Université de Rennes 1 | 2021–2022
L1- AG2 | CC4 (**1 heure**)

Les documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés. Les réponses et calculs devront être correctement justifiés.

Nom : ______ **Prénom :** ______ **Groupe :** ______

Exercice 1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Une seule des deux affirmations suivantes est exacte. La démontrer et donner un contre-exemple pour l'autre.
(1) L'image par f d'une famille liée de E est toujours une famille liée de F.
(2) L'image par f d'une famille libre de E est toujours une famille libre de F.

Exercice 2. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

(**a**) Quelle est la dimension de F ?

(**b**) Le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il dans F ?

(**c**) Donner une base d'un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x + y + 3z \\ x + y - z \end{pmatrix}.$$

(**a**) Montrer que f est linéaire.

On note Ker f le noyau de f et Im f son image.

(**b**) Déterminer une base de Ker f. L'application f est-elle injective ?

(**c**) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$.