5.2. Où l'on recycle un certain nombre de définition et de propriétés du R-espace vectoriel $\mathbf{R}^n$. — Un certain nombre de définitions (resp. de propriétés) vues dans le chapitre consacré au **R**-espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ ont encore un sens (resp. ont encore un sens et sont vraies) pour un **K**-espace vectoriel E quelconque. Pour obtenir les définitions ou propriétés correspondantes, il suffit de remplacer dans ces énoncés (et les démonstrations des propriétés) toutes les occurences de $\mathbf{R}^n$ par E, puis toutes les occurences de $\mathbf{R}$ par $\mathbf{K}$.

Pour les définitions, ceci concerne les définitions suivantes :
— sous-espace vectoriel
— ensemble des combinaisons linéaires d'un ensemble fini de vecteurs
— famille libre, famille liée
— famille génératrice, base d'un sous-espace vectoriel
— application linéaire

Voici par exemple l'analogue de la définition d'un sous-espace vectoriel pour un espace vectoriel quelconque :

Définition 5.3. — Soit E un **K**-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si :
— le vecteur nul 0_E est dans F,
— pour tous $u, v \in F$, $u + v \in F$
— pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et tout $u \in F$, $\lambda \cdot u \in F$

Voici une remarque importante sur ces définitions :

Remarque. — Les notions de Vect, de famille libre, liée, génératrice et de base n'ont été définies dans le chapitre sur $\mathbf{R}^n$ que pour des familles *finies* de vecteurs, et c'est sous cette forme également qu'on les considèrera, en tout cas pour l'instant, pour un espace vectoriel quelconque.

On peut en fait étendre toutes ces notions à des familles quelconques de vecteurs (pas nécessairement finies). Les détails sont donnés à la fin de ce document pour les personnes intéressées. Sauf très rares exceptions, nous n'aurons pas à faire usage de cette situation générale en AG2, mais vous aurez l'occasion de la retrouver dans la suite de vos études. Cependant, on peut d'ores et déjà retenir que ce qu'on a appelé précédemment "famille génératrice" et "base" devrait être appelé "famille génératrice finie" et "base finie". C'est crucial pour des énoncés tels que l'existence de bases (cf ci-dessous).

Pour les propriétés, l'extension "automatique" au cas d'un espace vectoriel quelconque concerne les propriétés suivantes :
— proposition 4.4 (définition équivalente d'un sous-espace vectoriel)
— théorème 4.7 (cf ci-dessous)
— théorème 4.9 (une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres)
— corollaire 4.10 (cas particulier de deux vecteurs)
— lemme 4.13 (extension d'une famille libre)
— lemme 4.14 (extraction d'une base d'une famille génératrice)

— théorème 4.18 (une base d'un sous-espace vectoriel y définit un système de coordonnées)
— proposition 4.28 (définition équivalente d'une application linéaire)

Voici par exemple l'analogue du théorème 4.7 pour un espace vectoriel quelconque.

Théorème 5.4. — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit $\{v_1, \dots, v_m\}$ un ensemble fini de vecteurs de E. Alors :*
— $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
— *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $v_1, \dots, v_m$.*

Remarque. — La définition du rang d'une famille finie de vecteurs n'a *a priori* plus de sens dans un espace vectoriel quelconque (mais attendre un peu....)

Remarque. — L'énoncé "toute famille de $p > n$ vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est liée" n'a plus de sens en remplaçant $\mathbf{R}^n$ par un espace vectoriel quelconque (mais attendre un peu....)

Remarque. — Il est faux en général que tout espace vectoriel E admet une base *au sens où on l'a définie précédemment* qui correspond en fait à la notion de *base finie* (*cf.* la remarque ci-dessus). Par exemple on verra plus tard que le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ n'admet pas de base finie. Voir aussi la dernière section de ce document.

5.3. Sur la notion de sous-espaces vectoriels. —

5.3.1. Exemples de sous-espaces vectoriels du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. — Dans tout ce qui suit, le terme "fonction" désigne un élément de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$
— L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$
— L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$
— L'ensemble des fonctions qui ont une limite finie en $+\infty$
— L'ensemble des fonctions qui prennent la valeur 0 en $1/2$
— L'ensemble des fonctions polynômiales

Vérifiez-le, et essayez de trouver d'autres exemples similaires. Voir d'autres exemples et contre exemples en TD

5.3.2. Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. — Plus précisément : un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel hérite naturellement d'une structure d'espace vectoriel

Théorème 5.5. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un $\mathbf{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par E.*

La démonstration du théorème 5.5 est un exercice très formel ; le plus difficile est certainement de comprendre ce qu'il y a à démontrer.

Ainsi pour munir un ensemble d'une structure d'espace vectoriel, ou pour montrer qu'un ensemble muni de certaines lois est un espace vectoriel, il souvent plus efficace de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel "connu", plutôt que d'utiliser la définition 5.1.

5.3.3. Intersection de deux sous-espaces vectoriels. —

Proposition 5.6. — *Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel E. Alors l'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. —
- Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $0_E \in F$, $0_E \in G$; donc $0_E \in F \cap G$.
- Soient u et v deux vecteurs de $F \cap G$. En particulier, on a $u, v \in F$ et $u, v \in G$. Comme F est un sous-espace vectoriel et $u, v \in F$, on a $u + v \in F$. De même, comme $u, v \in G$, on a $u + v \in G$. Donc $u + v \in F \cap G$.
- Soient $u \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbf{K}$; en particulier $u \in F$ et $u \in G$. Comme F est un sous-espace vectoriel et $u \in F$, on a $\lambda u \in F$. De même comme $u \in G$ on a $\lambda u \in G$. Donc $\lambda u \in F \cap G$.

Ainsi, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Exercice Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

5.3.4. Somme de deux sous-espaces vectoriels. —

Définition 5.7. — Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On pose

$$F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}$$

et on appelle ce sous-ensemble de G la somme des sous-espaces vectoriels F et G.

Proposition 5.8. — *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel E. Alors :*

1. *$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *$F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G.*

Démonstration. —
1. Montrons que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Or $0_E = 0_E + 0_E$. Donc $0_E \in F + G$.
   - Soient w et w' des éléments de $F + G$. Comme w est dans $F + G$, il existe u dans F et v dans G tels que $w = u + v$. Comme w' est dans $F + G$, il existe u' dans F et v' dans G tels que $w' = u' + v'$. Alors $w + w' = (u + v) + (u' + v') = (u + u') + (v + v')$. Comme $u, u' \in F$ et F est un sous-espaces vectoriel de E, on a $u + u' \in F$; de même on a $v + v' \in G$; donc $w + w' \in F + G$.
   - Soit w un élément de $F + G$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Il existe u dans F et v dans G tels que $w = u + v$. Alors $\lambda w = \lambda(u + v) = (\lambda u) + (\lambda v)$ Comme $u \in F$ et F est un sous-espaces vectoriel de E, on a $\lambda u \in F$; de même $\lambda v \in G$; donc $\lambda w \in F + G$.

   Donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrons que $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G.

— L'ensemble $F+G$ contient F et contient G : en effet tout élément u de F s'écrit $u = u + 0$ avec u appartenant à F et 0 appartenant à G (puisque G est un sous-espace vectoriel), donc u appartient à $F+G$. De même pour un élément de G.

— Soit H est un sous-espace vectoriel contenant F et G ; montrons que $F+G \subset H$. Soit $u \in F$ et $v \in G$. Comme $u \in F$ alors en particulier $u \in H$ (car $F \subset H$) ; de même $v \in H$. Comme H est un sous-espace vectoriel, alors $u + v \in H$. Ceci montre l'inclusion $F+G \subset H$ et conclut la démonstration. □

5.3.5. Sous-espaces vectoriels supplémentaires. —

Définition 5.9. — *Sous-espaces en somme directe*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en *somme directe* dans E si on a :

— $F \cap G = \{0_E\}$

— et $F + G = E$.

On **note** alors $E = F \oplus G$.

Si F et G sont en somme directe dans E, on dit aussi que F et G sont des *sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.*

Exemple. — Comme exemple facile mais peu intéressant, on remarque que $\{0_E\}$ et E sont supplémentaires dans E.

Proposition 5.10. — *F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière* ***unique*** *comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

On pourra essayer de démontrer la proposition à titre d'exercice, ou consulter les références données sur la page du cours (par exemple le cours d'Exo7).

Voici une conséquence de la proposition précédente et de la définition d'une base.

Proposition 5.11. — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, possédant une base finie dont on note n le cardinal. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une telle base.*

Soit r un entier tel que $0 \leqslant r \leqslant n$, $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$. Alors F et G sont supplémentaires dans E.

Corollaire 5.12. — *Soit $n \geqslant 1$ une entier et F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Alors il existe un sous-espace vectoriel G de $\mathbf{K}^n$ tel que $\mathbf{K}^n = F \oplus G$*

En général il existe une infinité de possibilités pour G comme l'illustre l'exemple suivant ; *on n'hésitera pas à faire des dessins pour l'illustrer.*

Exemple. — Soit (e_1, e_2) une base de $\mathbf{R}^2$. Dans chacuns des cas suivants, F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^2$:

— $F = \mathrm{Vect}(e_1)$, $G = \mathrm{Vect}(e_2)$

— $F = \mathrm{Vect}(e_1)$, $G = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$

— $F = \mathrm{Vect}(e_1)$, $G = \mathrm{Vect}(\lambda \cdot e_1 + e_2)$ où λ est un réel quelconque.

Démonstration. — *(du corollaire)* Soit $r = \dim(F)$ et $e_1, \dots, e_r$ une base de F, que l'on complète en une base $e_{r+1}, \dots, e_n$ de $\mathbf{K}^n$. D'après la proposition précédente, $G := \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ convient. $\square$

5.4. Sur la notion d'application linéaire. —

5.4.1. Définition et exemple. — Rappelons que la définition 4.27 (définition d'une application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ et la proposition 4.28 (définition équivalente) se généralisent aussitôt en remplaçant $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^n$ par des espaces vectoriels E et F sur un corps $\mathbf{K}$ quelconque

Proposition 5.13. — *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F, alors :*
— $f(0_E) = 0_F$,
— $f(-u) = -f(u)$, *pour tout* $u \in E$.

Démonstration. — exercice (de manipulation des définitions) $\square$

Exemple. — On a déjà vu beaucoup d'exemples (et même, en un sens, tous les exemples possibles) lorsque $E = \mathbf{K}^p$ et $F = \mathbf{K}^n$.

Voici quelques autres exemples d'applications linéaires (vérifiez-le !)

— L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & 0_F \end{array}$

— L'application Id_E : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u \end{array}$

— Si E est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui sont dérivables et F est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$

— Si E est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui sont dérivables et F est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$

— Si E est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui sont continues et F est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui sont de classe C^1, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & x \mapsto \int_0^x f(t)dt \end{array}$

5.4.2. Image d'une application linéaire. — On définit d'abord une notion valable pour n'importe quel type d'application entre n'importe quel type d'ensemble.

Définition 5.14. — Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit A un sous-ensemble de E. Le sous-ensemble de F constitué de l'ensemble des images par f des éléments de A est appelé *image directe de A par f* (ou souvent simplement *image de A par f*) et est noté $f(A)$. En d'autres termes :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Dans le cas où E et F sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ est une application linéaire, $f(E)$ est souvent noté $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque. — Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Il découle aussitôt de la définition ci-dessus que f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Proposition 5.15. — Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire
Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.
- *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.*
- *En particulier,* $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Remarque. — Cette proposition fournit une méthode, utile dans certains contextes, pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel F en est un sous-espace vectoriel : il suffit de l'écrire comme l'image d'un sous-espace vectoriel d'un autre espace vectoriel E par une application linéaire de E dans F.

Démonstration. — Tout d'abord, comme $0_E \in E'$ (car E' est un sous-espace vectoriel de E) et f est linéaire, on a $0_F = f(0_E) \in f(E')$. Soit (y_1, y_2) un couple d'éléments de $f(E')$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Montrons que $\lambda y_1 + \mu y_2$ appartient à $f(E')$.

Comme $y_1 \in f(E')$, il existe $x_1 \in E'$ tel que $f(x_1) = y_1$. Comme $y_2 \in f(E')$, il existe $x_2 \in E'$ tel que $f(x_2) = y_2$.

Comme f est linéaire, on a

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2).$$

Or, comme E' est un sous-espace vectoriel de E et $x_1, x_2 \in E'$ on a $\lambda x_1 + \mu x_2 \in E'$. Donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est bien un élément de $f(E')$, ce qui conclut la démonstration. □

Proposition 5.16. — *Soit $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ des entiers. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbf{K})$. Soit $f : \mathbf{K}^p \longrightarrow \mathbf{K}^n$ l'application linéaire dont la matrice est A et $v_1, \ldots, v_p$ les vecteurs colonnes de la matrice A. Alors* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$

Démonstration. — Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ la base canonique de $\mathbf{K}^p$. Rappelons que pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ on a $f(e_i) = v_i$.

Soit $v \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $u \in \mathbf{K}^p$ tel que $v = f(u)$. Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbf{K}^p$ tel que $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i$. Comme f est linéaire, on a

$$f(u) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot f(e_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot v_i.$$

Ceci montre que $v \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$. On a donc montré l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$.

L'autre inclusion est laissée à titre d'exercice (essentiellement, tous les arguments nécessaires ont déjà été donnés). □

5.4.3. Noyau d'une application linéaire. —

Définition 5.17. — Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$ (pour l'anglais *kernel*), est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est 0_F : $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$

Proposition 5.18. — *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. — Exercice à savoir faire. □

Remarque. — Cette proposition fournit une méthode, utile dans certains contextes, pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel E en est un sous-espace vectoriel : il suffit de l'écrire comme le noyau d'une application linéaire de E vers un autre espace vectoriel.

Exemple. — Soit $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ des entiers. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbf{K})$. Soit $f : \mathbf{K}^p \longrightarrow \mathbf{K}^n$ l'application linéaire dont la matrice est A. On retrouve que $\mathrm{Ker}(f) = \left\{X \in \mathbf{K}^p \mid AX = 0\right\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des $X \in \mathbf{K}^p$ qui sont solutions du système linéaire homogène $AX = 0$) est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^p$.

Théorème 5.19. — Caractérisation des applications linéaires injectives par le noyau
Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors : f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \left\{0_E\right\}$.

En particulier, pour montrer que f est injective, il suffit de montrer que : pour tout $x \in E$, si $f(x) = 0_F$ alors $x = 0_E$.

Démonstration. —

— Supposons que f est injective et montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Comme f est linéaire, on a $f(0_E) = 0_F$. Donc $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$. Soit maintenant x un élément de $\mathrm{Ker}(f)$. On a $f(x) = 0_F$. Or $f(0_E) = 0_F$, donc $f(x) = f(0_E)$. Comme f est injective, on en déduit $x = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$, ce qui conclut.

— Réciproquement, supposons maintenant que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. On a donc $f(x) - f(y) = 0_F$. Comme f est linéaire, on en déduit $f(x - y) = 0_F$, c'est-à-dire $x - y$ est un élément de $\mathrm{Ker}(f)$. Donc $x - y = 0_E$, soit $x = y$. Donc f est injective.

□

5.4.4. Composition d'applications linéaires. —

Proposition 5.20. — Composée de deux applications linéaires
Soient E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Démonstration. — Soient u et v deux vecteurs de E, et α et β deux éléments de $\mathbf{K}$. Alors :

$$\begin{array}{rcll}
(g \circ f)(\alpha u + \beta v) & = & g\left(f(\alpha u + \beta v)\right) & \text{(définition de } g \circ f\text{)} \\
& = & g\left(\alpha f(u) + \beta f(v)\right) & \text{(linéarité de } f\text{)} \\
& = & \alpha g\left(f(u)\right) + \beta g\left(f(v)\right) & \text{(linéarité de } g\text{)} \\
& = & \alpha (g \circ f)(u) + \beta (g \circ f)(v) & \text{(définition de } g \circ f\text{)}
\end{array}$$

ce qui conclut. □

Proposition 5.21. — Linéarité de l'application réciproque d'une application linéaire bijective

Soient E et F deux **K**-*espaces vectoriels. Soit f une application linéaire* bijective *de E sur F. Alors f^{-1} est une application linéaire de F sur E.*

Démonstration. — Montrons que l'application $f^{-1}\colon F \to E$ est bien linéaire. Soient u' et v' deux vecteurs de F et soient α et β deux éléments de $\mathbf{K}$. On pose $u := f^{-1}(u')$ et $v := f^{-1}(v')$. On a a donc $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$. Comme f est linéaire, on a

$$\alpha u' + \beta v' = \alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v)$$

et donc

$$f^{-1}(\alpha u' + \beta v') = f^{-1}(f(\alpha u + \beta v)).$$

Comme $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, on en déduit

$$f^{-1}(\alpha u' + \beta v') = \alpha u + \beta v$$

d'où

$$f^{-1}(\alpha u' + \beta v') = \alpha f^{-1}(u') + \beta f^{-1}(v'),$$

et f^{-1} est donc linéaire. □

Remarque. — On retrouve comme cas particulier une partie du théorème 4.33.

5.4.5. Un peu de vocabulaire. — Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels.

Une application linéaire bijective de E sur F est appelée un *isomorphisme d'espaces vectoriels*, ou souvent simplement un *isomorphisme* (attention, cette simplification est un abus qui peut porter à confusion dans certains contextes). La proposition 5.21 montre que l'application réciproque d'une telle application est encore un isomorphisme d'espace vectoriels.

Les deux espaces vectoriels E et F dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de E sur F. Une condition équivalente est l'existence d'un isomorphisme de F sur E.

Une application linéaire de E dans E est appelé *endomorphisme* de (l'espace vectoriel) E. La proposition 5.20 montre que la composition définit une loi de composition interne sur l'ensemble des endomorphismes de E.

Un endomorphisme bijectif de E est appelé *automorphisme* de (l'espace vectoriel) E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$. Comme la composée de deux applications bijectives est encore bijective, $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-ensemble de l'ensemble des endormorphismes de E qui est stable par composition.

5.5. Ensemble des combinaisons linéaires d'une famille quelconque de vecteurs. — Soit E un **K**-espaces vectoriels et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par un ensemble I quelconque pas nécessairement fini (on pourra penser par exemple à une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E). L'ensemble $\mathrm{Vect}((v_i)_{i\in I})$ des combinaisons linéaires de cette famille est définie ainsi : pour tout $v \in E$, $v \in \mathrm{Vect}((v_i)_{i\in I})$ si et seulement s'il existe une famille *presque nulle* $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de **K** indexée par I telle que

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i.$$

Le qualificatif *presque nulle* signifie que l'ensemble $J = \{i \in I, \quad \lambda_i \neq 0\}$ est fini, ce qui donne un sens à la somme ci-dessus, qui s'interpète comme la somme *finie* $\sum_{i\in J} \lambda_i \cdot v_i$. Comme dans le cas d'une famille finie, on montre que $\mathrm{Vect}((v_i)_{i\in I})$ est un sous-espace vectoriel de E et que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les v_i. La démonstration est essentiellement la même, mais est un peu plus technique.

On dispose ainsi du concept de famille génératrice (non nécessairement finie) d'un espace vectoriel.

La famille $(v_i)_{i\in I}$ est dite libre si la seule famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbf{K}$ telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = 0_E$ est la famille nulle, c'est à dire vérifie $\forall i \in I$, $\lambda_i = 0$. On dispose ainsi du concept de base (no nécessairement finie) d'un espace vectoriel.

Par exemple, pour $n \in \mathbf{N}$, soit $e_n \colon \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$. On peut montrer (et on incite les personnes intéressées à essayer de le faire) que $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base (infinie) de l'espace E des fonctions polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On peut d'ailleurs en déduire que E n'admet pas de famille génératrice finie, en particulier pas de base finie, et qu'il en est de même pour tout $\mathbf{R}$-espace vectoriel dont E est un sous-espace, par exemple pour l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (*cf.* le chapitre suivant).