Université de Rennes 1 Année 2020/2021

Algèbre et géométrie 1
Exercices corrigés

1. (Exercice 4.9) Soient P, Q, R trois points du plan, K le symétrique de P par rapport à R, J le point défini par $\overrightarrow{RJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{RQ}$ et I le milieu de $\{P, Q\}$. Montrer que I, J, K sont alignés.

> **Solution:** En traduisant les hypothèses en termes de barycentres, on voit d'une part que R est le barycentre de $(P, 1)$ et $(K, 1)$ et que J est le barycentre de $(R, 2)$ et de $(Q, 1)$. Par associativité des barycentres, on en déduit que J est le centre de gravité du triangle $\{P, Q, R\}$. D'autre part, psuique I est le milieu $\{P, Q\}$, la droite (IK) est une médiane du triangle $\{P, Q, R\}$ et on a donc bien $J \in (IK)$.

2. (Exercice 4.12) Soit (P, Q, R, S) un parallélogramme non aplati, K le milieu de $\{P, S\}$, I le milieu de $\{Q, R\}$ et J le points défini par $\overrightarrow{PJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$.

   (a) Exprimez K comme barycentre de P et S ainsi que J comme barycentre de P et Q.

   > **Solution:** On a $K = \mathrm{Bar}((P, 1), (S, 1))$ et $J = \mathrm{Bar}((P, 1), (Q, 2))$.

   (b) Montrer que les droites (SJ) et (QK) sont sécantes en un point G que l'on exprimera comme barycentre de P, Q et S.

   > **Solution:** Soit
   > $$G := \mathrm{Bar}((P, 1), (S, 1), (Q, 2)).$$
   > Par associativité des barycentres, on a $G = \mathrm{Bar}((K, 2), (Q, 2))$ mais aussi $G = \mathrm{Bar}((P, 1), (J, 3))$. On a donc bien $G \in (KQ)$ et $G \in (PJ)$.

   (c) Montrer que les droites (SJ), (QK) et (PI) sont concourantes.

   > **Solution:** Puisque (P, Q, R, S) est un parallélogramme, il en va de même de (P, Q, I, K) : en effet $\overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QI}$. Or les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur mileu et on sait que G est le milieu de $\{K, Q\}$. C'est donc bien aussi le milieu de $\{I, P\}$ et on a ainsi aussi $G \in (IP)$.

3. (Exercice 4.15) Soit $\{P, Q, R\}$ un triangle. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que le vecteur $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

> **Solution:** Si $P = Q$, alors tous les points du plan satistont la condition et on suppose maintenant que $P \neq Q$. Si G désigne le centre de gravité du triangle $\{P, Q, R\}$, on a $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} = 3\overrightarrow{MG}$. La conditions signifie donc que $3\overrightarrow{MG}$,

et donc aussi $\overrightarrow{MG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{PQ}$, c'est à dire que que $M = G$ ou que les droites (MG) et (PQ) sont parallèles. On en déduit que l'ensemble des points M que l'on cherche est la droite parallèle à (PQ) et passant par G.