Université de Rennes 1 — 2021–2022

L1- AG2 — CC5 (**1 heure**)

Les documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés. Les réponses et calculs devront être correctement justifiés.

Nom : | **Prénom :** | **Groupe :**

Exercice 1. Soit E et F des $\mathbb{R}$-espace vectoriels et $f\colon E \to F$ une application linéaire.

(**a**) Donner les définitions du noyau de f et de l'image de f. On note $\mathrm{Ker}(f)$ le noyau de f et $\mathrm{Im}(f)$ son image.

(**b**) On suppose dans toute la suite que $E = F$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(**1**) $f \circ f = 0$;

(**2**) $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(**c**) On suppose que E est de dimension finie, $\dim(E) = 2$ et le rang de f est 1. Montrer que si $f \circ f = 0$ alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(**1**) $f \circ f = 0$;

(**2**) il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour (**1**) $\Rightarrow$ (**2**), on pourra considérer un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E.

Exercice 2. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

(**a**) Déterminer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ *non tous nuls* tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(**b**) Déterminer une base de F ; quelle est la dimension de F ?

(**c**) Existe-t-il une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$f(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

(**d**) Existe-t-il une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$f(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad f(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad f(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

(**e**) Soit $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire d'inconnues $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ déterminé par la relation :

$$\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

On discutera suivant les valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4.

(f) Déterminer un système de deux équations définissant F.

(g) Soit $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $G = \mathrm{Vect}(u_2, u_4)$. Déterminer une base de $F \cap G$. Quelle est la dimension de $F + G$?