Feuille d'exercices supplémentaires pour le module AG2

Dans tous les énoncés, le symbole $\mathbb{K}$ désigne un corps, que l'on peut imaginer être $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si on ne sait pas ce qu'est un corps.

Exercice 1. *(Autour de l'échelonnement ; unicité de la forme lignes échelonnée réduite)*
Soit n et p des entiers strictement positifs. Soit $A = [a_{i,j}] \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Rappelons que la matrice A est dite lignes échelonnée s'il existe un entier r tel que $0 \leq r \leq n$ et, si $r \geq 1$, une fonction strictement croissante

$$\pi \colon \{1, \dots, r\} \to \{1, \dots, p\}$$

(π comme "pivot"...) vérifiant les conditions suivantes :

(1) pour tout i vérifiant $r + 1 \leq i \leq n$, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on a $a_{i,j} = 0$;
(2) pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq r$, on a $a_{i,\pi(i)} \neq 0$ et pour tout j vérifiant $1 \leq j \leq \pi(i) - 1$, on a $a_{i,j} = 0$;

Rappelons que A est dite lignes échelonnée réduite si elle vérifie les conditions précédentes et en outre la condition suivante : pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq r$, on a $a_{i,\pi(i)} = 10$ et pour tout i' vérifiant $1 \leq i' \leq i - 1$, on a $a_{i',\pi(i)} = 0$.

(1) Avec les notations ci-dessus, pourquoi a-t-on nécessairement $r \leq p$?
(2) Vrai ou faux ? Les seuls coefficients qui peuvent apparaître dans une matrice échelonnée réduite sont des 0 et des 1.
(3) Montrer qu'une matrice carrée lignes échelonnée réduite qui n'a pas de ligne nulle est nécessairement la matrice identité
(4) Soit $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. On suppose que la matrice augmentée $(A|B)$ est lignes échelonnée (resp. lignes échelonnée réduite). Montrer que A est lignes échelonnée (resp. lignes échelonnée réduite).
(5) On considère deux matrices A et A' de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. On rappelle qu'on dit que A' est lignes équivalente à A si l'on peut passer de A à A' par une succession finie d'opérations élémentaires sur les lignes de A, en d'autres termes s'il existe un entier positif m et des matrices d'opérations élémentaires $E_1, \dots, E_m$ telles que

$$A' = E_m \cdot E_{m-1} \dots E_1 \cdot A.$$

  (a) Si vous savez ce que c'est qu'une relation d'équivalence, montrez que la relation "être lignes équivalente à" est une relation d'équivalence sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (en particulier A' est lignes équivalente à A si et seulement si A est lignes équivalente à A').
  (b) Montrer que A' est lignes équivalente à A si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P \cdot A$.
  (c) Soit B et B' des éléments de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. On considère les matrices augmentées $(A|B)$ et $(A'|B')$ qui sont des éléments de $M_{n,p+1}(\mathbb{K})$. Montrer que si $(A|B)$ et $(A'|B')$ sont lignes équivalentes alors A et A' sont lignes équivalentes

(6) On souhaite montrer que deux matrices lignes échelonnée réduite de même taille qui sont en outre lignes équivalentes sont égales.
  (a) Quel résultat du cours cela permettra-t-il d'obtenir ?
  (b) Soit n un entier strictement positif. On va montrer le résultat pour toutes les matrices à n lignes par récurrence sur le nombre de colonnes p. Écrire soigneusement l'hypothèse de récurrence. Traiter le cas $p = 1$.
  (c) Soit $p \geq 1$ tel que l'hypothèse de récurrence au rang p est vérifiée. Soit A et A' des élements de $M_{n,p}(\mathbb{K})$, et B et B' des éléments de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que les matrices augmentées $(A|B)$ et $(A'|B')$ sont lignes équivalentes et lignes réduites échelonnées. Pourquoi a-t-on $A = A'$? Pourquoi les systèmes (d'inconnues $X \in \mathbb{K}^p$) $AX = B$ et $A'X = B'$ sont-ils équivalents ?

(d) On conserve les notations et hypothèses précédentes. Montrer que le système $AX = B$ est incompatible si et seulement si $B = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (le 1 est en position p). En supposant le système $AX = B$ incompatible, montrer que $B = B'$. En supposant à présent le système $AX = B$ compatible, montrer que $B = B'$.
(e) Conclure.

Exercice 2. *(Associativité du produit matriciel)*
Démontrer soigneusement que le produit matriciel est associatif.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier et $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe des éléments $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et des entiers strictement positifs n_1, n_2 tels que

$$(A - \lambda_1 \cdot I_n)^{n_1} (A - \lambda_2 \cdot I_n)^{n_2} = 0$$

Montrez que A est inversible. Si le coeur vous en dit, généralisez.

Exercice 4. Soit $p \geq 1$ un entier et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

(1) Montrer que $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ qui contient $v_1, \ldots, v_p$.
(2) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. On suppose que F contient $v_1, \ldots, v_p$. Montrer l'inclusion $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p) \subset F$ (on pourra raisonner par récurrence sur p).
(3) Soit $q \geq 1$ et $\{w_1, \ldots, w_q\}$ une autre famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   - Pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, $w_i \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$
   - $\mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_q) \subset \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$

Exercice 5. *(Agrandir une famille libre)*

(1) Montrer que toute sous-famille d'une famille libre est libre.
(2) Soit $n \geq 1$ et $p \geq 1$ des entiers et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Soit $v_{p+1} \in \mathbb{K}^n$. Montrer que la famille $\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}\}$ est libre si et seulement si $v_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$.

Exercice 6. *(Rang et familles génératrices de $\mathbb{K}^n$)*
Soit $n \geq 1$ et $p \geq 1$ des entiers et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Soit $A = (v_1 | \ldots | v_p)$ et r le rang de A.

(1) On suppose $r < n$. Montrer qu'il existe $B \in \mathbb{K}^n$ telle que le système linéaire $AX = B$ (d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$) est incompatible.
(2) On suppose $r = n$. Montrer que $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p) = \mathbb{K}^n$.
(3) En déduire que $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p) = \mathbb{K}^n$ si et seulement si $r = p$.

Exercice 7. *(Extraction de base)*
Soit $n \geq 1$ et $p \geq 1$ des entiers et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Soit $A = (v_1 | \ldots | v_p)$

(1) On suppose que la matrice A est échelonnée selon les lignes. Soit $I \subset \{1, \ldots, p\}$ l'ensemble des indices des colonnes contenant les pivots. Montrer que la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ est une base de $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$.
(2) On ne suppose plus A échelonnée selon les lignes. Soit $A' = (w_1 | \ldots | w_p)$ une matrice lignes équivalente à A et échelonnée selon les lignes. Soit $I \subset \{1, \ldots, p\}$ l'ensemble des indices de colonnes contenant les pivots de A'. Montrer que la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ est une base de $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$. On pourra utiliser la question précédente et le fait qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P \cdot A$.

Exercice 8. *(Théorème de la base incomplète)*
On définit, de manière totalement analogue au cas des lignes, les notions d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice, de colonnes équivalence, d'algorithme du pivot

de Gauss sur les colonnes, de matrices colonnes échelonnées et colonnes échelonnées réduites. On admettra si besoin que pour $n, p \geq 1$ donnés, deux matrices A et A' de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont colonnes équivalentes si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $A' = A \cdot P$. On peut en fait obtenir directement tous les résultats utiles sur l'échelonnement des matrices selon les colonnes à partir des résultats sur l'échelonnement des matrices selon les lignes en utilisant les propriétés de l'opération de transposition des matrices.

Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $A = (v_1|\ldots|v_p)$. On désigne par ailleurs par $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$

(1) Montrer que si A et $A' = (w_1|\ldots|w_p)$ sont colonnes équivalentes alors $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p) = \mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_p)$.
(2) On suppose que la matrice A est échelonnée selon les colonnes. Soit r le nombre de pivots. Montrer que la famille $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est une base de $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$. Soit $I \subset \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des indices des lignes contenant les pivots. Montrer que $(v_1, \ldots, v_r, (e_i)_{i \in \{1,\ldots,n\} \setminus I})$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
(3) On ne suppose plus que la matrice A est échelonnée selon les colonnes. Soit A' une matrice colonnes équivalente à A et échelonnée selon les colonnes. Soit $I \subset \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des indices des lignes contenant les pivots de A'. Déduire de ce qui précède que pour toute base $(w_1, \ldots, w_s)$ de $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$, la famille $(w_1, \ldots, w_s, (e_i)_{i \in \{1,\ldots,n\} \setminus I})$ est une base de $\mathbb{K}^n$.