

---

Les documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés. Les réponses et calculs devront être correctement justifiés.

Nom :  Prénom :  Groupe :

---

**Exercice 1.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

**Exercice 2.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2 - 3A + I_3$ . En déduire, presque sans calcul, que  $A$  est inversible et donner son inverse sous forme d'un polynôme en  $A$ .

**Exercice 3.** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On considère le système d'équations linéaires suivant, d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + my + z = 5 - 2m \\ x + m^2y - mz = 4 + m \end{cases}$$

(a) Soit  $A$  la matrice augmentée associée au système, i.e.

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & m & 1 & 5 - 2m \\ 1 & m^2 & -m & 4 + m \end{array} \right].$$

Calculer une forme échelonnée suivant les lignes de la matrice  $A$ . Expliciter les étapes du calcul et discuter suivant les valeurs de  $m$ . Donner le rang de  $A$  pour chaque valeur de  $m$ .

(b) En déduire la résolution du système suivant les valeurs de  $m$ .

(c) Donner une interprétation géométrique de l'ensemble des solutions du système suivant les valeurs de  $m$ .