Exercice 5.1.1

Indication. — On pourra calculer $\left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2$ en utilisant $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Éléments de correction. —

$$\left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PR}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{QP}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{PR}\right\|^2 + 2\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{PR}$$

or $\left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2 = QR^2 = 6^2$ etc ; en outre $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = (-\overrightarrow{QP})\cdot\overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{QP})\cdot\overrightarrow{PR}$.

Exercice 5.1.2

Indication. — On pourra calculer $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH}$ en utilisant la question précédente, en déduire PH puis $RH

Éléments de correction. — Par définition de H, on a $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{HR} = 0$, donc

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{HR}$$

soit

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{HR}) = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$$

Comme P, Q, H sont alignés, on a $PQ\cdot PR = \left|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}\right|$ or on connaît PQ

Exercice 5.2

Indication. — Caractériser le fait qu'un point M du plan soit sur la hauteur en termes de produit scalaire

Éléments de correction. — soit M un point du plan ; alors M est sur la hauteur issue de P si et seulement si $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{QR} = 0$. Or en notant $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ les coordonnées de M, on peut calculer $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{QR}$ en fonction de x et y compte tenu des données numériques de l'énoncé, ce qui donne l'équation cherchée.

Exercice 5.3

Indication. — On pourra utiliser l'identité $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ et on n'oubliera pas de traduire vectoriellement le fait que (P, Q, R, S) est un parallélogramme

Éléments de correction. — Pour 5.3.1, prendre $\vec{u} = \overrightarrow{PR}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{QS}$; comme (P, Q, R, S) est un parallélogramme, $\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS} = 2\overrightarrow{PS}$

Pour 5.3.2, se rappeler que (PR) et (QS) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QS} = 0$

Pour 5.3.3, prendre $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$; comme (P, Q, R, S) est un parallélogramme, $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{SR}-\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{SQ}$

Exercice 5.4.1

Indication. — On pourra utiliser $||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

Exercice 5.4.2

Indication. — Ajouter les deux égalités et simplifier

Éléments de correction. — quand on ajoute, les produits scalaires se simplifient car comme (P, Q, R, S) est un parallélogrammen on a $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = -\overrightarrow{RS}$; ce qui reste donne la relation annoncée

Exercice 5.5.1

Indication. — Calculer le produit scalaire en intercalant le point O (Chasles)

Éléments de correction. —

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{QR} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OH}) \cdot (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}) = (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) \cdot (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR})$$

et on peut appliquer $||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$; comme O est le centre du cercle circonscrit, $OQ^2 = OR^2$

On en déduit que les droites (PH) et (QR) sont perpendiculaires ; en permutant les rôles de P, Q, R, on en déduit que (RH) et (PQ) sont perpendiculaires et que que (RH) et (PQ) sont perpendiculaires (attention aux possibles cas dégénérés $P = H$, etc..)

Exercice 5.5.2

Indication. — immédiat avec une formule du cours sur le barycentre

Éléments de correction. — exprimer $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}$ en utilisant le fait que G est l'isobarycentre de (P, Q, R) ; la formule demandée en découle

Exercice 5.6.1

Indication. — Calculer le produit scalaire en intercalant le point I (Chasles)

Éléments de correction. —

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IP}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IQ})$$

On développe, on utilise le fait que $\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} = 0$ (deux fois) et $IP^2 = (PQ/2)^2$

Exercice 5.6.2

Éléments de correction. — d'après 5.6.1, c'est l'ensemble des points M qui vérifient $MI^2 = PQ^2$, c'est donc le cercle de centre I de rayon PQ

Exerice 5.7.1

Indication. — Exprimer $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MJ}$ à l'aide des formules du cours sur le barycentre

Éléments de correction. — $4\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$ et $2\overrightarrow{MJ} = 3\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MQ}$; on prend le produit scalaire et on utilise $||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

Exercice 5.7.2

Éléments de correction. — D'après 5.7.1, c'est l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$. C'est donc le cercle de diamètre $\{I, J\}$.

Exercice 5.8.1

Indication. — Calculer MP^2 et MQ^2 à l'aide de la formule $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ en intercalant le point I

Éléments de correction. —

$$MP^2 + MQ^2 = \left|\left|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IP}\right|\right|^2 + \left|\left|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IQ}\right|\right|^2$$

d'où

$$MP^2 + MQ^2 = 2\left|\left|\overrightarrow{MI}\right|\right|^2 + \left|\left|\overrightarrow{IP}\right|\right|^2 + \left|\left|\overrightarrow{IQ}\right|\right|^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IP} + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IQ}$$

or comme I est le milieu de $\{P, Q\}$ on a

$$\left|\left|\overrightarrow{IP}\right|\right|^2 = \left|\left|\overrightarrow{IQ}\right|\right|^2 = IP^2 + IQ^2 = \frac{1}{4}PQ^2$$

et $\overrightarrow{IP} = -\overrightarrow{IQ}$ d'où

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ}) = 0$$

Exercice 5.8.2

Indication 1. — On utilisera bien sûr la première question et on n'oubliera pas que l'application $M \mapsto \frac{1}{2}PQ^2$ est constante

Indication 2. — On se ramène à montrer que $M \mapsto 2MI^2$ admet un minimum

Éléments de correction. — Comme $M \mapsto \frac{1}{2}PQ^2$ est constante, l'application $f\colon M \mapsto 2MI^2 + \frac{1}{2}PQ^2$ admet un minimum si et seulement si l'application $g\colon M \mapsto 2MI^2$ admet un minimum, et alors $\mathrm{Min}(f) = \mathrm{Min}(g) + \frac{1}{2}PQ^2$. Mais pour tout point M, on a clairement $g(M) \geqslant 0$, et par ailleurs $g(I) = 0$.

Exercice 5.9.1

Indication. — Calculer MP^2, MQ^2 et MR^2 à l'aide de la formule $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ en intercalant le point G

Éléments de correction. —

$$2MP^2 + MQ^2 - MR^2 = 2\left|\left|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GP}\right|\right|^2 + \left|\left|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{IG}\right|\right|^2 - \left|\left|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{IR}\right|\right|^2$$

On développe et on montre que la contribution des doubles produits

$$2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GQ} - \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GR}$$

est nulle grâce au fait que G est le barycentre de $(P, 2)$, $(Q, 1)$ $(R, -1)$

Exercice 5.9.2

Indication. — On utilisera bien sûr la première question et on n'oubliera pas que l'application $M \mapsto 2GP^2 + GQ^2 - GR^2$ est constante (cf exercice 5.8)

Éléments de correction. — Comme $M \mapsto 2GP^2 + GQ^2 - GR^2$ est constante, l'application $f : M \mapsto 2MG^2 + 2GP^2 + GQ^2 - GR^2$ admet un minimum si et seulement si l'application $g : M \mapsto 2MG^2$ admet un minimum, et alors $\mathrm{Min}(f) = \mathrm{Min}(g) + 2GP^2 + GQ^2 - GR^2$; cf exercice 5.8.

Exercice 5.10

Indication. — Pour le 1, introduire le barycentre de $(P, 1)$, $(Q, -3)$

Pour le 2 introduire le barycentre de $(P, 2)$ $(Q, 1)$, $(R, -1)$ (et bien sûr pas celui de $(P, 2)$ $(Q, -1)$, $(R, -1)$)

Éléments de correction. — Pour le 1, soit G le barycentre de $(P, 1)$, $(Q, -3)$. La relation se réécrit $\left|\left|(1-3)\overrightarrow{MG}\right|\right| \leqslant 2$. On trouve le cercle de centre G et de rayon 1.

Pour le 2, soit G le barycentre de $(P, 2)$ $(Q, 1)$, $(R, -1)$. La relation se réécrit $\left|\left|(2+1-1)\overrightarrow{MG}\right|\right| = \left|\left|-\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}\right|\right|$. On trouve le cercle de centre G et de rayon $\frac{\left|\left|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}\right|\right|}{2}$

Pour le 3, soit G_1 le barycentre de $(P, 1)$ $(Q, 2)$ et G_2 le barycentre de $(P, 2)$, $(R, 1)$. On trouve la médiatrice du segement $\{G_1, G_2\}$

Exercice 5.11

Indications. — Pour 1, calculer OP, OQ et OR

Pour 2, associativité du barycentre

Pour 3, exprimer $\overrightarrow{M'H}$ en fonction de $\overrightarrow{MO}$

Pour 4, appliquer 3 à P', Q' et R'

Éléments de correction. — Pour 1, on trouve $OP = OQ = OR = 1$

Pour 2, $M' = \mathrm{Bar}((P,1),(Q,1),(R,1),(M,3)) = \mathrm{Bar}((G,3),(M,3))$ par associativité ; en particulier M' est le milieu de $\{G, M\}$

Pour 3, M' est le milieu de $\{G, M\}$ et H est le milieu de $\{G, O\}$ donc (droite des milieux) $\overrightarrow{M'H} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$ Donc $M'H = \frac{1}{2}MO$. Par hypothèse et 1, $MO = 1$. Ainsi M' est sur le cercle de centre H et de rayon $\frac{1}{2}$

Pour 4, d'après 3, pour n'importe quel point M de Γ, le point M' est sur le cercle de centre H et de rayon $\frac{1}{2}$. Or P Q et R sont sur Γ. Donc P', Q' et R' sont sur le cercle de centre H et de rayon $\frac{1}{2}$; donc ce dernier cercle est bien le cercle circonscrit au triangle $\{P', Q', R'\}$. *Remarque* : tout point M' de Γ' est bien l'image par la transformation de l'énoncé d'un point M de Γ, plus précisément c'est l'image du point M défini par $\overrightarrow{GM} = 2\overrightarrow{GM'}$ (cette égalité vient du fait que M' est nécessairement le milieu de $\{G, M\}$, cf question 2); la transformation de l'énoncé induit même une bijection de Γ sur Γ'. En d'autres termes, l'application

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \Gamma' \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$$

est une application bijective

AG1