Correction de certains exercices de la feuille 4
Les dessins restent à votre charge.

Exercice 4.2

On a
$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}2-3\\1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}4-2\\-1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{RS}=\begin{pmatrix}-2-4\\-3-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{SP}=\begin{pmatrix}3-(-2)\\2-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$
d'où
$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{SP}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2+(-6)+5\\-1+(-2)+(-2)+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{0}$$

Exercice 4.4

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}7-(-1)\\-1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad \overrightarrow{RS}=\begin{pmatrix}0-4\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}.$$
On en déduit que $\overrightarrow{PQ}\neq\overrightarrow{RS}$, en revanche on a $\overrightarrow{PQ}=-2\cdot\overrightarrow{RS}$. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéaires mais ne sont pas égaux. Donc les droites (PQ) et (RS) sont parallèles, mais (P,Q,R,S) n'est pas un parallèlogramme.

Exercice 4.5

Le barycentre de deux points pondérés est défini si et seulement la somme des poids est non nulle. Ainsi, parmi les paires proposées, seule la paire de points pondérés $(P,-2)$, $(Q,-2)$ n'admet pas de barycentre. Pour $1\leqslant i\leqslant 4$, notons G_i le barycentre de la paire de point pondérés repérée par le numéro i. Les relations vues en cours donnent :
$$\overrightarrow{PG_1}=\frac{3}{3+1}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{PQ},\quad \overrightarrow{PG_2}=\frac{2}{2+2}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PQ},$$
$$\overrightarrow{PG_3}=\frac{2}{-1+2}\cdot\overrightarrow{PQ}=2\cdot\overrightarrow{PQ},\quad \overrightarrow{PG_4}=\frac{-6}{-2-6}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{PQ}$$
ce qui permet de constuire facilement les G_i. On note en particulier que $G_1=G_4$, G_2 est le milieu du segment $[PQ]$ et Q est le milieu du segement $[PG_3]$

Exercice 4.8

1. D'après l'associativité du barycentre et les définitions de G et J, G est le barycentre de $(P,2)$ et $(J,1-2)$. D'après une propriété du cours, les points G, P et J sont donc nécessairement alignés.
   De même, d'après l'associativité du barycentre et les définitions de G et I, G est le barycentre de $(I,2+1)$ et $(R,-2)$. D'après une propriété du cours, les points G, I et R sont donc nécessairement alignés.

2. Comme G est le barycentre de $(P,2)$, $(Q,1)$ et $(R,-2)$, on a
$$(2+1-2)\cdot\overrightarrow{QG} = 2\cdot\overrightarrow{QP} + 1\cdot\overrightarrow{QQ} + (-2)\cdot\overrightarrow{QR}$$
soit
$$\overrightarrow{QG} = 2\cdot\overrightarrow{QP} + 2\cdot\overrightarrow{RQ} = 2\cdot(\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{QP}) = 2\cdot\overrightarrow{RP}$$
Ainsi $\overrightarrow{QG} = 2\cdot\overrightarrow{RP}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{QG}$ sont colinéaires. Par hypothèse, on a $R \neq P$, donc $\overrightarrow{RP} \neq \overrightarrow{0}$ et la relation $\overrightarrow{QG} = 2\cdot\overrightarrow{RP}$ montre que $\overrightarrow{QG} \neq \overrightarrow{0}$ d'où $Q \neq G$. Ainsi les droites (PR) et (QG) sont bien définies et parallèles.

Exercice 4.10

Notons préalablement que comme P, Q et R ne sont pas alignés, on a $Q \neq R$ et donc la droite (QR) est bien définie. Par ailleurs, si on avait $M = P$ on pourrait écrire $a\cdot\overrightarrow{PP} + b\cdot\overrightarrow{PR} + c\cdot\overrightarrow{PR} = 0$ d'où $b\cdot\overrightarrow{PR} + c\cdot\overrightarrow{PR} = 0$. Comme $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, ceci contredirait le fait que P, Q et R ne sont pas alignés. Donc on a $P \neq M$ et la droite (PM) est bien définie.

1. Comme M est le barycentre de (P,a), (Q,b) et (R,c) on peut écrire
$$(a+b+c)\cdot\overrightarrow{PM} = a\cdot\overrightarrow{PP} + b\cdot\overrightarrow{PQ} + c\cdot\overrightarrow{PR}$$
Comme $b = -c$, on en déduit
$$(a+b+c)\cdot\overrightarrow{PM} = b\cdot(\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}) = b\cdot\overrightarrow{RQ}$$
Ainsi $(a+b+c)\cdot\overrightarrow{PM} = b\cdot\overrightarrow{RQ}$. Comme $a+b+c \neq 0$ ceci montre que $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{RQ}$ sont colinéaires. Ainsi les droites (PM) et (QR) sont parallèles.
2. Si (PM) et (QR) sont sécantes et parallèles, elles sont confondues, et en particulier P, Q et R sont alignés. Ainsi, vu les hypothèses, si (PM) et (QR) sont sécantes, elles ne sont pas parallèles. Le résultat de la première question montre qu'alors $b+c \neq 0$. Ceci permet de définir N le barycentre de (Q,b) et (R,c), et l'associativité du barycentre montre alors que M est le barycentre de (P,a) et $(N,b+c)$. Ainsi P, M, et N sont alignés, et donc $N \in (PM)$. Par ailleurs comme N est le barycentre de (Q,b) et (R,c), $N \in (QR)$. Ainsi $N \in (PM)\cap(QR)$ et donc $N = G$, ce qui conclut.

Exercice 4.13

Solution utilisant l'associativité du barycentre : Soit G' le centre de gravité du triangle $\{P',Q',R'\}$. Comme $a+b \neq 0$, G' est le barycentre $(P',a+b)$, $(Q',a+b)$ et $(R',a+b)$. Par associativité du barycentre, G' est le barycentre de (Q,a), (R,b), (R,a), (P,b), (P,a), (Q,b), soit encore le barycentre de $(P,a+b)$, $(Q,a+b)$ $(R,a+b)$. Finalement G' est le barycentre de $(P,1)$, $(Q,1)$ $(R,1)$ c'est-à-dire G' est le centre de gravité du triangle $\{P,Q,R\}$, ce qu'il fallait démontrer.

Solution vectorielle : Soit G' le centre de gravité du triangle $\{P',Q',R'\}$. On a donc
$$(a+b)\cdot\overrightarrow{G'P'} + (a+b)\cdot\overrightarrow{G'Q'} + (a+b)\cdot\overrightarrow{G'R'} = \overrightarrow{0}$$

Comme P' est le barycentre de (Q,a), (R,b) on peut écrire $(a+b)\cdot\overrightarrow{G'P'} = a\cdot\overrightarrow{G'Q} + b\cdot\overrightarrow{G'R}$. En procédant similairement pour Q' et R', on obtient finalement l'égalité

$$a\cdot\overrightarrow{G'Q} + b\cdot\overrightarrow{G'R} + a\cdot\overrightarrow{G'R} + b\cdot\overrightarrow{G'P} + a\cdot\overrightarrow{G'P} + b\cdot\overrightarrow{G'Q} = \overrightarrow{0}$$

soit

$$(a+b)\cdot\overrightarrow{G'P} + (a+b)\cdot\overrightarrow{G'Q} + (a+b)\cdot\overrightarrow{G'R} = \overrightarrow{0}$$

ou encore

$$\cdot\overrightarrow{G'P} + \cdot\overrightarrow{G'Q} + \cdot\overrightarrow{G'R} = \overrightarrow{0}$$

ce qui montre que G' est le barycentre de $(P,1)$, $(Q,1)$ $(R,1)$, ce qui conclut.

Exercice 4.14

Solution utilisant l'associativité du barycentre : Soit G le barycentre de $(P,1)$, $(Q,1)$ $(R,1)$, $(S,1)$. Comme I est le milieu de $\{P,Q\}$, I est le barycentre de $(P,1)$, $(Q,1)$. Comme K est le milieu de $\{R,S\}$, J est le barycentre de $(R,1)$, $(S,1)$. D'après l'associativité du barycentre, G est le barycentre de $(I,2)$, $(K,2)$ soit encore de $(I,1)$, $(K,1)$. Donc G est le milieu de $\{I,K\}$. De la même façon, on montre que G est le milieu de $\{J,L\}$. Ainsi $\{I,K\}$ et $\{J,L\}$ ont même milieu, et donc (I,J,K,L) est un parallélogramme.

Solution vectorielle : Montrons l'égalité $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, ce qui permettra de conclure aussitôt. On a

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{QJ}.$$

Comme I est le milieu de $\{P,Q\}$, on a $\overrightarrow{IQ} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PQ}$. Comme J est le milieu de $\{Q,R\}$, on a $\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{QR}$. Ainsi

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{QJ} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PR}.$$

Un raisonnement similaires (rédigez-le !) permet de montrer que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PR}$. Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, et donc (I,J,K,L) est un parallélogramme.

Exercice 4.16

1. Le barycentre proposé est bien défini si et seulement si la somme des poids est non nulle, c'est à dire si et seulement si $1+m+(-1)\neq 0$, soit encore $m\neq 0$. Ainsi l'ensemble des $m\in\mathbb{R}$ tel que G_m est bien défini est $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

   Décrivons $\{G_m,\ m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$. Soit $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Par définition de G_m et le cours, on peut écrire

   $$(1+m+(-1))\cdot\overrightarrow{QG_m} = 1\cdot\overrightarrow{QP} + m\cdot\overrightarrow{QQ} + (-1)\cdot\overrightarrow{QR}$$

   soit

   $$m\cdot\overrightarrow{QG_m} = \overrightarrow{QP} + \cdot\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP}$$

   Ainsi

   $$\{G_m,\ m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\} = \{M,\ \exists m\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \overrightarrow{QM} = \frac{1}{m}\cdot\overrightarrow{RP}\}$$

soit encore

$$\{G_m,\ m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{M,\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \overrightarrow{QM} = \lambda \cdot \overrightarrow{RP}\}$$

Si $R \neq P$, l'ensemble cherché est donc la droite parallèle à la droite (RP) passant par Q et privée du point Q. Si $R = P$, l'ensemble cherché est réduit au point Q.

2. Par des calculs similaires, on trouve que l'ensemble des $m \in \mathbb{R}$ tel que G_m est bien défini est $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et que pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on a

$$(2+m) \cdot \overrightarrow{QG_m} = \overrightarrow{QP} + \cdot \overrightarrow{QR}.$$

Soit I le milieu de $\{P, R\}$. L'égalité se réécrit

$$(2+m) \cdot \overrightarrow{QG_m} = 2 \cdot \overrightarrow{QI}.$$

Comme $m \mapsto \frac{2}{2+m}$ est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'ensemble cherché est

$$\{M,\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \overrightarrow{QM} = \lambda \cdot \overrightarrow{QI}\}$$

Si $Q \neq I$, il s'agit de la droite (QI) privée de Q. Si $Q = I$, il s'agit de $\{Q\}$.
