
Les documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés. Les réponses et calculs devront être correctement justifiés.

Nom : Prénom : Groupe :

Exercice 1. Les sous-ensembles E_1, E_2 de \mathbb{R}^3 suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$$E_1 = \{(1 + u, 2u, u - 1) : u \in \mathbb{R}\}, \quad E_2 = \{(u + v, u - v, 2u - v) : u, v \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2. On considère les vecteurs $u = (1, 2, 0, 1)$ et $v = (2, 3, 1, 1)$ du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^4 . On note E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par u et v .

- (a) Déterminer un système de deux équations définissant le sous-espace vectoriel E .
- (b) Justifier que la famille (u, v) est libre et la prolonger en une base de \mathbb{R}^4 .
- (c) Les vecteurs $a = (1, 1, 0, 0)$ et $b = (5, 6, 4, 1)$ sont-ils des combinaisons linéaires de u et v ?

Exercice 3.

- (a) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ des entiers non nuls. Rappeler la définition d'une application linéaire de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n .

On considère les vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ dans \mathbb{R}^2 . On note f l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 telle que

$$f(e_1) = (1, 2, 1) \quad f(e_2) = (-1, 1, 1).$$

- (b) Déterminer l'image par f du vecteur $u = (-1, 1)$.
- (c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Déterminer l'image par f du vecteur $v = (x, y)$.
- (d) L'application f est-elle surjective ?