z+2=0 \\ x+y+z+1=0 \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}'\ :\left\{\begin{array}{l} 3x-y+2z-7=0 \\ x-y=0 \end{array}\right.$

(2) $\mathcal{D}\ :\left\{\begin{array}{l} x=1-2t \\ y=t+2 \\ z=3t+1 \end{array}\right.\ t\in\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}'\ :\left\{\begin{array}{l} x=3t-1 \\ y=-t+2 \\ z=2t \end{array}\right.\ t\in\mathbb{R}$

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, dire si la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont parallèles ou sécants. Dans ce dernier cas, déterminer alors leur point d'intersection.

(1) $\mathcal{D}:\left\{\begin{array}{l} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{array}\right.$ et $\mathcal{P}: 4x-3y+7z-7=0$.

(2) $\mathcal{D}:\left\{\begin{array}{l} x=3+2t \\ y=5-3t \\ z=2-2t \end{array}\right.,\quad t\in\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}: -3x+2y+3z-5=0$.

Feuille d'exercices n°2

Systèmes d'équations linéaires

Pour tous les exercices, on gardera les traces des opérations élémentaires effectuées.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations linéaires suivants, **en utilisant la méthode du pivot** :

a) $\begin{cases} x+2y &= 8 \\ 3x-4y &= 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y &= 10 \\ 2x-2y &= -4 \\ 3x+5y &= 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y &= 7 \\ 3x+2y &= 12 \\ 4x-3y &= 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+3z &= 6 \\ 2x-3y+2z &= 14 \\ 3x+y-z &= -2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y-z &= 2 \\ 2x-y+2z &= 3 \\ x+4y-5z &= 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+z &= 4 \\ 2x+y+z &= 4 \\ x+5y-z &= 2 \end{cases}$

Exercice 2. Même question pour les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} -2x+y-z-t &= -1 \\ 2x+2y-2t &= 1 \\ -2x-y-z-2t &= 1 \\ -2x+y-t &= -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+z+t &= 2 \\ x-t &= 4 \\ y+t &= -1 \\ y+z-t &= 1 \end{cases}$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes d'équations linéaires suivants, **en utilisant la méthode du pivot** :

a) $\begin{cases} ix-(1-i)y-(1-i)z &= i \\ -ix-(1+i)y-(1+i)z &= -i \\ (1+i)y+(1-i)z &= 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+iz &= 1+i \\ -x-y+z &= 1-i \\ ix+y-z &= i \end{cases}$

Exercice 4. Soit m un paramètre réel. Discuter et résoudre suivant les valeurs de m les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x+y+z &= m+1 \\ mx+y+(m-1)z &= m \\ x+my+z &= 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1+m)x+y+z &= 2 \\ x+y+(1-m)z &= 1+m \\ x+(1-m)y+z &= 1-m \end{cases}$

Exercice 5. Soit m un paramètre complexe. Discuter et résoudre suivant les valeurs de m le système suivant :

$$\begin{cases} x-my+m^2z &= m \\ mx-m^2y+mz &= 1 \\ mx+y-m^3z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 6. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x+by+az &= 1 \\ x+aby+z &= b \\ ax+by+z &= 1 \end{cases}$$

(1) Pour quelles valeurs de a et de b le système admet-il une solution unique ?
(2) Dans ce dernier cas, déterminer cette solution.
(3) Discuter et résoudre le système dans le cas contraire.

Exercice 7. Soient a, b, c et d des paramètres réels. On considère le système d'équations linéaires suivant : $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ ax+by+cz &= d \\ a^2x+b^2y+c^2z &= d^2 \end{cases}$

(1) Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c le système admet-il une solution unique ?
(2) Dans ce dernier cas, déterminer cette solution.
(3) Discuter et résoudre le système dans le cas contraire.

Exercice 8. *(plus dur)* Soient n un entier strictement positif et $a_1, \dots, a_n$ des paramètres réels. On considère le système de n équations à n inconnues donné par :
$x_i + x_{i+1} = 2a_i$, pour tout i de $\{1, \cdots, n-1\}$ et $x_n + x_1 = 2a_n$.

(1) Résoudre le système pour $n = 3$ et $n = 4$.
(2) Montrer que si n est impair, le système admet une unique solution que l'on calculera.
(3) On suppose n pair. Déterminer les conditions sur les a_i pour que le système admette des solutions, et déterminer alors ces solutions.

Exercice 9. *(plus dur)* Soient n un entier strictement positif et $\lambda, a_1, \cdots, a_n$ des paramètres réels. On considère le système de n équations à n inconnues donné par :
$x_1 + \cdots + x_{i-1} + \lambda x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n = a_i$, pour tout i de $\{1, \cdots, n-1\}$

(1) Pour quelles valeurs du paramètre λ le système admet-il une solution unique ? Calculer alors celle-ci (on pourra se servir de $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$).
(2) Dans le cas contraire, quelles sont les conditions sur $a_1, \cdots, a_n$ pour que le système admette des solutions ?

Exercice 10. Déterminer l'unique polynôme à coefficients réels $P(X)$ de degré au plus 3 vérifiant : $P(1) = 0$, $P(-1) = -4$, $P(2) = 5$ et $P(-2) = -15$.

Exercice 11. Déterminer le polynôme P à coefficients réels de degré 3 tel que $P(1) = 1$, $P(2) = 5$, $P'(1) = 2$ et $P'(2) = 9$, où P' est le polynôme dérivé de P.

Exercice 12. Déterminer trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme P à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3, on ait :

$$\int_2^4 P(x)\, dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$

Feuille d'exercices n°3

Calcul matriciel

1. Somme et produit

Exercice 1. On considère les matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer la somme $A_1 + A_2$.

Exercice 2. Même question avec les matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soient A et B deux matrices de même taille. Montrer que si $A + B = A$, alors B est la matrice nulle.

Exercice 4. Soit A une matrice à coefficients réels. Que vaut $0 \cdot A$? Et $1 \cdot A$? Pour tous réels λ et μ, justifier l'affirmation $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$. Pour tout entier naturel strictement positif n, justifier l'assertion $nA = A + \cdots + A$ (n occurences de A dans le membre de droite).

Exercice 5. On considère les matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.
Calculer le produit A_1A_2. Peut-on effectuer le produit A_2A_1 ?

Exercice 6. Soient x, y, z des réels. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. Quels produits sont possibles ? Les calculer !

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, calculer les produits matriciels A_1A_2 et A_2A_1 :
$a) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b) A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. On considère les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Vérifier la relation $(AB)C = A(BC)$.

Exercice 9. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, B^2, AB et BA.

Exercice 10. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^4 = I$ et $B^3 = I$, mais que $(AB)^{12} \neq I$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer, si c'est possible, des matrices B et B' telles que $BA = I_2$ et $AB' = I_3$, où I_2 et I_3 désignent les matrices unités de $M_2(\mathbb{R})$ et de $M_3(\mathbb{R})$ respectivement.

2. Puissances

Exercice 12. Calculer les puissances successives de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel p, calculer A^p et B^p . Montrer que $AB = BA$. Calculer $(A+B)^p$.

Exercice 14. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer C^4 , et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C^n ainsi que C^{-1} et $(C^2)^{-1}$.

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer A^n (procéder par récurrence).

3. Inverse

Exercice 16. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^{-1}, B^{-1}, (AB)^{-1}, (BA)^{-1}, A^{-2}$.

Exercice 17. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)^{-1}$.

Exercice 18. Calculer l'inverse des matrices suivantes : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ (où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$), $\quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 19. Dans $M_2(\mathbb{C})$, on considère les matrices $J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer les puissances successives de J et de K. En déduire que J et K sont inversibles et déterminer leurs inverses.

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^4 = A$, mais que $A^3 \neq I$. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $2A - A^2$. En déduire (quasiment sans aucun calcul) que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 22. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 - A^2 + 4A + 6I = 0$, où I désigne la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$. En déduire (quasiment sans aucun calcul) que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 23. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances successives de J. La matrice J est-elle inversible ?

Exercice 24. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que $A(A - I)(A - 2I) = 0$. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 25. Soient $B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer $(B - I)(B + I)(B - 2I)$. La matrice $C = B - 2I$ est-elle inversible ?

4. Rang et système linéaires

Exercice 26. (1) Donner la définition du rang d'une matrice.
(2) Calculer une forme échelonnée suivant les lignes de la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$
Expliquer brièvement toutes les étapes.
(3) Quel est le rang de A ?

Exercice 27. (1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer une forme échelonnée suivant les lignes de la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1-4a \\ 1 & 2 & 4 & 2-6a \\ 3 & 2 & 8 & 1-7a \end{pmatrix}$$
Expliquer les étapes du calcul et discuter suivant les valeurs du paramètre a . Déterminer le rang de M.
(2) En déduire la résolution du système linéaire $\begin{cases} x + y + 3z &= 1 - 4a \\ x + 2y + 4z &= 2 - 6a \\ 3x + 2y + 8z &= 1 - 7a \end{cases}$ suivant les valeurs du paramètre a.

Exercice 28. (1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer une forme échelonnée suivant les lignes de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & a+4 \\ 2 & 4 & 10 & 5a+21 \\ 5 & 4 & 13 & 3a+12 \end{pmatrix}$$

Expliquer les étapes du calcul et discuter suivant les valeurs du paramètre a . Déterminer le rang de M.

(2) En déduire la résolution du système linéaire $\left\{ \begin{array}{ll} x + \ y + 3z & = a+4 \\ 2x + 4y + 10z & = 5a+21 \\ 5x + 4y + 13z & = 3a+12 \end{array} \right.$ suivant les valeurs du paramètre a.

Feuille d'exercices n°4

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1. Vecteurs dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. (1) Déterminer les solutions du système linéaire $\left\{\begin{array}{ll} 3x - y & = 3 \\ 5x + 2y & = 16 \end{array}\right.$.

(2) Représenter graphiquement les solutions de ce système comme intersection de droites dans le plan.

(3) Réinterpréter ce système comme combinaison linéaire de deux vecteurs. Faire un dessin.

Exercice 2. Soient x et y des réels. On considère les vecteurs de de $\mathbb{R}^4$ suivants : $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (1,-2,3,-4)$, $w_1 = (x,1,y,1)$ et $w_2 = (x,1,1,y)$. Existe-t-il des valeurs de x et y telles que $w_1 \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$? Et telles que $w_2 \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Exercice 3. On considère les vecteurs de de $\mathbb{R}^3$ suivants : $v_1 = (2,3,-1)$, $v_2 = (1,-1,-2)$, $w_1 = (3,7,0)$ et $w_2 = (5,0,-7)$. Montrer que $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{w_1, w_2\}$ sont égaux.

Exercice 4. On considère les vecteurs de de $\mathbb{R}^4$ suivants : $v_1 = (0,1,-2,1)$, $v_2 = (1,0,2,-1)$, $v_3 = (3,2,2,-1)$, $v_4 = (0,0,1,0)$, $v_5 = (0,0,0,1)$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

(1) $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\}$.
(2) $(1,1,0,0) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}$.
(3) $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2, v_3, v_4\} = \mathrm{Vect}\{v_2\}$.
(4) $\mathrm{Vect}\{v_4, v_5\} \cap \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \{0\}$.

2. Sous-Espaces Vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Exercice 5. Déterminer parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :
$E_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|x = 0\}$,
$E_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|y + t = 2\}$,
$E_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|3x + 2y + t = 0\}$,
$E_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|x + y = y + z = z + t = t + x\}$,
$E_5 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|xy = 0\}$.

Exercice 6. Déterminer parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :
$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|3x + 2y + 5z = 0\}$,
$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|x + 2y - z = 3\}$,
$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|y + z = 5 \text{ et } x = z\}$,
$F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|x + 2y + z = 0 \text{ et } 3x + 2y - z = 0\}$,
$G_1 = \{(u, 3u, 5u), u \in \mathbb{R})\}$,
$G_2 = \{(2+v, 3v, 1-v), v \in \mathbb{R}\}$,
$G_3 = \{(u+v, 3u+2v, u-v+5), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$,
$G_4 = \{(3u-v, 2u+v, u+v), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.
Interpréter géométriquement ces sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7. Décrire tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (on donnera leur dimension, leur interprétation géométrique et le nombre d'équations qui les caractérisent).

Exercice 8. Montrer que les vecteurs $a_1 = (1,2,3)$ et $a_2 = (2,-1,1)$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ que $b_1 = (1,0,1)$ et $b_2 = (0,1,1)$:

(1) en écrivant b_1 et b_2 comme combinaisons linéaires de a_1 et de a_2 .
(2) en déterminant une équation qui caractérise le sous-espace vectoriel engendré par a_1 et a_2 .

Exercice 9. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ V_1 et V_2 définis par :
$V_1 = \text{Vect}\{(2,3,-1),(1,-1,-2),(1,9,4)\}$ et $V_2 = \text{Vect}\{(3,7,0),(5,0,-7)\}$.
(1) Peut-on affirmer que $V_1 \subseteq V_2$?
(2) Peut-on affirmer que $V_2 \subseteq V_1$?
(3) Calculer $\dim V_1$ et $\dim V_2$ et donner une description géométrique des sous-espaces V_1 et V_2 .

3. Dépendance linéaire et bases

Exercice 10. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base pour chacun d'eux :
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|x+2y+2z=0\}$,
$E_2 = \{(\lambda+\mu, \lambda-\mu, \lambda+\mu) | \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$,
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|y+z=0 \text{ et } x=0\}$,
$E_4 = \{(u,2u,u)|u \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 11. Soient $a = (1,-1,1)$, $b = (0,-1,2)$ et $c = (1,-2,3)$ trois éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
(1) Montrer que (a,b,c) est un système lié.
(2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (a,b,c). Déterminer une base de F .
(3) Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |x+2y+z=0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
(4) Montrer que $F = G$.

Exercice 12. Montrer que les vecteurs : $a_1 = (-1,1,1)$, $a_2 = (1,-1,1)$, $a_3 = (1,1,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées de $b = (2,-3,-1)$ dans la base (a_1,a_2,a_3).

Exercice 13. (1) Déterminer une équation définissant le sous-espace vectoriel E_1 de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $a_1 = (1,2,0,1)$, $a_2 = (2,3,0,3)$ et $a_3 = (3,2,1,2)$.
(2) Déterminer un système de deux équations définissant le sous-espace vectoriel E_2 de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $b_1 = (2,-1,4,0)$ et $b_2 = (-1,0,-3,4)$.

Exercice 14. (1) Les vecteurs suivants forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$? Si ce n'est pas le cas, déterminer la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.
$a_1 = (1,0,0,1)$ $a_2 = (0,1,0,0)$ $a_3 = (1,1,1,1)$ $a_4 = (1,1,1,0)$
(2) Même question pour les vecteurs : $a_1 = (1,1,2,1)$ $a_2 = (1,0,0,2)$ $a_3 = (2,3,4,3)$ $a_4 = (0,3,2,1)$.

Exercice 15. On considère un réel α et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $a = (1,1,\alpha)$, $b = (1,\alpha,1)$ et $c = (\alpha,1,1)$. Déterminer suivant les valeurs de α le rang du système (a,b,c).

Exercice 16. Soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $a_1 = (3,-2,-1,3)$, $a_2 = (1,0,2,4)$, et $a_3 = (1,-3,\lambda,\mu)$. Déterminer les valeurs de λ et μ telles que les vecteurs a_1, a_2 et a_3 soient dépendants. Préciser alors la relation de dépendance.

Exercice 17. (1) Déterminer une base du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^4$ décrit par :

$$E = \{(x,y,z,t)|x = y-3z \text{ et } z = 2t\}$$

Compléter cette base pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
(2) Même question pour le sous-espace : $F = \{(x,y,z,t)|x+y = y+z = z+t = t+x\}$

Exercice 18. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ contenant les vecteurs $a = (2,-2,3,1)$ et $b = (-1,4,-6,-2)$.

4. Applications linéaires

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire associée. Calculer et dessiner l'image par f de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et plus généralement, pour $x, y \in \mathbb{R}$, de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dessiner l'image par f du carré de sommets $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dessiner l'image par f du cercle inscrit dans ce carré.

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée. Calculer l'image par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et plus généralement d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 21. On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose aussi $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer l'image par f du vecteur v.
(2) Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Quelle est l'image par f du vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$?
(3) Quelle est la matrice de f ?
(4) Déterminer tous les vecteurs x de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = w$.

Exercice 22. Déterminer la matrice A de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 23. Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Quelle est la matrice de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(v_1) = 2v_1$ et $f(v_2) = 3v_2$?

5. Pour aller plus loin...

Exercice 24. Soit n un entier strictement positif. La partie de $\mathbb{R}^n$ formée par les vecteurs ayant pour 1ère, 2ème, ..., n-ième composante des nombres en progression arithmétique est-elle un sous-espace de $\mathbb{R}^n$? Même question en remplaçant "arithmétique" par "géométrique".

Exercice 25. Soit n un entier strictement positif. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ suivants : $a_1 = (1, 1, 0, \cdots, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1, 0, \cdots, 0)$,..., $a_{n-1} = (0, \cdots, 0, 1, 1)$, $a_n = (1, 0, \cdots, 0, 1)$. Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ? Dans le cas contraire, déterminer la (les) relation(s) de dépendance. On pourra commencer par étudier les cas $n = 3$ et $n = 4$.

Exercice 26. Montrer que les vecteurs de $\mathbb{C}^3$: $a_1 = (1, -1, i)$, $a_2 = (1, -1, 1)$, $a_3 = (i, 1, -1)$ sont linéairement indépendants et calculer les coordonnées du vecteur $b = (1 + i, 1 - i, i)$ dans la base (a_1, a_2, a_3).

Exercice 27. On considère les vecteurs de $\mathbb{C}^3$: $a_1 = (1+i, 1+i, 1-i)$ $a_2 = (i, -i, -1-i)$ $a_3 = (1-i, 1-i, 1+i)$ $a_4 = (1, 1, 1)$ $a_5 = (1-2i, 1, 0)$.

(1) Vérifier que (a_1, a_2, a_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.
(2) Déterminer les coordonnées de a_4 dans la base (a_1, a_2, a_3).
(3) Montrer que (a_1, a_2, a_5) est un système lié. Déterminer une équation du plan engendré par ces vecteurs.

Exercice 28. Montrer que les vecteurs de $\mathbb{C}^4$ suivants forment un système lié et déterminer une relation linéaire non triviale entre ces vecteurs : $a_1 = (1, i, 1+i, -i)$ $a_2 = (-i, 0, 2-i, 1+i)$ $a_3 = (0, -1, 0, 1)$ $a_4 = (3i, -2-i, 3i-5, -i)$.

Exercice 29. On munit le plan d'un repère. Soit f la réflexion du plan par rapport à l'axe (Ox) et soit g la rotation d'angle $2\pi/3$ centrée à l'origine. Calculer la matrice de $f \circ g$. Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse. Interpréter géométriquement. Même question avec $g \circ f$.

Feuille d'exercices n°5

$\boxed{\text{Espaces vectoriels}}$

1. Exemples

Exercice 1. Revoir la partie du cours montrant que les ensembles suivants, muni de l'addition et la multiplication externe usuelles, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

(1) l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
(2) l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que les ensembles suivants, munis de l'addition et la multiplication externe usuelles, sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

(1) pour $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$, l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$;
(2) l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni des lois usuelles $+$ et $\cdot$ (alors qu'on note l'addition dans $\mathbb{R}$ avec le signe $+$, et la multiplication dans $\mathbb{R}$ sans symbole). On note $\mathbf{0}$ le vecteur nul de E.

On considère les vecteurs suivants de E :

$$f = \cos^2, g = \sin^2, h : x \mapsto \cos 2x, u : x \mapsto 1.$$

(1) Soient les vecteurs de E : $v = (3 \cdot f) + (2 \cdot g)$ et $w = 2 \cdot ((3 \cdot h) + ((-2) \cdot u))$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, préciser, en détaillant les calculs (au moins trois égalités) la valeur de $v(x)$ et de $w(x)$.
(2) Montrer que $f + g + ((-1) \cdot u) = \mathbf{0}$.
(3) Montrer que $h + u + ((-2) \cdot f) = \mathbf{0}$.

Exercice 4. Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni des lois usuelles $+$ et $\cdot$ (alors qu'on note l'addition dans $\mathbb{R}$ avec le signe $+$, et la multiplication dans $\mathbb{R}$ sans symbole). On note $\mathbf{0}$ le vecteur nul de E.

On considère les vecteurs suivants de E :

$$u : x \mapsto 1, i : x \mapsto x, f = x \mapsto 1-x,$$
$$g : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1/2 \\ 2 \text{ si } x \geq 1/2 \end{cases}, h : x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x < 1/2 \\ 0 \text{ si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

(1) Montrer que $f + i + ((-1) \cdot u) = \mathbf{0}$.
(2) Montrer que $g + h = 2 \cdot u$.

Exercice 5. Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels muni des lois usuelles $+$ et $\cdot$ (alors qu'on note l'addition dans $\mathbb{R}$ avec le signe $+$, et la multiplication dans $\mathbb{R}$ sans symbole). On note $\mathbf{0}$ le vecteur nul de E.

Soit $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ la fonction partie entière.

On considère les vecteurs r, u, v, w de E définis de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$r_n = (-1)^n, s_n = 1, t_n = n, u_n = 1, v_n = \left\lfloor 1 + \frac{n}{4} \right\rfloor, w_n = \sqrt{4n^2+4n+1}.$$

(1) Soient les vecteurs $f = (3 \cdot r) + (2 \cdot s)$ et $g = 2 \cdot ((3 \cdot u) + ((-2) \cdot t))$ de E.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Préciser, en détaillant les calculs (au moins trois égalités) la valeur de f_n et de g_n.
(2) A-t-on $u = v$?
(3) A-t-on $w = u + (2 \cdot t)$?

2. Sous-espaces vectoriels

Exercice 6. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel que l'on précisera :

(1) l'ensemble des suites réelles convergentes,
(2) l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
(3) l'ensemble des triplets $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ satisfaisant l'équation $2z_1 + 3z_2 - z_3 = 0$,
(4) l'ensemble des matrices antisymétriques de taille $n \in \mathbb{N}^*$.
(5) pour $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{C}_d[X]$ des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à d.

Exercice 7. Parmi les ensembles suivants, défini comme sous-ensemble d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E explicite, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

(1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$
(2) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t \text{ et } y = z\}$
(3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$
(4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\}$
(5) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$
(6) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$
(7) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$
(8) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante }\}$
(9) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ converge vers } 0\}$

Exercice 8. Les ensembles suivants, munis des opérations usuelles, sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

(1) L'ensemble des fonctions continues et positives sur $\mathbb{R}$,
(2) L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant 0 pour limite en $+\infty$,
(3) L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant 1 pour limite en $+\infty$,
(4) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ prenant la valeur 2 en l'origine,
(5) L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 2, 1)$,
(6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$,
(7) Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, le sous-ensemble des matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

3. Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 9. Par des considérations géométriques, répondre aux questions suivantes :

(1) Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ sont-elles supplémentaires ?
(2) Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?
(3) à quelle condition un plan vectoriel et une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 10. Trouver deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ distincts F et G tels que

(1) $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G \neq \{0\}$,
(2) $F + G \neq \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \{0\}$,
(3) $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \{0\}$,
(4) $F + G \neq \mathbb{R}^3$ et $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 11. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$.

(1) $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
(2) $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_4, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

(3) $\mathrm{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_2, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
(4) $\mathrm{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 12. Soient $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\big\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,\big\{(1, 1, 1)\big\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Déterminer deux vecteurs u, v tels que $F = \mathrm{Vect}\{u, v\}$.
(2) Calculer $F \cap G$ et montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$. Que conclure ?

Exercice 13. On considère les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ suivantes : $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(1) Quel est l'espace vectoriel F engendré par A et B ? Même question avec G engendré par C et D.
(2) Calculer $F \cap G$. Montrer que $F + G = M_2(\mathbb{R})$. Que peut-on conclure ?

Exercice 14. Soit $E = \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge } \big\}$. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 15. *(plus dur)* Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 16. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires (respectivement l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires) forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice 17. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques de taille n (respectivement l'ensemble $\mathcal{AS}_n$ des matrices anti-symétriques de taille n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ forme un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $M_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{AS}_n$.

4. Applications linéaires

Exercice 18. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{rll} f_1 & : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & (x, y) \mapsto (2x + y, x - y) \\ f_2 & : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & (x, y, z) \mapsto (xy, x, y) \\ f_3 & : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \\ f_4 & : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & (x, y) \mapsto (y, 0, x - 7y, x + y) \\ f_5 & : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & P \mapsto \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$$

Lorsque c'est le cas, déterminer leur noyau ainsi que leur image. Sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

Exercice 19. Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker f$ est stable par g, c'est-à-dire que l'image de $\ker f$ par g est inclus dans $\ker f$. Montrer de même que $\mathrm{Im}\, f$ est stable par g.

Feuille d'exercices n°6

Espaces vectoriels de dimension finie

1. Familles libres, familles génératrices

Exercice 1. Soit t un paramètre réel. Pour quelles valeurs de t la famille $\{(-1,t),(t^2,-t)\}$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle libre ? Même question avec la famille $\{(1,t,t^2),(t^2,1,1),(1,t,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Montrer que toute famille contenant une famille liée est liée. Montrer que toute famille incluse dans une famille libre est libre.

Exercice 3. *(plus dur)* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f\colon E \to F$ une application linéaire.

(1) Montrer que l'image par f d'une famille liée de E est une famille liée de F.
(2) Supposons f injective. Montrer que l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F.
(3) Supposons E de dimension finie. Soit $n = \dim(E)$ et $\{v_1,\ldots,v_n\}$ une base de E. Montrer que f est injective si et seulement si la famille $\{f(v_1),\ldots,f(v_n)\}$ est libre.

Exercice 5. Soit t un paramètre réel. Pour quelles valeurs de t la famille la famille $\{(0,t-1),(t,-t),(t^2-t,t-1)\}$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$? Même question avec la famille $\{(1,0,t),(1,t,t^2),(1,t^2,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Montrer que toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

Exercice 7.

Exercice 8. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f\colon E \to F$ une application linéaire. Soit $f : E \to F$ est une application linéaire.

(1) Montrer que l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
(2) Supposons E de dimension finie. Soit $n = \dim(E)$ et $\{v_1,\ldots,v_n\}$ une base de E. Montrer que f est surjective si et seulement si la famille $\{f(v_1),\ldots,f(v_n)\}$ est génératrice de F.

2. Bases

Exercice 9. Trouver toutes les manières d'extraire une base de $\mathbb{R}^2$ de la famille de vecteurs suivants : $v_1 = (-1,-3)$, $v_2 = (3,3)$, $v_3 = (0,0)$, $v_4 = (2,0)$, $v_5 = (2,6)$.

Exercice 10. On considère les vecteurs $v_1 = (2,1,-3)$, $v_2 = (2,3,-1)$, $v_3 = (-1,2,4)$ et $v_4 = (1,1,-1)$. Montrer que la famille $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x-y+z=0$. Extraire une base de ce sous-espace vectoriel de cette famille.

Exercice 11. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+3y-2z=0$. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^3$.
Faire de même avec le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par les équations $x+3y-2z=0$ et $y=z$.

Exercice 12. (1) Montrer que l'ensemble des matrices 3×3 à coefficient réels ayant leur diagonale nulle forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En déterminer une base.
(2) Faire de même avec l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré au plus $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$.

Exercice 13. Vrai ou faux ?
Soit $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. Soit $p \in \mathbb{N}$.

(1) On suppose $p \geqslant n$; alors toute famille de p vecteurs de E est génératrice.
(2) On suppose $p > n$; alors toute famille de p vecteurs de E est liée.
(3) On suppose $p < n$; alors toute famille de p vecteurs de E est libre.
(4) On suppose $p \geqslant n$; alors toute famille génératrice de p vecteurs de E est libre.
(5) On suppose $p \neq n$; alors toute famille de p vecteurs de E n'est pas une base.
(6) On suppose $p < n$; alors toute famille libre de p vecteurs de E peut se compléter en une base de E en rajoutant une famille de $n - p$ vecteurs bien choisis.

Exercice 14. (1) Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, -1, i)$, $v_2 = (-1, i, 1)$, $v_3 = (i, 1, -1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$.
(2) Calculer les coordonnées de $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.

Exercice 15. (1) Montrer que la famille $\{1, 1 - X, X - X^2, X^2 - X^3\}$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Décomposer $P = 3X - X^2 + 8X^3$ dans cette base.
(2) Montrer que la famille $\{1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\}$ forme une autre base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$. Décomposer $P = 3X - X^2 + 8X^3$ dans cette base.
(3) Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que toute famille de polynômes $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ avec $\deg P_i = i$, pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Dimension

Exercice 16. Soient $F = \mathrm{Vect}\{(1, 2, 3), (3, -1, 2)\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{(-7, 7, 0), (6, 5, 11)\}$. Montrer que l'un de ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ est inclus dans l'autre. En déduire que $F = G$.

Exercice 17. Soit $t \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \mathrm{Vect}\{(1, t, -1), (t, 1, 1)\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1)\}$. Calculer les dimensions de $F, G, F \cap G$ et $F + G$ en fonction du paramètre t.

Exercice 18. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 7, on considère des sous-espaces vectoriels F et G vérifiant $\dim F = 3$ et $\dim G \leqslant 2$. Que peut-on dire de la dimension des sous-espaces vectoriels $F \cap G$ et $F + G$?

Exercice 19. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $F \oplus G = E$,
(2) $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$,
(3) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Exercice 20. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

(1) *(plus dur)* Montrer que :
$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$
(2) On suppose que $\dim F + \dim G > \dim E$. Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Exercice 21. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, et H un hyperplan de E.

(1) Soit $v \in E \setminus H$. Montrer que H et $\mathrm{Vect}\{v\}$ sont des sous-espaces supplémentaires dans E.
(2) Soit H' un hyperplan de E différent de H. Calculer la dimension de $H \cap H'$.

Exercice 22. Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Exercice 23. *(plus dur)* Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de même dimension de E. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E supplémentaire à la fois de F et de G dans E.

4. Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 24. Quel est le rang de la famille de vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$?

Pour $t \in \mathbb{R}$, même question pour $\left\{\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}\right\}$.

Exercice 25. Mettre sous forme échelonnée par rapport aux colonnes la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & -2 & -1\\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Calculer son rang.

Faire de même avec $\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 5\\ -2 & 1 & 1 & 5\\ -1 & 2 & 1 & 4\\ 1 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Exercice 26. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de $\begin{pmatrix}2 & 4 & -5 & -7\\ -1 & 3 & 1 & 2\\ 1 & a & -2 & b\end{pmatrix}$ en fonction de a et b.

Exercice 27. Calculer les rangs des matrices des exercices précédents en utilisant les vecteurs lignes.

Exercice 28. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f\colon E \to F$ une application linéaire. Quelle inégalité relie $\operatorname{rang}\{f(v_1), \ldots, f(v_p)\}$ et $\operatorname{rang}\{v_1, \ldots, v_p\}$? Que se passe-t-il si f est injective ?

Exercice 29. Soit a et b deux réels et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b\\ 3 & 0 & 1 & -4\\ 5 & 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Montrer que $\operatorname{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\operatorname{rg}(A) = 2$?

Feuille d'exercices n°7

Applications linéaires en dimension finie

1. Applications linéaires et matrices

Exercice 1. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire qui envoie e_1 sur son opposé, qui envoie e_2 sur le vecteur nul et qui envoie e_3 sur la somme des trois vecteurs e_1, e_2, e_3. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer l'expression de $f((x, y, z))$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 2. On considère les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes :
(1) f_1 la symétrie par rapport à l'axe (Oy),
(2) f_2 la symétrie par rapport à l'axe $(y = x)$,
(3) f_3 la projection orthogonale sur l'axe (Oy),
(4) f_4 la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, déterminer la matrice de f_i dans la base canonique. Pour quelques valeurs du couple (i, j), calculer la matrices de $f_i \circ f_j$ dans la base canonique et, lorsque c'est possible, celle de f_i^{-1}.

Exercice 3. (1) Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x - 2y - 3z, 2y + 3z)$. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f. Vérifier sur cet exemple la validité du théorème du rang.
(2) Faire de même avec $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (-y + z, x + z, x + y)$.
(3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, faire de même avec l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui à X^k associe X^{k-1} pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et qui à 1 associe 0.

Exercice 4. Dans chacune des situations suivantes, calculer lorsque c'est possible la dimension du noyau et le rang de l'application linéaire f et dire si f peut être injective, surjective, bijective :
(1) $f\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ est une application linéaire surjective ;
(2) $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$ est une application linéaire injective ;
(3) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est une application linéaire surjective ;
(4) $f\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ est une application linéaire injective.

Exercice 5. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires f_A et f_B associées à A et B dans les bases canoniques.

Exercice 6. *(plus dur)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices carrées de même taille n telles que $AB = 0$ et $A + B$ est inversible. Montrer que $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B = n$.

Exercice 7. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans lui-même telle que $f^2 = f$.
(1) Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
(2) Supposons que E soit de dimension finie. Soit $n = \dim(E)$. et $r = \dim \operatorname{Im} f$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $f(e_i) = e_i$ si $i \leqslant r$ et $f(e_i) = 0$ si $i > r$. Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$: $f(P(X)) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.
(1) Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Dans le cas où $n = 3$, déterminer la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
(3) Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leurs dimensions respectives.
(4) Soit Q un élément de l'image de f. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

2. Changement de bases

Exercice 9. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (2x + y, 3x - 2y)$. Soit $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_1$ la base $(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right))$

(1) Calculer la matrice de f dans $\mathcal{B}_0$.
(2) Calculer les coordonnées de $f(v)$ dans $\mathcal{B}_0$.
(3) Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$.
(4) En déduire les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}_1$, et de $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.
(5) Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$.

Exercice 10. Même exercice que précédemment mais dans $\mathbb{R}^3$ avec $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x - 2y, y - 2z, z - 2x)$, avec $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e_1' = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

Exercice 12. Soient e_1, e_2, e_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note ϕ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\phi(e_1) = e_3$, $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.

(1) Écrire la matrice A de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3). Déterminer le noyau de ϕ.
(2) On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
(3) Calculer $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de ϕ dans la base (f_1, f_2, f_3) et déterminer la nature de l'application ϕ.
(4) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 13. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
(2) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.
(3) Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3} y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2} x_n - \dfrac{2}{3} y_n \end{cases}$.

Exercice 14. Soit $\mathbb{K}$ un corps et A, B deux matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ de même taille et semblables (i.e. il existe P inversible à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $B = P^{-1}AP$). Montrer que

(1) si l'une des matrices A et B est inversible, alors l'autre aussi,
(2) si l'une des matrices A et B est idempotente, alors l'autre aussi
(3) si l'une des matrices A et B est nilpotente, alors l'autre aussi,
(4) s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I$, alors $A = B$.
(5) A et B ont même trace.

Exercice 15. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_2(\mathbb{K})$. Montrer que A est semblable à sa transposée ${}^tA$.