
Les documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés. Les réponses et calculs devront être correctement justifiés.

Nom : Prénom : Groupe :

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + I_3$. En déduire, presque sans calcul, que A est inversible et donner son inverse sous forme d'un polynôme en A .

Exercice 3. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations linéaires suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + my + z = 5 - 2m \\ x + m^2y - mz = 4 + m \end{cases}$$

(a) Soit A la matrice augmentée associée au système, i.e.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & m & 1 & 5 - 2m \\ 1 & m^2 & -m & 4 + m \end{array} \right].$$

Calculer une forme échelonnée suivant les lignes de la matrice A . Expliciter les étapes du calcul et discuter suivant les valeurs de m . Donner le rang de A pour chaque valeur de m .

(b) En déduire la résolution du système suivant les valeurs de m .

(c) Donner une interprétation géométrique de l'ensemble des solutions du système suivant les valeurs de m .